数理解析研究所講究録
第1998巻 2016年 161-170

一般化キャリープロセスについて

中野史彦 * 　　貞廣泰造 †

概要

Carries process は b 進数で表示された n 個の数をランダムに加えたときに次の桁への繰り上がりのなすマルコフ連鎖であり、Holte [5], Diaconis-Fulman [2, 3, 4] により様々な性質が明らかにされた。本稿では、carries process の一般化を考え、その性質を論じた研究の内容を簡潔に紹介する。詳細は [8, 9] に述べられており、[10] はその review である。

1 導入

$b\in\mathrm{N}, b\geq 2$ とする。b 進数表示での n 個の数の足し算を次のように考える。

$$\begin{array}{ccccc}
C_{k+1} & C_k & \cdots & C_2 & C_1 \\ \hline
 & X_{1,k} & \cdots & X_{1,1} & X_{1,0} \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & X_{n,k} & \cdots & X_{n,1} & X_{n,0} \\ \hline
 & r_k & \cdots & r_1 & r_0
\end{array}$$

ここで、$X_{i,j}, r_j$ は digit set $\mathcal{D}$ の元である：

$$X_{i,j}, r_j \in \mathcal{D} := \{0, 1, \cdots, b-1\}.$$

「繰り上がり」$C_1, \cdots, C_{k+1}$ たちの取り得る範囲を求めるために、上の図で行った筆算は実際には以下の式 (1.1) のように表現されることに注意

*学習院大学理学部、e-mail : fumihiko@math.gakushuin.ac.jp
†津田塾大学学芸学部、e-mail : sadahiro@tsuda.ac.jp

する。

$$\left(\frac{X_{1,k}}{b}+\cdots+\frac{X_{1,0}}{b^{k+1}}\right)+\cdots+\left(\frac{X_{n,k}}{b}+\cdots+\frac{X_{n,0}}{b^{k+1}}\right)$$
$$=C_{k+1}+\left(\frac{r_k}{b}+\cdots+\frac{r_0}{b^{k+1}}\right) \tag{1.1}$$

$\left(\frac{X_{i,k}}{b}+\cdots+\frac{X_{i,0}}{b^{k+1}}\right)$, $\left(\frac{r_k}{b}+\cdots+\frac{r_0}{b^{k+1}}\right)$ は $[0,1]$ の b 進有理数であるから、C_k たちの取る値の集合は

$$\mathcal{C}:=\{0,1,\cdots,n-1\}$$

と一致する。これは b に依らない。

定義
$C_0=0$ とおく。$C_k\in\mathcal{C}$ まで与えられたとき、$X_1,\cdots,X_n$ を $\mathcal{D}$ から uniform at random に選んで $C_{k+1}\in\mathcal{C}$ を次の式により定める。

$$C_k+X_1+\cdots+X_n=bC_{k+1}+r,\quad r\in\mathcal{C}. \tag{1.2}$$

$\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ は $\mathcal{C}$ を状態空間に持つマルコフ連鎖となり、carries process と呼ばれている。

知られている結果
(1) Holte [5] : Carries process の推移確率行列 P の固有値・固有ベクトルを求め、それの持つ様々な対称性や組み合わせ論との関係を発見した。例えば、
(i) P の固有値は b^{-1} のベキからなり、その固有ベクトルは b に依らない。
(ii) 最大固有値 1 に対応する左固有ベクトル（定常分布）はオイラー数に比例し、最小固有値 $b^{-(n-1)}$ に対応する左固有ベクトルは $(n-1)$ 次パスカル数（の交代符号）に比例する。
(ii) 右固有ベクトルの第 0 行ベクトルは n 次のスターリング数に比例する。
(2) Diaconis-Fulman [2, 3, 4] : Carries process とリフルシャッフルとの関係、P の左固有ベクトルのなす行列は S_n の Foulkes character table と一致すること、可換代数の Veronese mapping との関係などを論じた。

その他にも non-commutative symmetric function を用いて [4] の別証明をしたもの [7], determinantal process との関係を論じたもの [1] などがある。

2 一般化キャリープロセス

キャリープロセスの定義において、digit set $\mathcal{D}$ を次の $\mathcal{D}_d$ で置き換えることを考える

$$\mathcal{D}_d := \{d, d+1, \cdots, d+b-1\}.$$

ここで、$-(b-1) \leq d \leq 0$ とする。このとき $0 \in \mathcal{D}_d$ となり、任意の自然数を b 進数の形で一意的に表示できる。n 個の数を加えたときに生じる繰り上がりが取り得る値の集合 $\mathcal{C}_d$ は、§1 で行ったのと同様の議論により次のように与えられる。

$$\mathcal{C}_d = \begin{cases} \{s, s+1, \cdots, s+n\} & ((n-1)\frac{d}{b-1} \notin \mathbf{Z}) \\ \{s, s+1, \cdots, s+n-1\} & ((n-1)\frac{d}{b-1} \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$
$$s := \min \mathcal{C}_d = \left\lfloor (n-1)\frac{d}{b-1} \right\rfloor.$$

$p \geq 1$ 及びその共役指数 p^* を次の式により定める。

$$\left\{(n-1)\frac{d}{b-1}\right\} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^*}. \tag{2.1}$$

但し、$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ は x の小数部分。C_{k+1} から C_k を与える式 (1.2) において、変数の取り得る値をそれぞれ標準化するために、

$$X_i = X_i' + d, \quad r = r' + d, \quad C_k = C_k' + s, \quad C_{k+1} = C_{k+1}' + s$$

とおいて (1.2) に代入すると次の式を得る。

$$C_k' + X_1' + \cdots + X_n' + \frac{b-1}{p^*} = C_{k+1}'b + r' \tag{2.2}$$
$$X_i', r' \in \mathcal{D} = \{0, 1, \cdots, b-1\},$$
$$C_k',\ C_{k+1}' \in \mathcal{C}',$$
$$\mathcal{C}' := \{0, 1, \cdots, m\}, \quad m := \begin{cases} n & (p \neq 1) \\ n-1 & (p = 1) \end{cases}.$$

(2.1) より $\frac{b-1}{p^*} \in \mathbf{N}$. 一般に $\{p \mid (2.1)\ を満たす\} \subsetneq \left\{p \mid \frac{b-1}{p} \in \mathbf{N}\right\}$ であるが、$\frac{b-1}{p} \in \mathbf{N}$ であれば、(2.2) により carries process の一般化を考えることができる。

定義

$p \geq 1, b \equiv 1 \pmod p$ とする。$C_0' = 0$ とし、$C_k' \in \mathcal{C}'$ まで与えられたと

き、$X'_1, \cdots, X'_n \in \mathcal{D}$ を uniform at random に選び、$C'_{k+1} \in \mathcal{C}'$ を (2.2) を満たすものとして定める。$\mathcal{C}'$ 上のマルコフ連鎖 $\{C'_k\}_{k=0}^{\infty}$ を <u>(b,n,p)-process</u> と呼ぶ。

以下に与えられる諸定理により、(b,n,p)-process は既約かつ非周期的であることがわかる。

3 得られた結果

3.1 推移確率行列の固有値・固有ベクトル

(b,n,p)-process の推移確率行列を

$$P = \{P_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{C}'} \quad P_{ij} := P(C_{k+1} = j \,|\, C_k = i)$$

とおく。

Theorem 3.1

$$P_{ij} = b^{-n} \sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} \binom{n + A(i,j) - br}{n} 1(A(i,j) \geq br)$$

$$\textit{where} \quad A(i,j) := \left(j + \frac{1}{p}\right) b - \left(i + \frac{1}{p}\right).$$

Proof. $r' = b - 1 - Y$ とおくと、(2.2) は $X'_1 + \cdots + X'_n + Y = A(i,j)$ と書き換えられる。よって

$$\begin{aligned} P_{ij} &= b^{-n} \sharp \left\{ (X_1, \cdots, X_n, Y) \in \mathcal{D}^{n+1} \,|\, X_1 + \cdots + X_n + Y = A(i,j) \right\} \\ &= b^{-n} [x^{A(i,j)}] \left(1 + x + \cdots + x^{b-1}\right)^{n+1} \\ &= b^{-n} [x^{A(i,j)}] \left(\frac{1 - x^b}{1 - x}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

あとは、2 項定理及び $(1-x)^{-(n+1)} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} x^k$ を用いると、定理 3.1 の主張が従う。□

Theorem 3.2 P の固有値・左固有ベクトルは次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
P &= L^{-1} diag\left(1, \frac{1}{b}, \cdots, \frac{1}{b^m}\right) L \\
L &= \{v_{ij}\}_{i,j\in C'} \\
v_{ij} &= \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \binom{n+1}{r} \{p(j-r)+1\}^{n-i}.
\end{aligned}
$$

また $\{v_{ij}\}$ はオイラー数と類似の漸化式に従う。

$$
\begin{aligned}
&v_{i,j}(n) = (pj+1)v_{i,j}(n-1) + \{p(n+1-j)-1\}v_{i,j-1}(n-1) \\
&\quad i,j = 0,1,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

例：$n=3$ とする。

$$
p=1 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad p=2 \begin{pmatrix} 1 & 23 & 23 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
p=3 \begin{pmatrix} 1 & 60 & 93 & 8 \\ 1 & 23 & -9 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad p=3/2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{93}{8} & \frac{15}{2} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{9}{4} & -3 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
p=5/2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{311}{8} & \frac{101}{2} & \frac{27}{8} \\ 1 & \frac{33}{4} & -7 & -\frac{9}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}
$$

(b,n,p^*)-process に対応する行列 L の行ベクトルは、(b,n,p)-process のそれの「逆向き」に比例している。また、一般に L の各成分は次のような組み合わせ論的意味を持つ。

(1) $p \in \mathbf{N}$ のとき：定常分布は colored permutation group $G_{p,n} (\simeq \mathbf{Z}^p \wr S_n)$ の descent statistics $\{v_{0,j}\}_j$ に比例する：

$$
v_{0j} = \sharp\{\sigma \in G_{p,n} \mid d(\sigma) = j\}.
$$

また、L は $G_{p,n}$ の Foulkes character table に一致する。(cf. [6])

(2) $p \notin \mathbf{N}$ のとき：組み合わせ論的意味は現時点では不明。

Proof. $\sum_{k=0}^{n} v_{ik}P_{kj} = b^{-i}v_{ij}$ を示せば良い。$f(x) := \sum_{k\geq 0}(pk+1)^{n-i}x^k$ とおくと、

$$v_{ik} = [x^k]\left((1-x)^{n+1}f(x)\right).$$

一方、

$$A(k,j) - br = \left(j - r + \frac{1}{p}\right)b - \frac{1}{p} - k =: K(j,r) - k$$

であるから、

$$P_{kj} = b^{-n}\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r \binom{n+1}{r} [x^{K(j,r)-k}]\left((1-x)^{-(n+1)}\right)1(K(j,r) \geq k)$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n} v_{ik}P_{kj} = b^{-n}\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r \binom{n+1}{r} [x^{K(j,r)}](f(x))1(K(j,r) \geq 0) = b^{-i}v_{ij}.$$

□

Theorem 3.3 $R := L^{-1} = \{u_{ij}\}$ とおくと、

$$u_{ij} = \sum_{k=i}^{n}\sum_{l=n-j}^{k} \frac{s(k,l)(-1)^{n-j-l}}{k!p^l} \binom{l}{n-j}\binom{n-i}{n-k}$$

$$s(n,k) := (-1)^{n-k}\sharp\{\sigma \in S_n \,|\, \sigma \textit{ has } k\textit{-cycles }\}$$

$w_j(n) := n!p^n u_{n-j}^{(p)}(0)$ は、次の漸化式を満たす。

$$w_j(n) = (pn-1)w_j(n-1) + w_{j-1}(n-1)$$
$$w_0(0) = 1$$

このことから、$p \in \mathbf{N}$ のとき、第0行ベクトルを逆向きに並べたものは Stirling-Frobenius cycle-number [11] に比例することがわかる。

例：$p = 2$ のとき、$n!p^nR$ は次のようになる。

$$n=1\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad n=2\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$n=3\ \begin{pmatrix} 1 & 9 & 23 & 15 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 23 & -15 \end{pmatrix}$$

第0行ベクトルを逆向きに並べたもの $(1,1)$, $(3,4,1)$, $(15,23,9,1)$ はパラメーター $p=2$ の Stirling-Frobenius cycle number. また、Theorem 3.3 の結果を用いると、$\{C'_k\}$ の平均や分散、相関などを計算できる。

3.2 応用

(b,n,p)-process にマルコフ連鎖の収束定理を用いることにより、次のことがわかる。まず、$p\in\mathbf{R}, p\geq 1$ に対して

$$\left\langle \begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right\rangle_p := \sum_{r=0}^{j}(-1)^r \binom{n+1}{r}\{p(j-r)+1\}^n$$

とおく。また、$Y_1,\cdots,Y_n$ を互いに独立な $[0,1]$ 上の一様分布確率変数とする。

Theorem 3.4

$$\mathbf{P}\left(Y_1+\cdots+Y_n\in[j,j+1]-\frac{1}{p^*}\right)=\left\langle \begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right\rangle_p (p^n n!)^{-1}.$$

Proof. density argument により $\frac{b-1}{p}\in\mathbf{N}$ としてよい。$X_{i,j}\in\mathcal{D}$ に対し

$$Y_i^{(k)}:=\frac{X_{i,k}}{b}+\cdots+\frac{X_{i,0}}{b^{k+1}}$$

とおくと、(1.1) により

$$\mathbf{P}\left(Y_1^{(k)}+\cdots+Y_n^{(k)}+\frac{b-1}{p^*}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{b^j}\in[j,j+1]\right)=\mathbf{P}(C'_k=j).$$

あとは、$k\to\infty$ のとき $Y_i^{(k)}$ は $[0,1]$ 上の一様分布に弱収束し、$\{C'_k\}$ は (b,n,p)-process の定常分布に弱収束することを用いれば良い。□

3.3 リフル・シャッフルとの関係

n 枚のカードからなる「山」があり、それぞれが p 種類の「色」を持っているとする。この山を b 項分布

$$\mathbf{P}(n_0,n_1,\cdots,n_{b-1}):=\frac{n!}{n_0!n_1!\cdots n_{b-1}!}\cdot\frac{1}{b^n}$$

に従って b 個の「山」に分割し、j 番目の山 ($j \equiv q \pmod p$) に対しては、色を $q \pmod p$ だけずらす。その後、山の枚数に比例する確率でこれらを混ぜ合わせる。このランダムな操作を (b,n,p)-shuffle と呼ぶことにする。(b,n,p)-shuffle を r 回繰り返すことにより得られる $G_{p,n}$ の元を $\{\sigma_r\}_{r=0}^{\infty}$ ($\sigma_0 = id$) とおくと、$\{\sigma_r\}$ は $G_{p,n}$ 上のマルコフ連鎖となる。これを sequence induced by (b,n,p)-shuffle と呼ぶことにする。

Remark P の右固有ベクトル $R = \{u_{ij}\}$ と (b,n,p)-shuffle との間には次のような関係がある。

$$u_{ij} = [x^{n-j}]\sharp\left\{\sigma \,|\, \sigma \text{ は } (x,n,p)\text{-shuffle で } d(\sigma^{-1}) = i\right\}.$$

Theorem 3.5 $p \in \mathrm{N}$, $b \equiv 1 \pmod p$ とする。$\{C_k\}$, $\{\sigma_k\}$ をそれぞれ *(b,n,p)-process, sequence induced by (b,n,p)-shuffle* とすると

$$\{C'_k\}_{k=0}^{\infty} \stackrel{d}{=} \{d(\sigma_k)\}_{k=0}^{\infty}.$$

sequence induced by (b,n,p)-shuffle も既約かつ非周期的であり、その定常分布は一様分布である。よって Theorem 3.5 は $p \in \mathbf{N}$ のときに (b,n,p)-process の定常分布が $G_{p,n}$ の descent statistics に比例することの別証明を与える。

Theorem 3.5 の証明は全単射を構成することによって行われる。ここでは、$b = 7$, $n = 4$, $p = 3$ の場合に、その具体例を示す。(b,n,p)-process が次のように与えられたとする ($\frac{b-1}{p^*} = 4$ に注意)。

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 3 & & \\ \hline & & 3 & 5 & 4 \\ & & 0 & 2 & 5 \\ & & 4 & 4 & 6 \\ & & 0 & 3 & 2 \\ & & 4 & 4 & 4 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

一番下の 4 を取り除き、残った 4 つの行に以下のように操作を加える。

$$\xrightarrow{(i)} \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \quad \xrightarrow{(ii)} \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \quad \xrightarrow{(iii)} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{array} \quad \xrightarrow{(iv)} \begin{array}{ccc} 1_0 & 1_0 & 3_2 \\ 2_1 & 4_1 & 4_0 \\ 3_2 & 2_2 & 2_0 \\ 4_2 & 3_0 & 1_2 \end{array}$$

(i) 上から順に累積をとる。つまり、7 進法で $354+025=1412$, $412+446=1161$ などの計算を行う。
(ii) 4 つの数をそれぞれ $\bmod b^3$ で p 倍する。(例：$354\times 3\equiv 425 \bmod b^3$)
(iii) $\star^{-1}$ 演算、つまり、それより前の桁が与える辞書式順序で小さいものから順に数を取り出して上から並べる
(iv) GSR 表現により対応する (b,n,p)-shuffle.

4 その他

(1) 基数を負の数 $-b(\leq -2)$ にとっても、同様に carries process, 及びその拡張 $(-b,n,p)$-process を考えることができて、その推移確率行列の固有値は $(-b^{-1})$ のベキ乗に、固有ベクトルは (b,n,p)-process のそれに一致する。また $p\in \mathrm{N}$ のときは、$(+b)$-case と同様に (b,n,p)-shuffle との関係を論ずることができる。但し、$G_{p,n}$ の別の descent の概念を必要とする。
(2) 基数 b を複素数にとって類似のことを考えることもできるが、b^{-1} のベキ乗の以外の値も固有値に現れるようである。

参考文献

[1] Borodin, A., Diaconis, P., Fulman, J. On adding a list of numbers(and other one-dipendent determinantal processes), Bull. AMS.**47**, no. 4, (2010), 639-670.

[2] Diaconis, P., Fulman, J., Carries, shuffling, and an amazing matrix. The American Mathematical Monthly, **116**(9)(2009), p.780-803.

[3] Diaconis, P., Fulman, J., Carries, shuffling, and symmetric functions Advances in Applied mathematics, **43**(2)(2009), p.176-196

[4] Diaconis, P., Fulman, J., Foulkes characters, Eulerian idempotents, and an amazing matrix, J. Alg. Comb. **36**(3)(2012), 425-440.

[5] Holte, J., Carries, combinatorics, and an amazing matrix The American Mathematical Monthly, **104**(2)(1997), p.138-149

[6] Miller, A., Foulkes characters for complex reflection groups, to appear in Proc. A.M.S.

[7] Novelli, J.C., Thibon, J-Y., Noncommutative symmetric functions and an amazing matrix, arXiv:1109.1184.

[8] Nakano, F., and Sadahiro, T., A generalization of carries process and Eulerian numbers, Advances in Applied Mathematics, **53** (2014) 28 - 43.

[9] Nakano, F., and Sadahiro, T., A generalization of carries process and riffle shuffles, arXiv. 1403.5822.

[10] Takahiko Fujita, Nakano, F., and Sadahiro, T., A generalization of carries process, DMTCS proc. **AT**, 2014, 61-70.

[11] The Stirling-Frobenius numbers,

http://www.luschny.de/math/euler/StirlingFrobeniusNumbers.html