

## Lyapunov 関数の精度保証による構成

山本 野人

電気通信大学・情報理工学研究所

Nobito YAMAMOTO

Graduate School of Informatics and Engineering The University of Electro-Communications

yamamoto@im.uec.ac.jp

### 1 目的と概要

連続力学系および離散力学系の平衡点・不動点に対し、その近傍で定義される Lyapunov 関数の形状および定義域の同定を精度保証法によって行う手法について考察する。あわせて、連続力学系が閉軌道を持つ場合に、これに対応する Poincaré 写像の不動点に対する Lyapunov 関数の導出法を記述する。なお本稿は、松江要氏（統計数理研究所）および樋脇知広氏（電気通信大学・情報理工学研究所）との共同研究の成果である [3],[5]。特に数値例については [5] を参照されたい。

Lyapunov 関数は位相空間上の点の位置で決まるスカラー値関数であり、与えられた力学系に従ってこの点が推移する際に、その値が必ず減少する性質を持つ。言い換えれば、力学系によって動く点は Lyapunov 関数の等高線を下って移動する。平衡点・不動点や周期軌道などの近傍で Lyapunov 関数が構成できれば、そこでの力学系の解析のための非常に強力な道具となる。

精度保証の方法によってある関数が Lyapunov 関数であるかどうかを検証するためには、不動点（連続力学系では平衡点。以下同様）から離れた位置であれば、点の推移にしたがってその関数値が減少することを直接確認する方法を採用できる。しかしながら、不動点近傍では精度保証で用いる区間ベクトルが不動点を含むことになるため、この方法は使えない。

不動点近傍での Lyapunov 関数の同定は、双曲型不動点の場合には不動点における微分情報を基に行うことができる。これは、いわゆる Lyapunov 方程式もしくは Lyapunov 不等式と関係し、力学系において錐条件（の十分条件）として知られているもの [2] と同一であるが、Lyapunov 関数となる二次形式の導出法およびその定義域の確定のために精度保証法を用いる点に本稿の新規性がある。

次節から連続力学系・離散力学系のそれぞれに対して、Lyapunov 関数となる二次形式の導出法と定義域の確定法について述べる。本節では、その概要を常微分方程式で記述される連続力学系を例に取って記す。

連続力学系については、平衡点の安定性は微分方程式右辺を与える関数の零点におけるヤコビ行列の固有値に関係する。このヤコビ行列の固有値及び固有ベクトルの情報をもとにして、平衡点を原点に取った相空間上の二次形式を導出する。これは、解軌道に沿った時間微分が不動点で 0、それ以外の点で 0 未満となるように設計される。ただし、このような性質を持つ二次形式にはある程度の任意性があり、これを利用して安定もしくは不安定多様体の存在範囲をより限定する方法が導出できる（m-錐体法）。

次に、この二次形式が Lyapunov 関数となっている領域を特定する。これにはふたつのステージがある。

ステージ 1. 平衡点を含む比較的小さな領域では、二次形式の時間微分から導かれる行列の負定値性を精度保証法によって検証することで、Lyapunov 関数の条件（時間微分が 0 以下）を確認する。

ステージ 2. 平衡点から比較的離れた領域では、これを小領域に分割し、各々の小領域に対する二次形式の時間微分を区間演算を用いた精度保証法によって直接計算し、負であることを確認する。

与えられた領域についてこの手順による確認が取れば、導出した二次形式はその領域における Lyapunov 関数となっている。ただし精度保証法の特性から、ステージ 2 の方法は平衡点を含む小領域には適用できないことに注意する。

次節からは、以上の方法をより詳細に述べる。

## 2 連続力学系の Lyapunov 関数

まず、常微分方程式で記述される連続力学系について説明する。ここでは、正規形の連立1階常微分方程式のうち、自励系（方程式右辺に時間変数を陽に含まない）を扱う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}, \mathbf{f} &\in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

平衡点  $\mathbf{x}^*$  は方程式右辺の零点であり、必要であれば精度保証法によって数値的に確定しているものとする [1],[9]。

また、この平衡点が双曲型であることも仮定する。すなわち、 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  の  $\mathbf{x}^*$  におけるヤコビ行列の固有値の実部は0でないものとする。

### 2.1 二次形式の導出

1.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  における  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  のヤコビ行列を  $Df^*$  と置く。簡単のため、これが正則行列によって対角化可能であるとし（そうでない場合についての方法も導出できるが煩雑になるのでここでは述べない）、 $\Lambda$  を固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を並べた対角行列、 $X$  を対応する固有ベクトルを並べた行列とする。すなわち、

$$\Lambda = X^{-1}Df^*X.$$

これらの算定には通常の浮動小数点演算を用いれば良く、精度保証の必要はない。

2. 行列  $I^*$  を、ベクトル  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  を対角成分とする対角行列とする。ただし、

$$i_k = \begin{cases} 1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \\ -1, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0. \end{cases}$$

双曲性の仮定から、 $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$  とはならないことに注意する。

3. 実対称行列  $Y$  を以下のように算定する。

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X^{-H}I^*X^{-1}, \\ Y &= \operatorname{Re}(\hat{Y}). \end{aligned}$$

ただし、 $X^{-H}$  は行列  $X$  の共役転置の逆行列である。この算定も浮動小数点演算を用いてよい。

4. Lyapunov 関数となる二次形式として、次のものを定める。

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*).$$

ただし、これを精度保証計算で扱う場合には、 $Y$  の対称性を確保するために、

- $Y$  の代わりに  $(Y + Y^T)/2$  を用いる  
もしくは、
- $Y_{ji} = Y_{ij}$  と置く

などの操作を行っておく。

## 2.2 $L(\mathbf{x})$ の妥当性

ここでは、上で導いた  $L(\mathbf{x})$  が平衡点を含む領域で Lyapunov 関数の要件を満たすための十分条件を導き、また平衡点の十分小さな近傍ではこの条件を満たしていることを示す。

解軌道  $\mathbf{x}(t)$  を引数に代入して  $L(\mathbf{x}(t))$  を  $t$  で微分すると、

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T Y(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

ここで、

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))$$

を考える。

$$\frac{d}{ds}\mathbf{g} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

および  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  となることから、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)) ds (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

を得る。ただし  $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{f}$  の  $\mathbf{x}$  におけるヤコビ行列である。これより、 $L(\mathbf{x}(t))$  の  $t$  微分は、実二次形式

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \int_0^1 (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))) ds (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

で表されることになる。

いま、 $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  とおき、実対称行列  $A(\mathbf{z})$  を

$$A(\mathbf{z}) = D\mathbf{f}(\mathbf{z})^T Y + Y D\mathbf{f}(\mathbf{z})$$

で定める。 $\mathbf{x}^*$  と  $\mathbf{x}$  を結ぶ線分上の任意の点  $\mathbf{z}$  について  $A(\mathbf{z})$  が負定値であれば、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$  に対して  $\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) < 0$  となる。

以上を踏まえると、平衡点  $\mathbf{x}^*$  に関する星型領域  $D_L$ 、すなわち

- $\mathbf{x}^* \in D_L$
- $\mathbf{x} \in D_L$  に対し任意の  $0 \leq s \leq 1$  について  $\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \in D_L$

をみたす領域においては、任意の  $\mathbf{z} \in D_L$  に対し  $A(\mathbf{z})$  が負定値であることが、 $L(\mathbf{x})$  が  $D_L$  で Lyapunov 関数となるための十分条件となる。

次に、 $\mathbf{z}$  が平衡点  $\mathbf{x}^*$  の十分小さな近傍にある場合の  $A(\mathbf{z})$  の負定値性を示す。 $A(\mathbf{z})$  の固有値の  $\mathbf{z}$  に関する連続性から、 $A(\mathbf{x}^*)$  の負定値性を示せばよい。

一般に、エルミート行列  $H$  の二次形式は実数値を取る。特に、実ベクトル  $\mathbf{z}$  については、

$$\mathbf{z}^T H \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \operatorname{Re}(H) \mathbf{z}$$

となる。したがって、 $A(\mathbf{x}^*)$  の代わりにエルミート行列

$$A^* = (D\mathbf{f}^*)^H \hat{Y} + \hat{Y} D\mathbf{f}^*$$

の負定値性を調べればよいことに注意する。 $\hat{Y}$  の定義を用いれば

$$\begin{aligned} A^* &= (Df^*)^H X^{-H} I^* X^{-1} + X^{-H} I^* X^{-1} Df^* \\ &= X^{-H} \Lambda^H I^* X^{-1} + X^{-H} I^* \Lambda X^{-1} \\ &= X^{-H} (2\operatorname{Re}(\Lambda) I^*) X^{-1} \\ &= -2X^{-H} |\operatorname{Re}(\Lambda)| X^{-1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここに  $|\operatorname{Re}(\Lambda)|$  は行列  $\operatorname{Re}(\Lambda)$  の各成分の絶対値を取った行列を表す。これより、 $A^*$  は負定値のエルミート行列であることがわかる。したがって、 $x^*$  の十分小さな近傍では、

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

となる。一方、 $\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}^*) = 0$  だから、 $L(\mathbf{x})$  はこの近傍で Lyapunov 関数の要件を満たす。

### 2.3 Lyapunov 関数の定義域の検証

上述のように、平衡点に関する星型領域  $D_L$  で実対称行列  $A(\mathbf{z})$  が負定値であれば、 $L(\mathbf{x})$  は  $D_L$  で Lyapunov 関数となる。また、条件の導出過程から、負定値性の検証は領域  $D_L$  を小領域に分割して行ってよい（後述するように、離散力学系の場合には、このような分割による負定値性の検証は計算量の問題が生じて困難となる）。しかしながら、分割した小領域が平衡点を含まないならば、

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T Y(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

が負となることを区間演算で直接確認する方が良いように見える。行列  $A(\mathbf{z})$  の負定値性は  $\frac{d}{dt}L(\mathbf{x}) < 0$  となるための十分条件にすぎないからである。具体的には、小領域を含む区間ベクトル  $[\mathbf{x}]$  について、 $\frac{d}{dt}L([\mathbf{x}])$  を精度保証法で算定し、負となることを確認する。

実際には、小領域が平衡点を含んでいなくても、平衡点の近くなると精度保証計算の結果が 0 を含んでしまうことがある [5]。このような場合に対しては、行列  $A(\mathbf{z})$  の負定値性の確認による検証方法を適用する。

負定値性の確認は、例えば以下のように行なう。分割した小領域のうち平衡点を含むものや平衡点に近いものについて、まずこれを区間ベクトル  $[\bar{\mathbf{x}}]$  で包含する。区間ベクトルの中心を  $\bar{\mathbf{x}}$  と置き、

- (1) 行列  $A(\bar{\mathbf{x}})$  を浮動小数点演算で算定し、必要であれば対称性を確保したあと、その対角化を近似的に行っておく。すなわち、

$$\bar{\Lambda} = \bar{X}^{-1} A(\bar{\mathbf{x}}) \bar{X}$$

となる行列  $\bar{X}$  を算定する。

- (2) 精度保証法によって区間行列  $\bar{X}^{-1} A([\bar{\mathbf{x}}]) \bar{X}$  を算定し、その成分を区間  $[a]_{ij}$  と置く。
- (3) この区間行列にゲルシュゴーリンの定理 (The Gershgorin Circle Theorem) を適用する。すなわち、各  $i = 1, \dots, n$  について

$$[a]_{ii} + \sum_{j \neq i} |[a]_{ij}| < 0$$

を精度保証で検証する。

このほか、S.M.Rumpによるコレスキー分解を用いたより効率的な検証法があり、Intlab上で利用出来る [7]。

以上で領域  $D_L$  で Lyapunov 関数が定義できることが検証される。平衡点が漸近安定の場合には、Lyapunov 関数  $L(\mathbf{x})$  の等位面は楕円もしくは楕円球体となるが、領域  $D_L$  のうちで不変集合となるのはこの楕円球体の内部のみとなることに注意する。

また、平衡点がサドル型、すなわち不動点に向かう軌道と不動点から離れる軌道をもつ場合には、Lyapunov 関数の等位面は双曲線もしくは双曲面となる。軌道の接近・離脱の様相を解析するためには、Lyapunov 関数からの情報と流れ場の情報とを合わせて利用することになる。これに関しては [8] に数学的な設定の詳細と数値例がある。

## 2.4 m-錐体

ここでは Lyapunov 関数となる二次形式の任意性について考察する。 $L(\mathbf{x})$  の構成において、 $Y$  の定義に用いた対角行列  $I^*$  の代わりに、次の対角行列  $M^*$  を用いる。これは、その対角成分を  $i_1, i_2, \dots, i_n$  とするとき、

$$i_k = \begin{cases} m_k, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \\ -m_k, & \text{if } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \end{cases}$$

と定められる。ただし  $m_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) は予め定めた正数である。 $M^*$  を用いて構成された  $L(\mathbf{x})$  の  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  における時間微分に関する行列  $A^*$  を考えると、 $I^*$  を用いた場合とまったく同様にしてその負定性が示されることがわかる。正数  $m_k$  の値は任意であるので、目的に応じてその分布を設定することが考えられる。例えば、サドル型不安定性をもつ平衡点の近傍では、

- Lyapunov 関数によって構成される錐体のうち、不安定多様体を含む部分を狭く取りたいときには、 $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$  に対応する  $m_k$  を大きく取る。
- 錐体のうち、安定多様体を含む部分を狭く取りたいときには、逆に  $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$  に対応する  $m_k$  を大きく取る。

また、 $m_k$  の取り方によって Lyapunov 関数が定義される領域  $D_L$  の大きさ・形状が変化する [5]。

## 3 離散力学系の Lyapunov 関数

次に、連続微分可能な写像で記述される離散力学系について説明する。写像としては

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \psi(\mathbf{x}_n), \\ \mathbf{x}_0, \psi &\in \mathbf{R}^m \end{aligned}$$

の形のものを扱う。必要であれば精度保証法によって不動点  $\mathbf{x}^*$  を数値的に確定しておく。さらに、不動点は双曲型であることを仮定する。すなわち、写像  $\psi(\mathbf{x})$  のヤコビ行列  $D\psi(\mathbf{x})$  の  $\mathbf{x}^*$  における固有値の絶対値は 1 と異なるものとする。

### 3.1 二次形式の導出

1.  $A^* = D\psi(\mathbf{x}^*)$  と定め、これを対角化する。すなわち、 $\Lambda$  を固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  を並べた対角行列、 $X$  を対応する固有ベクトルを並べた行列として、

$$\Lambda = X^{-1}A^*X.$$

これらの算定には通常の浮動小数点演算を用いれば良く、精度保証の必要はない。

2. 行列  $I^*$  を、ベクトル  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  を対角成分とする対角行列とする。ただし、

$$i_k = \begin{cases} 1, & \text{if } |\lambda_k| < 1, \\ -1, & \text{if } |\lambda_k| > 1. \end{cases}$$

なお、双曲性の仮定から  $|\lambda_k| = 1$  とはならないことに注意。

3. 実対称行列  $Y$  を以下のように算定する。

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X^{-H}I^*X^{-1}, \\ Y &= \text{Re}(\hat{Y}). \end{aligned}$$

ただし、 $X^{-H}$  は行列  $X$  の共役転置の逆行列である。この算定も浮動小数点演算を用いてよい。

4. Lyapunov 関数となる二次形式として、次のものを定める。

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T Y (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*).$$

ただし、これを精度保証計算で扱う場合には、 $Y$  の対称性を確保するために、

- $Y$  の代わりに  $(Y + Y^T)/2$  を用いる  
もしくは、
- $Y_{ji} = Y_{ij}$  と置く

などの操作を行っておく。

### 3.2 $L(\mathbf{x})$ の妥当性

ここでは、上で導いた  $L(\mathbf{x})$  が不動点を含む領域で Lyapunov 関数の要件を満たすための十分条件を導き、また不動点の十分小さな近傍ではこの条件を満たしていることを示す。

解点列  $\mathbf{x}_n$  について、写像  $\psi(\mathbf{x})$  のヤコビ行列  $D\psi(\mathbf{x})$  を用いれば、積分表現

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^* = \int_0^1 D\psi(\mathbf{x}^* + s(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*)) ds (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*),$$

を得る。ここで、 $\mathbf{w} = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*$  および

$$A_I(\mathbf{w}) = \int_0^1 D\psi(\mathbf{x}^* + s\mathbf{w}) ds$$

と置く。

この表記を用いれば、Lyapunov 関数の要件  $L(\mathbf{x}_{n+1}) < L(\mathbf{x}_n)$  は次と同値である。

$$\mathbf{w}^T (A_I(\mathbf{w})^T Y A_I(\mathbf{w}) - Y) \mathbf{w} < 0.$$

これより、不動点に関する星型領域  $D_L$  で任意の  $\mathbf{w} \in (D_L - \mathbf{w}^*)$  に対し、

$$A_I(\mathbf{w})^T Y A_I(\mathbf{w}) - Y$$

が負定値であれば、 $L(\mathbf{x})$  は  $D_L$  で Lyapunov 関数となることがわかる。

以下では特に  $\mathbf{x}$  が不動点  $\mathbf{x}^*$  の十分小さな近傍にあるとき、 $A_I(\mathbf{w})^T Y A_I(\mathbf{w}) - Y$  の負定値性を示す。固有値の  $\mathbf{w}$  に関する連続性から、 $A_I(\mathbf{x}^*) = D\psi(\mathbf{x}^*) = A^*$  について  $(A^*)^T Y A^* - Y$  の負定値性を示せばよい。これは、実ベクトルの二次形式については  $(A^*)^H \hat{Y} A^* - \hat{Y}$  の負定値性と同値になるので、以下ではこれを示す。

エルミート行列  $\hat{Y}$  の定義を用いれば

$$\begin{aligned} (A^*)^H \hat{Y} A^* - \hat{Y} &= X^{-H} (\Lambda^H I^* \Lambda - I^*) X^{-1} \\ &= X^{-H} (\Lambda^H \Lambda - I) I^* X^{-1} \\ &= X^{-H} (|\Lambda|^2 - I) I^* X^{-1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここに  $|\Lambda|$  は行列  $\Lambda$  の各成分の絶対値を取った行列を表す。行列  $I^*$  の定義を見れば、これより、 $(A^*)^H \hat{Y} A^* - \hat{Y}$  は負定値のエルミート行列であることがわかる。したがって、 $\mathbf{x}^*$  の十分小さな近傍では、 $L(\mathbf{x})$  は Lyapunov 関数の要件を満たす。

### 3.3 Lyapunov 関数の定義域の検証

上述のように、不動点に関する星型領域  $D_L$  で実対称行列  $A_I(\mathbf{w})^T Y A_I(\mathbf{w}) - Y$  が負定値であれば、 $L(\mathbf{x})$  は  $D_L$  で Lyapunov 関数となる。しかしながら、連続系の場合と異なり、負定値性の条件が  $A_I$  の積分に現れる被積分関数についての条件に還元できない。これは、 $Y$  を挟んで  $A_I$  がふたつ現れることに起因するものであるが、より本質的には、行列に対する区間を用いた平均値定理と関係がある。従って一階の導関数の評価に区間演算を用いる限り、 $D_L$  を不動点に関して星型ではない小領域に分割してチェックする方法を取ることができない。このことは実際の検証過程においては、数値計算の負担が非常に大きくなることにつながり [5]、なんらかの改善方法が待たれる。現時点では、 $\psi$  に関する二階の導関数を用いるアイデアがあって、これを検討中である。

以下では、与えられた領域を分割して、不動点を含む星型小領域とその他の小領域に分けて扱う。分割した小領域が不動点を含む場合にのみ負値性の検証を行い、そのほかの小領域については直接計算で確認することにする。

分割した小領域のうち、不動点を含むものについては、まずこれを区間ベクトル  $[\mathbf{x}^*]$  で包含し、さらに

$$A_I(\mathbf{w}) \in D\psi([\mathbf{x}^*])$$

が任意の  $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}^*]$  について成り立つことから、 $A([\mathbf{x}^*]) = D\psi([\mathbf{x}^*])$  と置き、

$$A([\mathbf{x}^*])^T Y A([\mathbf{x}^*]) - Y$$

の負値性を検証する。

小領域が不動点を含まない場合には、この小領域を含む区間ベクトル  $[\mathbf{x}]$  について、

$$L(\psi([\mathbf{x}])) - L([\mathbf{x}]) < 0$$

を精度保証法で算定し、負となることを確認する。

後者の方法では、 $\psi([\mathbf{x}])$  の精度保証計算において区間の過大評価の影響が問題となる可能性がある。すなわち、区間  $[\mathbf{x}]$  とその像の精度保証結果である区間  $[\psi([\mathbf{x}])]$  とに重なりがあると、検証条件が破綻する。不動点  $\mathbf{x}^*$  を含まない小領域であっても不動点にある程度近ければ、このような破綻が生じやすくなる。したがって、不動点に近づく程、計算精度を上げて区間の過大評価を避ける必要が出て来る。特に後述する Poincaré 写像を扱う場合には、 $\psi([\mathbf{x}])$  の精度保証計算自体にかなりのコストがかかることにも注意する。前者の方法で星型以外の領域分割が出来ないこととあわせ、離散系の精度保証が難しいことの所以である。

### 3.4 m-錐体

連続系と同様に、m-錐体が定義できる。すなわち、 $L(\mathbf{x})$  の構成において、 $Y$  の定義に用いた対角行列  $I^*$  の代わりに、次の対角行列  $M^*$  を用いる。これは、その対角成分を  $i_1, i_2, \dots, i_m$  とするとき、

$$i_k = \begin{cases} m_k, & \text{if } |\lambda_k| < 0, \\ -m_k, & \text{if } |\lambda_k| > 0 \end{cases}$$

と定められる。ただし  $m_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) は予め定めた正数である。正数  $m_k$  の値は任意であるので、目的に応じてその分布を設定することが可能である。

## 4 閉軌道の Lyapunov 関数の構成

ここでは、連続力学系における閉軌道の近傍の様相を解析するツールとして、対応する Poincaré 写像上の Lyapunov 関数を構成する方法を述べる。

### 4.1 閉軌道の精度保証による存在検証

閉軌道の存在を精度保証法によって検証する方法には

1. Poincaré 写像を構成し、その不動点として検証する方法
2. 閉軌道を 2 点境界値問題の解とみなし、これに Bordering 条件を付加して検証する方法

の 2 種類がある。例えば 1 として [9] を、2 として [1] を挙げておく。

以下では閉軌道の存在は検証されていて、これに対する Poincaré 写像が定義され、その不動点の存在範囲が Poincaré 断面に相当する超平面上のある区間領域として特定されていることを仮定する。Lyapunov 関数は、Poincaré 写像を離散力学系と見なして構成される。

### 4.2 Poincaré 写像とその微分

連続力学系

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^n$$

が閉軌道を持ち、 $\mathbf{n}$  を単位法線ベクトルとする超平面  $\Gamma$  上で定義される Poincaré 写像の不動点として特定されているものとする。すなわち、

$$\varphi(t, \mathbf{x})$$



を初期点  $\mathbf{x} \in \Gamma$  から出発する解軌道の時刻  $t$  における位置とし、 $T_r(\mathbf{x})$  を  $\varphi(T_r(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \in \Gamma$  となる正の時刻としたとき、写像

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1} &= \psi(\mathbf{x}_n), \\ \psi(\mathbf{x}) &= \varphi(T_r(\mathbf{x}), \mathbf{x}),\end{aligned}$$

を考え、その不動点近傍での Lyapunov 関数を前章に従って構成する。

そのためには上記の Poincaré 写像の  $\mathbf{x}$  に関するヤコビ行列が必要となる。以下、その導出を記す。解軌道  $\varphi(t, \mathbf{x})$  に対し

$$V(t; \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(t, \mathbf{x})$$

とおくと、これは固定された  $\mathbf{x}$  に対して次の変分方程式を満たす時間依存の  $n$  次正方行列である。

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= Df(\varphi(t, \mathbf{x}))V, \\ V(0; \mathbf{x}) &= I\end{aligned}$$

ここに  $I$  は  $n$  次単位行列である。これを用いると、Poincaré 写像  $\psi(\mathbf{x})$  の  $\mathbf{x}$  に関するヤコビ行列  $D\psi = \frac{d}{d\mathbf{x}}\varphi(T_r(\mathbf{x}), \mathbf{x})$  は

$$D\psi = \left( I - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y})\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{f}(\mathbf{y})} \right) V(T_r(\mathbf{x}); \mathbf{y}),$$

と計算される。ここに  $\mathbf{y} = \varphi(T_r(\mathbf{x}), \mathbf{x})$  である。導出の詳細およびこれらに関する精度保証計算については [9] を参照されたい。

以上を用いて Poincaré 写像の不動点の近傍での Lyapunov 関数を構成する。この方法は、連続力学系の Poincaré 写像と離散力学系を組み合わせた写像、いわゆる Hybrid 系に対しても有効である。

なお、実際の検証にあたっての注意点としては、Poincaré 写像によって変数の自由度がひとつ落ちていくことを挙げておく。上述したように離散系の扱いは連続系に比べて計算量が大きくなる傾向があるため、自由度を落とすことによる計算量の抑制は非常に重要である。一般には、自由度の制約は方程式の形で表される。しかしながら、区間演算を使う限り、制約条件があっても計算量が減少することはない。計算量を減じるためには、あらかじめ制約条件式を使って、変数を消去しておくことが必要となる。

Poincaré 写像の場合には、超平面  $\Gamma$  を座標軸に平行なものとして設定することで、変数のうちのひとつを固定する。必要ならば座標変換を用いる。計算時には、固定した変数についてはこれを含む可能な限り小さな幅の区間を用い、 $\Gamma$  から出発して  $\Gamma$  に戻る周期軌道計算の前後でこの区間を変化させない方法を執る。周期軌道計算の過程では区間拡大が起こるが、固定した変数については結果として生じた区間拡大を無視する、ということである。 $\psi$  および  $D\psi$  は固定した変数に対応する成分を落とした形で記述し、Lyapunov 関数となる二次形式も次元を  $m = n - 1$  として構成する。この操作の実際については [5] を参照されたい。

## 5 まとめ

本稿では、連続力学系・離散力学系の平衡点もしくは不動点および周期軌道に関し、その近傍で Lyapunov 関数を精度保証の手法によって構成する方法を概観した。実際の検証における注意点も、思いつくままではあるが、記している。

本稿の内容のより詳細な解説は文献 [5] に記述されている。これには、数学的な論証のほか、Lyapunov Tracing などここで触れられなかった重要な概念の導出がある。特に数値例については、本稿では著作権や紙数の関係から省略しているため、興味のある読者は [5] にあたっていただきたい。また、この手法の具体的な応用としては、特異摂動問題への適用 [4] や爆発解の精度保証 [6]、ホモクリニック軌道の存在検証 [8] がある。これらの文献のうち入手しにくいものは、山本まで直接連絡していただければ送付したい。

Lyapunov 関数は非常に強力な解析ツールであるが、線形システムを除けばその構成は困難であると言われて来た。非線形システムに対しても、精度保証法の利用によって具体的な構成方法を確立できたことには大きな意義があると自負している。今後は、非双曲型平衡点を持つ系に対する扱いについてもこの研究を発展させて行きたい。

謝辞：本研究は、JST、CREST の支援を受けたものである。

## 参考文献

- [1] T. Hiwaki and N. Yamamoto. *Some remarks on numerical verification of closed orbits in dynamical systems*. *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE, 6(3):397–403, 2015.
- [2] H. Kokubu, D. Wilczak, and P. Zgliczyński. *Rigorous verification of cocoon bifurcations in the michelson system*. *Nonlinearity*, 20(9):2147, 2007.
- [3] K. Matsue. *Rigorous numerics for stationary solutions of dissipative PDEs-existence and local dynamics*. *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE, 4(1):62–79, 2013.
- [4] K. Matsue. *Rigorous numerics for fast-slow systems with one-dimensional slow variable: topological shadowing approach*. arXiv:1507.01462, to appear in *Topological Methods in Nonlinear Analysis*.
- [5] K. Matsue, T. Hiwaki and N. Yamamoto. *On the construction of lyapunov functions with computer assistance.*, Preprint, 2016.
- [6] A. Takayasu, K. Matsue, T. Sasaki, K. Tanaka, M. Mizuguchi and S. Oishi. *Verified numerical computations of blow-up solutions for ODEs*. in prepration.
- [7] S.M. Rump. *Intlab — Interval Laboratory*, version 6.
- [8] 山野駿, 「連続力学系におけるホモクリニック軌道の精度保証による検証について」, 平成 27 年度電気通信大学情報理工学研究科修士論文, 2016.
- [9] P. Zgliczyński.  *$C^1$ -Lohner algorithm*. *Found. Comput. Math.*, 2, 429–465, 2002.