数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 17-24

共形デザインとSVOAの最小共形重み空間について

東北大学 大学院情報科学研究科 端川 朝典
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
Tomonori Hashikawa

(e-mail: t.hashikawa@ims.is.tohoku.ac.jp)

本稿では, 2016 年 1 月の RIMS 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」で講演した内容を解説する. また, 講演では時間の都合上述べなかった最小共形重み空間が共形 4-デザインである符号頂点作用素超代数の分類結果についても述べる.

1 はじめに

まずは本研究における筆者のモチベーションを述べる. 頂点作用素超代数 (SVOA) は, 二元符号や整数格子に類似する性質をいくつか持つことが知られている. 頂点作用素代数 (VOA) に基づく共形デザインは G. Höhn 氏によって二元符号に基づく組合せデザイン, 整数格子に基づく球面デザインの類似物として導入された [Hö]. Höhn 氏は, 共形デザインで Assmus–Mattson の定理 [AM] の類似を得ている[1]. このように組合せデザインと二元符号に関する有名な定理の類似が得られていることから, 次の問題が自然と考えられる.

問題 1. 「二元符号に基づく組合せデザイン」や「整数格子に基づく球面デザイン」の理論で成立する主張や性質の類似は「VOA に基づく共形デザイン」の理論においても成立するか.

筆者は, まず次の Venkov 氏によって得られた整数格子と球面デザインの結果に注目した.

定理 1.1. L を最小ノルムが 2 の整数格子とする. その最小ノルムの元全体の集合が球面 4-デザインであることと, L がルート格子 A_1, A_2, D_4, E_6, E_7, もしくは E_8 のいずれかと同型であることは必要十分である.

[1]球面デザインと整数格子では Venkov 氏によって Assmus–Mattson の定理の類似が示されている [Ve].

一般に, 最小ノルムの集合が球面4-デザインとなる整数格子は**超完璧格子**(strongly perfect lattice) と呼ばれる (see [Ve]). 定理 1.1 は最小ノルムが2の超完璧格子の分類結果となる. Venkov 氏は [Ve] において, 最小ノルムが3の場合の超完璧格子の分類も得ている. これら超完璧格子の分類結果を見ると, 最小ノルムの集合は, 球面デザインとして良い構造を持つとき, その格子の構造的対称性に影響を与えているように感じられる. この観点から, SVOA における整数格子の最小ノルムの集合と対応する空間, 最小共形重み空間, が共形デザインの構造を持つとき, その SVOA の対称性にどのような影響を与えるか興味をもった. これが, 本研究のモチベーションであり, SVOA の最小共形重み空間の共形デザインについて考える理由である.

2 準備

本研究で得られた成果を述べる前に本稿で考える SVOA の準備をする.

本稿で考える SVOA は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上の SVOA とする. V を非負半整数で次数付けられている CFT 型[2] の SVOA とし, V^0 と V^1 を, それぞれ V の偶部分と奇部分とする. V^0 と V^1 は次のように次数付けられた空間である:

$$V^0 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n, \quad V^1 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2}} V_n.$$

ここで V_n は $L(0) = \omega_{(1)}$ の固有値 n の空間であり, 重み n の空間と呼ぶ. ただし ω は V の Virasoro 元であり, $v \in V$ に対して頂点作用素 $Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{(n)} z^{-n-1}$ である. V_ω を ω によって生成される V の部分 VOA とする. V の**最小共形重み**μ を次で定義する.

$$\mu = \begin{cases} \min\{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid V_n \neq (V_\omega)_n\} & \text{if } V \neq V_\omega, \\ \infty & \text{if } V = V_\omega. \end{cases}$$

本稿では $\mu < \infty$ となる場合, つまり $V \neq V_\omega$ の場合のみ考える. また V は CFT 型であるので常に $\mu > 0$ となる.

$\zeta^r = e^{2\pi\sqrt{-1}r}$ とする ($r \in \mathbb{Q}$). 本稿において, V は非退化な不変内積 $(\cdot\mid\cdot)$ をもつと仮定する. ここで $(\cdot\mid\cdot)$ が V 上で不変とは, $a,u,v \in V$ に対して次が成立することである:

$$(Y(a,z)u \mid v) = (u \mid Y(e^{zL(1)}z^{-2L(0)}\zeta^{L(0)+2L(0)^2}a, -z)v).$$

本稿では, 更に V は, V_ω 加群として最高ウェイト加群の直和であると仮定する. $V[n]$ を最高ウェイトが n ($\in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$) である V の V_ω 部分加群の和とする. 先程の仮定から

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2}} V[n] \tag{2.1}$$

と書ける. $\pi : V \to V[0] = V_\omega$ を projection とする.

[2] V_0 が一次元, つまり $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ のとき V は CFT 型という. ただし $\mathbf{1}$ は V の真空元とする.

定義 2.1. 重み n の空間 V_n は

$$\mathrm{tr}|_{V_n} o(a) = \mathrm{tr}|_{V_n} o(\pi(a))$$

が任意の $a \in \bigoplus_{0\le s\le t, s\in\mathbb{Z}} V_s$ $(\subset V^0)$ に対して成立するとき V^0 に基づく共形 t-デザインという. ただし $a \in V_m$ に対して $o(a) = a_{(m-1)}$ である.

3 主結果とその解説

次が本研究で得られた成果である[3].

主結果 ([H]). V を SVOA とし, $\mu < \infty$ を V の最小共形重みとする. 次が成立する.

(1) V_μ が共形 t-デザインであることと, t 次の quadratic Casimir vector が V_ω に属することとは必要十分である.

(2) V_μ が共形 $2m$-デザインならば, V_μ は共形 $(2m+1)$-デザインである.

quadratic Casimir vector は, はじめ [Ma] で導入された. m 次の quadratic Casimir vector は次で与えられる:

$$\lambda_\mu^m = \zeta^{\mu+2\mu^2} \sum_{i=1}^{p_\mu} v^i_{(2\mu-1-m)} v_i.$$

ここで p_μ は $P_\mu = \{v \in V_\mu \mid L(k)v = 0 \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ の次元, $\{v_i\}_{i=1}^{p_\mu}$ は P_μ の基底, $\{v^i\}_{i=1}^{p_\mu}$ は $\{v_i\}_{i=1}^{p_\mu}$ の $(\cdot\,|\,\cdot)$ に関する双対基底である[4][5] $(\zeta^r = e^{2\pi\sqrt{-1}r}, r \in \mathbb{Q})$.

注意 3.1. 主結果の (1) の主張は, 山内氏によって, 拡張された Griess 代数を SVOA に導入するための仮定の下で示されている [Y2]. 本稿では, 本研究における仮定の下でも得られたことを報告する.

注意 3.2. quadratic Casimir vector が V_ω に属しているときの VOA や SVOA は [Tu] や [TV] などで研究されている. 主結果の (1) によって, 共形デザインの研究に [TV] で行われている Modular Linear Differential Equation の議論等を持ち込めるようになった.

注意 3.3. 整数格子の最小ノルムの集合 X は, $X = -X$[6] を満たすことから, 球面 $2m$-デザインならば球面 $(2m+1)$-デザインとなることが知られている[7]. 主結果の (2) は, その事実の SVOA と共形デザインの理論における類似であり, 問題 1 が成立する 1 つの例となる.

[3] 講演では主結果の (2) についてのみ述べた.

[4] 今, $V[0]$ と $\bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ は $(\cdot\,|\,\cdot)$ の不変性を用いることで, その双線形式に関して直交することが分かる. P_μ は $\bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ に含まれていること, $(\cdot\,|\,\cdot)$ が V 上で非退化であることから, $(\cdot\,|\,\cdot)$ は P_μ 上でも非退化となる. よって P_μ 上でその双線形式に関する双対基底をとることが出来る.

[5] 実際には, [Tu] や [TV] では $\zeta^{\mu+2\mu^2}\lambda_\mu^m$ を m 次の quadratic Casimir vector と呼んでいる.

[6] この性質は antipodal と呼ばれる.

[7] 最小ノルムの集合でなくても, 整数格子のあるノルムの元全体の集合は antipodal となるので, その集合についても球面 $2m$-デザインならば球面 $(2m+1)$-デザインとなる.

まずは主結果の (1) の証明を述べる．これは, [Y2] での山内氏の計算を用いることで示すことが出来る．$a \in V_m$ とし ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), $\bar{a} = a - \pi(a)$ とおく．このとき $\bar{a}$ は $V_m \cap \bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ の元であることを注意する．$o(a)$ の V_μ 上のトレースは次のように書ける:

$$\mathrm{tr}|_{V_\mu} o(a) = \mathrm{tr}|_{V_\mu} o(\pi(a)) + \mathrm{tr}|_{V_\mu} o(\bar{a}). \tag{3.1}$$

ここで $\mathrm{tr}|_{V_\mu} o(\bar{a})$ を計算する．(2.1) と, $(\cdot \mid \cdot)$ が $(V_\omega)_\mu$ 上で非退化であることから $V_\mu = (V_\omega)_\mu \oplus P_\mu$ となる．q_μ を $(V_\omega)_\mu$ の次元とし, $\{w_i\}_{i=1}^{q_\mu}$ を $(V_\omega)_\mu$ の基底, $\{w^i\}_{i=1}^{q_\mu}$ を $\{w_i\}_{i=1}^{q_\mu}$ の $(\cdot \mid \cdot)$ に関する双対基底とする．$V_\mu = (V_\omega)_\mu \oplus P_\mu$ であるので $\mathrm{tr}|_{V_\mu} o(\bar{a})$ は次のように書ける．

$$\mathrm{tr}|_{V_\mu} o(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{p_\mu} (o(\bar{a})v^i \mid v_i) + \sum_{i=1}^{q_\mu} (o(\bar{a})w^i \mid w_i). \tag{3.2}$$

今, $\{w^i\}_{i=1}^{q_\mu}$ は $(V_\omega)_\mu$ の基底であるので $V[0]$ に含まれる．$\bar{a} \in \bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ であり, $\bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ は $V[0] = V_\omega$ の加群であるので, どの $1 \leq i \leq q_\mu$ に対しても $o(\bar{a})w^i \in \bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ となる．また $V[0]$ と $\bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ は $(\cdot \mid \cdot)$ に関して直交しているので, どの $1 \leq i \leq q_\mu$ に対しても $(o(\bar{a})w^i \mid w_i) = 0$ となり, (3.2) の 2 つ目の和は 0 となる．[Y2, Section 4.1, Lemma 5] の計算方法を (3.2) の 1 つ目の和に使うことで次が得られる:

$$\mathrm{tr}|_{V_\mu} o(\bar{a}) = (-1)^m (\bar{a} \mid \lambda_\mu^m).$$

つまり (3.1) は

$$\mathrm{tr}|_{V_\mu} o(a) = \mathrm{tr}|_{V_\mu} o(\pi(a)) + (-1)^m (\bar{a} \mid \lambda_\mu^m) \tag{3.3}$$

となる．V_μ が共形 t-デザインならば (3.3) より λ_μ^t は $V_t \cap \bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ の元と直交することになり, その直交補空間である $(V_\omega)_t$ に属することが分かる．逆に $\lambda_\mu^t \in V_\omega$ ならば, $\lambda_\mu^s \in V_\omega$ $(s \leq t)$[8] でありかつ $V[0]$ と $\bigoplus_{n\neq 0} V[n]$ は $(\cdot \mid \cdot)$ に関して直交するので (3.3) から V_μ は共形 t-デザインとなる．

次に主結果の (2) を, 主結果の (1) を用いて証明する．主結果の (1) より $\lambda_\mu^{2m} \in V_\omega$ のときに $\lambda_\mu^{2m+1} \in V_\omega$ となることを示せば良い．$(2m+1)$ 次の quadratic Casimir vector は定義から $\lambda_\mu^{2m+1} = \zeta^{\mu+2\mu^2} \sum_{i=1}^{p_\mu} v^i_{(2\mu-1-(2m+1))} v_i$ である．skew symmetry より λ_μ^{2m+1} は次のように書ける:

$$\lambda_\mu^{2m+1} = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^{2\mu-(2m+1)+\ell}}{\ell!} L(-1)^\ell \left(\zeta^{\mu+2\mu^2} \sum_{i=1}^{p_\mu} (-1)^{|v^i||v_i|} (v_i)_{(2\mu-1-(2m+1)+\ell)} v^i \right). \tag{3.4}$$

ここで $|a|$ は $a \in V^0$ ならば 0, $a \in V^1$ ならば 1 である．今, 各 i に対して $|v^i||v_i| = 2\mu \bmod 2$ である．加えて $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ であるので (3.4) は

$$\lambda_\mu^{2m+1} = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^{2m+1+\ell}}{\ell!} L(-1)^\ell \lambda_\mu^{2m+1-\ell} = -\lambda_\mu^{2m+1} + \sum_{\ell \geq 1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell!} L(-1)^\ell \lambda_\mu^{2m+1-\ell} \tag{3.5}$$

---

[8] $k > 0$ に対して $L(k)\lambda_\mu^m = (\mu(k-1)+m-k)\lambda_\mu^{m-k}$ であることから分かる．

となる[9]. よって次を得る:

$$\lambda_\mu^{2m+1} = \frac{1}{2}\sum_{\ell\geq 1}\frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell!}L(-1)^\ell \lambda_\mu^{2m+1-\ell}. \tag{3.6}$$

V_μ が共形 $2m$-デザインならば主結果の (1) から $\lambda_\mu^0, \ldots, \lambda_\mu^{2m} \in V_\omega$ であるので (3.6) の右辺が V_ω に属する. よって $\lambda_\mu^{2m+1} \in V_\omega$ となり, V_μ は共形 $(2m+1)$-デザインとなることがわかる.

注意 3.4. 最小共形重みが 2 のときに, $2m$ 次の quadratic Casimir vector と $L(-1)$ の作用を用いて $2m+1$ 次の quadratic Casimir vector を書き下せるという主張は [Ma] で, 証明はついていないが主張されていた. 主結果の (2) は, どの最小共形重みに対しても [Ma] での主張が成立することを示し, 共形デザインに応用したことで得られた.

注意 3.5. 講演時に, 主結果の (2) の証明の方針は整数格子と球面デザインの場合と同様であるかと質問があった. 整数格子と球面デザインの場合は antipodal の性質と球面デザインの定義からすぐに従うことなので, 主結果の (2) の証明とは異なっていると思われる.

4 跡公式

講演では主結果の (2) の解説に重きを置いていた. 本稿では, V_μ が共形 4-デザインのときに V_μ 上の 2 次の跡公式が得られたことについても報告する. 跡公式は VOA が $\mathcal{S}^4$ 級や $\mathcal{S}^6$ 級[10] の仮定の下で最小共形重みが 2 の VOA と, 拡張された Griess 代数を導入するための仮定の下で様々な SVOA について, それぞれ [Ma] と [Y2] で得られている. [Ma] で用いられた手法を適用することで, V_μ 上の跡公式が本稿の仮定の下でも得られる. 本稿では証明なしで結論だけ述べる.

命題 4.1 (cf. [Ma, Theorem 2.1], [Y2, Theorem 1]). d_μ を V_μ の次元とする. V の中心電荷 c は 0 と $-\frac{22}{5}$ でないと仮定し, V の最小共形重み μ は $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ のいずれかであると仮定する.

(1) V_μ が共形 2-デザインならば $a \in V_2$ に対して次が成立する:

$$\mathrm{tr}|_{V_\mu} o(a) = \frac{2\mu d_\mu}{c}(a \mid \omega).$$

(2) V_μ が共形 4-デザインならば $a, b \in V_2$ に対して次が成立する:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}|_{V_\mu} o(a)o(b) \quad = \quad & \frac{2(\mu d_\mu(22\mu - c) - 5c^2\delta_{\mu,2})}{c(5c+22)}(a \mid b) \\ & - \frac{2(\mu d_\mu(c+6+8\mu) + 8c\delta_{\mu,2})}{c(5c+22)}(L(1)a \mid L(1)b) \\ & + \frac{4(\mu d_\mu(5\mu+1) + 5c\delta_{\mu,2})}{c(5c+22)}(a \mid \omega)(b \mid \omega).\end{aligned}$$

[9] λ_μ^s の作り方は基底の取り方に依存しないので (3.5) が成立する.

[10] $\mathrm{Aut}(V)$ を V の全自己同型群, $V^{\mathrm{Aut}(V)}$ を V の全自己合計群の固定部分空間とする. $V_m^{\mathrm{Aut}(V)} = (V_\omega)_m$ が $m \leq n$ に対して成立するとき V は $\mathcal{S}^n$ 級であるという.

ここで $\delta_{\mu,2} = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ である[11].

注意 4.2. μ が 2 より大きい場合は最小共形重みの定義から $V_2 = (V_\omega)_2$ となる. 今, 中心電荷は 0 でないので $(V_\omega)_2$ は $L(-2)\mathbf{1}$ で生成されている[12]. よって V_2 の元の V_μ 上でのトレースは μd_μ のスカラー倍となる. これが命題 4.1 で μ が $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ の場合しか考えない理由である.

講演では, これら跡公式を用いることで, 最小共形重み空間が共形 4-デザインである符号 SVOA (符号 SVOA については [Mi] を参照) の分類が得られたことを述べたが, その分類結果の紹介はしなかった. 次の章でその結果について述べる.

5 符号 SVOA と共形デザイン

そもそも, なぜ符号 SVOA の共形デザインを考えたのか理由を述べる. quadratic Casimir vector が V_ω に属している VOA が [Tu] で研究されていることは既に述べた. 本稿の主結果 (1) によって, そのような VOA の結果は共形デザインの言葉で書き換えることができる. 次が成立する.

定理 5.1 (cf. [Tu]). 最小共形重みが 1 で, その最小共形重み空間が共形 4-デザインである VOA は Deligne の例外型 Lie 代数 $A_1, A_2, G_2, D_4, F_4, E_6, E_7, E_8$ のいずれかから得られる単純レベル 1 アファイン VOA と同型である[13].

上の結果は, 定理 1.1 の Venkov 氏の結果のある種の類似とみなせる. この結果と, 最小ノルム 3 の超完璧格子の分類が Venkov 氏によって得られていることから, SVOA と共形デザインで次の問題が考えられる.

問題 2. 最小共形重みが $\frac{3}{2}$ で, その最小共形重み空間が共形 4-デザインである SVOA を分類せよ.

[TV] に, そのような SVOA の候補のリストがある. そのリストの中に格子型の VOA[14] $V^+_{\sqrt{2}E_8}$ のあるイジング元の commutant superalgebra[15] が存在する. その commutant superalgebra は長さ 15 のハミング符号 $\mathcal{H}_4$ から得られる符号 SVOA $V_{\mathcal{H}_4}$ と同型となることが知られている. この観点から符号 SVOA の共形デザインについて調べ, 実際に, $(V_{\mathcal{H}_4})_{\frac{3}{2}}$ が共形 4-デザインとなることを示した. 更に, 前章で述べた跡公式を応用することで, 最小共形重み空間が共形 4-デザインとなる符号 SVOA を分類することが出来た. ただしその分類を考えるときは最小共形重みを固定せずに行っている. 次がその分類結果である.

---

[11] この命題では双線形式 $(\cdot \mid \cdot)$ を $(\mathbf{1} \mid \mathbf{1}) = 1$ と正規化している.

[12] 2 次の Kac determinant formula の零点でないことから従う [KR].

[13] この主張の逆は [MMS] で示されている.

[14] L を偶格子とし, V_L を L の格子 VOA とする. L の元を -1 倍にする作用は L 上の直交変換となる. V_L^+ は, -1 倍写像の $\mathrm{Aut}(V_L)$ への持ち上げの固定部分空間である.

[15] commutant superalgebra については [Y1] を参照せよ.

定理 5.2 ([H]). 二元符号から得られる符号 SVOA の最小共形重み空間が共形 4-デザインであるための必要十分条件はその二元符号が次のいずれかの符号と同値:

$$\mathbb{F}_2,\quad \mathcal{E}_8,\quad \widehat{\mathcal{H}_3},\quad E(\mathcal{H}_4),\quad \mathcal{H}_4,\quad \widehat{\mathcal{H}_4}.$$

ここで, $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ であり, $\mathcal{E}_8$ は長さ 8 の偶符号語全体, $\mathcal{H}_m$ は長さ 2^m-1 のハミング符号, $E(\mathcal{H}_m)$ は $\mathcal{H}_m$ の偶部分符号, $\widehat{\mathcal{H}_m}$ は長さ 2^m の拡張ハミング符号である.

証明の概略を大雑把ではあるが述べる. 最小共形重み空間が共形 4-デザインでかつ σ 型のイジング元をもつとき, 跡公式から中心電荷と最小共形重み空間の次元に制限が加わる. 特に符号 SVOA の場合では, その制限から, それぞれの最小共形重みに対して符号の長さ求まる. また, 符号 SVOA の standard Ising frame に属する相異なる 2 つのイジング元を 2 次の跡公式に適用することで, 符号の最小重みの集合が組合せデザインとなること, かつそのパラメータが符号の長さと最小重みの集合のサイズ, 符号 SVOA の最小共形重みを用いて表せることが示せる. 最小共形重みごとに, 符号の最小重みの集合に入る組合せデザイン構造を考えることで定理 5.2 の必要条件が得られる. 十分条件はそれら SVOA が $\mathcal{S}^4$ 級となることを示すことで得られる[16].

注意 5.3. 二元符号 C に対して V_C をその符号 SVOA としたとき, $V_{\mathbb{F}_2}=L(\frac{1}{2},0)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ である[17]. これは明らかに $\mathcal{S}^\infty$ 級である. また, $V_{\mathcal{E}_8}, V_{\widehat{\mathcal{H}_3}}, V_{\widehat{\mathcal{H}_4}}$ は, それぞれ $V_{D_4}, V^+_{\sqrt{2}D_4}, V^+_{\sqrt{2}E_8}$ と VOA として同型であり, V_{D_4} は [MMS] で, $V^+_{\sqrt{2}D_4}$ と $V^+_{\sqrt{2}E_8}$ は [HS] で, それぞれ $\mathcal{S}^5,\mathcal{S}^5,\mathcal{S}^7$ 級となることが示されている. 本研究において, 新たに $V_{E(\mathcal{H}_4)}$ と $V_{\mathcal{H}_4}$ について, 最小共形重み空間が共形 4-デザインとなるだけでなく, それら SVOA が $\mathcal{S}^5$ 級となることを示した.

6 最後に

今回の研究で, 最小共形重み空間が共形 4-デザインとなる符号 SVOA の分類ができ, その中で最小共形重みが $\frac{3}{2}$ である共形 4-デザインの新たな例を与えることが出来た. しかし問題 2 の解決は具体例が多く得られていないことからも未だ道のりは遠い状況である. この SVOA のクラスにはベビーモンスター SVOA があるため, 他にも例があるかを探すことは重要だと思われる. まずは [TV] にある候補の最小共形重み空間が実際に共形 4-デザインとなるか確かめるべきだろう.

また, 主結果の (2) で, 新たに「整数格子と球面デザイン」で成立する主張の類似を「SVOA と共形デザイン」の理論で与えることが出来た. この他にも問題 1 が成立するような例を与えていきたいと筆者は考えている.

[16] quadratic Casimir vector は, その構成法から全自己合計群の作用で固定される. SVOA が $\mathcal{S}^n$ 級ならば, 主結果の (1) から共形 n-デザインとなる.

[17] $L(\frac{1}{2},0)$ は中心電荷 $\frac{1}{2}$ の単純 Virasoro VOA であり, $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ は最高ウェイトが $\frac{1}{2}$ の既約 $L(\frac{1}{2},0)$ 加群である.

Reference

[AM] E. F. Assmus, Jr., and H. F. Mattson, Jr., New 5-designs, *J. Combinatorial Theory.* **6** (1969), 122–151.

[H] T. Hashikawa, Conformal designs and minimal conformal weight spaces of vertex operator superalgebras, (to appear).

[HS] T. Hashikawa and H. Shimakura, Classification of the vertex operator algebras V_L^+ of class $\mathcal{S}^4$, *J. Algebra*, **456** (2016), 151–181.

[Hö] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.* **217** (2008), 2301–2355.

[KR] V.G. Kac and A. K. Raina, *Bombay lectures on highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras, Advanced Series in Mathematical Physics*, **2** World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1987.

[MMS] H. Maruoka, A. Matsuo, and H. Shimakura, Classification of vertex operator algebras of class $\mathcal{S}^4$ with minimal conformal weight one, arXiv:math.QA/1509.05529v1 (to appear).

[Ma] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Comm. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[Mi] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. Algebra.* **181** (1996), 207–222.

[Tu] M. P. Tuite, Exceptional vertex operator algebras and the Virasoro algebra, *Vertex operator algebras and related areas*, Contemp. Math. **497**, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2009, 213–225.

[TV] M. P. Tuite and H. D. Van, On Exceptional Vertex Operator (Super) Algebras, *Developments and retrospectives in Lie theory*, Dev. Math., Springer, Cham, 2014, 351–384.

[Ve] B. B. Venkov, Réseaux et designs sphériques, *Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires*, Monogr. Enseign., Math, **37**, Enseignement Math., Geneva, 2001, 10–86.

[Y1] H. Yamauchi, 2A-orbifold construction and the baby-monster vertex operator superalgebra, *J. Algebra.* **284**, (2005), 645–668

[Y2] H. Yamauchi, Extended Griess algebras and Matsuo–Norton trace formulae, *Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics.* Contributions in Mathematical and Computational Sciences **8**, 2014, 75–107.