数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 36-43

M_{12} の45次元表現について

熊本大学・自然科学研究科　千吉良直紀
Naoki Chigira
Department of Mathematical Sciences,
Kumamoto University

1 序

M_{12} には45次の既約表現がある。ここでは、この表現内に良い性質を持った M_{12} 不変な格子を構成する。また、それを用いて M_{12} 不変な可換代数構造の積を記述するということについて述べる。

本研究は千葉大学の北詰正顕氏との共同研究である。

2 M_{12}

まずはよく知られている M_{12} を生成する置換を構成する。$\mathbb{F}_{11}=\{0,1,\cdots,10\}$ を11元体とする。$\mathbb{F}_{11}$ から $\mathbb{F}_{11}$ への写像

$$
\begin{aligned}
a &: x \longmapsto x+1, \quad (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,0)\\
b &: x \longmapsto 4x, \qquad (1,4,5,9,3)(2,8,10,7,6)
\end{aligned}
$$

を考える。後ろに書いた置換は $\mathbb{F}_{11}$ の元の置換である。b の置換は左の置換が $\mathbb{F}_{11}$ の平方元の置換、右の置換は非平方元の置換である。

$$\langle a,b\rangle \cong 11:5$$

は位数55の Frobenius 群である。次に $\mathbb{F}_{11}$ の平方元と非平方元に対応付けをする。M_{11} を生成する元を作るためには $1\leftrightarrow 8$ または $1\leftrightarrow 7$ と対応付けすればよい。どちらでもよいので、$1\leftrightarrow 8$ を採用して話を進める。対応を考えて

$$b=(1,4,5,9,3)(8,10,7,6,2)$$

と思うことにする。この b の対応付けを使って位数20の Frobenius 群 $5:4$ を作りたい。$5:4\cong\langle(1,2,3,4,5),(2,3,5,4)\rangle$ であるから、今の場合は

$$c=(4,5,3,9)(10,7,2,6)$$

と取れば、

$$\langle b, c\rangle \cong 5:4$$

となる。このように a, b, c をとると

$$\langle a, b, c\rangle \cong M_{11}$$

となる。ちなみに

$$\langle a, b, c^2\rangle \cong L_2(11)$$

となる。次にもう 1 点 ∞ を付け加えて 12 点 $\mathbb{F}_{11} \cup \{\infty\}$ の置換群を考える。対応付けを用いて

$$e = (1,8)(4,10)(5,7)(9,6)(3,2)(0,\infty)$$

とおくと、

$$\langle a, b, c, e\rangle \cong M_{12}$$

となる。ちなみに

$$d : x \longmapsto -\frac{1}{x}, \qquad (1,10)(2,5)(3,7)(4,8)(6,9)(0,\infty)$$

は $\langle a, b, c, e\rangle$ の元で

$$\langle b, c, d\rangle \cong L_2(11)$$

は M_{12} の極大部分群となる。これは $\langle a, b, c^2\rangle \cong L_2(11)$ とは M_{12} の中で共役ではない。以下、M_{12} を 12 次の置換群として扱うがその際、$0, \infty$ は若干うっとうしいので 0 を 11, ∞ を 12 と思って話を進めることにする。置換を書き換えておくと

$$\begin{aligned}
a &= (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11) \\
b &= (1,4,5,9,3)(8,10,7,6,2) \\
c &= (4,5,3,9)(10,7,2,6) \\
d &= (1,10)(4,8)(5,2)(9,6)(3,7)(11,12) \\
e &= (1,8)(4,10)(5,7)(9,6)(3,2)(11,12)
\end{aligned}$$

である。

3 格子の構成

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間で

$$e_{j,i} = -e_{i,j}$$

という条件を満たす正規直交基底 $\{e_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq 11\}$ で生成されるものとする。$\dim V = \binom{11}{2} = 55$ である。

互いに相異なる i,j,k $(1\le i,j,k\le 11)$ に対して

$$T^{12}_{i,j,k}=e_{i,j}+e_{j,k}+e_{k,i}$$

とおき、これを thorn という。thorn という名前は [1] による。

$$W=\langle T^{12}_{i,j,k}\mid 1\le i,j,k\le 11,\ i\ne j\ne k\ne i\rangle$$

とおく。

$$T^{12}_{i,j,11}+T^{12}_{j,k,11}+T^{12}_{k,i,11}=T^{12}_{i,j,k},\qquad T^{12}_{j,i,k}=-T^{12}_{i,j,k}$$

となるので、

$$\{T^{12}_{i,j,11}\mid 1\le i<j<11\}$$

が W の基底となる。$\dim W=\binom{10}{2}=45$ である。

W には S_{11} が自然に作用する。S_{11} の部分群として、

$$H:=\langle a,b,c\rangle\cong M_{11}$$

を考える。$1\leftrightarrow 8$ の対応付けを使って

$$u=T^{12}_{1,8,11}+T^{12}_{4,10,11}+T^{12}_{5,7,11}+T^{12}_{9,6,11}+T^{12}_{3,2,11}$$

とおき、

$$\mathcal{U}=\{u^\sigma\mid\sigma\in H\}$$

とおく。$(u,u)=15$ である。ここで、内積は標準内積である。

Lemma 1. 次が成り立つ。

(1) $|\mathcal{U}|=396$.

(2) $\mathrm{Stab}_H(u)=\{\sigma\in H\mid u^\sigma=u\}=\langle b,c\rangle$.

□

$\mathcal{U}$ で生成された格子

$$L=\langle\mathcal{U}\rangle_{\mathbb{Z}}$$

を考える。

Theorem 1. 次が成り立つ。

(1) $\mathrm{rank}\, L=45$.

(2) $\mathrm{Aut}(L)\cong Z_2\times(M_{12}:2)$.

(3) L の theta series は

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sharp\{x \in L \mid (x,x) = m\} q^m = 1 + 792q^{15} + 990q^{16} + 15840q^{19} + 10890q^{20} + \cdots$$

□

$792 = 396 \times 2$ なので

$$L_{15} = \{x \in L \mid (x,x) = 15\} = \{\pm x \mid x \in \mathcal{U}\}$$

であることがわかる。以下、

$$A = \mathrm{Aut}(L), \qquad G = A' \cong M_{12}$$

とおく。H は自然に G に埋め込めるので G の部分群であると思ってよい。また、$\langle a,b,c,e\rangle \cong M_{12}$ の元で $[b,x] = 1 = [c,x]$ を満たす位数 2 の元は e のみである。したがって、H の G への埋め込みにより e に対応する G の元が唯 1 つ定まり、$\langle a,b,c,e\rangle$ と G の対応を作ることが出来る。以下、$\langle a,b,c,e\rangle$ と G を同一視して話を進めることにする。

Lemma 2. 次が成り立つ。

(1) $\mathrm{Stab}_G(u) \cong Z_2 \times S_5$.

(2) $Z(\mathrm{Stab}_G(u)) = \langle e\rangle$.

□

e は 2^6 型の置換であるが、M_{12} には 2^6 型の元が 396 個ある。$v \in \mathcal{U}$ に対して $Z(\mathrm{Stab}_G(v)) = \langle \sigma_v\rangle$ となる $\sigma_v \in G$ をとることが出来る。ここで、$\sigma_u = e$ である。この対応により $\mathcal{U}$ の元と G の 2^6 型の元を 1 対 1 に対応させることが出来る。次の命題で述べるように、内積と位数 2 の元の積との間には密接な関係がある。

Proposition 1. $v, w \in W$ と対応する 2^6 型の元 σ_v, σ_w に対して、内積 (v,w) の値と元の積 $\sigma_v\sigma_w$ との間には次のような関係がある。

(v,w)	-5	-3	-1	1	2	3	15
$\sigma_v\sigma_w$ の型	2^4	4^2, $4^2 2^2$	6^2	3^4	5^2	2^6	1^{12}

□

Remark 1. 上の表で $\sigma_v\sigma_w$ の型は 12 点の置換群としての M_{12} の元の型である。4^2 型と $4^2 2^2$ 型の元は $M_{12}:2$ では共役となる。 □

内積が負になるところでは、以下のような良い性質がある。

Lemma 3. $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$ とする。

(1) $(v_1, v_2) = -5$ のとき、

(i) ある $v_3, v_4 \in \mathcal{U}$ で $(v_i, v_j) = -5$ $(1 \le i \ne j \le 4)$ を満たすものが存在する。

(ii) $\sum_{j=1}^{4} v_j = 0$ となる。

(iii) $v_1^\tau = v_1$, $v_2^\tau = v_3$, $v_3^\tau = v_4$, $v_4^\tau = v_2$ を満たす位数 3 の元 $\tau \in G$ が存在する。

(2) $(v_1, v_2) = -3$ のとき、

(i) ある $v_3, v_4, v_5, v_6 \in \mathcal{U}$ で $(v_i, v_j) = -3$ $(1 \le i \ne j \le 6)$ を満たすものが存在する。

(ii) $\sum_{j=1}^{6} v_j = 0$ となる。

(iii) $v_1^\tau = v_1$, $v_2^\tau = v_3$, $v_3^\tau = v_4$, $v_4^\tau = v_5, v_5^\tau = v_6, v_6^\tau = v_2$ を満たす位数 5 の元 $\tau \in G$ が存在する。

(3) $(v_1, v_2) = -1$ のとき、

(i) 位数 11 の元 $\tau \in G$ があって $v_{k+1} = v_1^{\tau^k}$ $(2 \le k \le 10)$ とおくと、$(v_i, v_j) = -1$ $(1 \le i \ne j \le 11)$ を満たす。

(ii) $m = \sum_{j=1}^{11} v_j$ とおくと、$(m, m) = 55$ である。

(3) $\mathrm{Stab}_G(m) \cong L_2(11)$.

(4) $(v_1, v_2) = -3$ のとき、

(i) $(v_1, v_3) = -3$, $(v_2, v_3) = -5$ となる $v_3 \in \mathcal{U}$ が唯 1 つ存在する。

(ii) $(v_1, v_4) = -5$, $(v_2, v_4) = -3$ となる唯 1 つの元 $v_4 \in \mathcal{U}$ をとると、$(v_3, v_4) = -3$ である。

(iii) $s = \sum_{k=1}^{4} v_k$ とおく。$(s, s) = 16$ で、$\mathrm{Stab}_G(s) \cong 4^2 : D_{12}$ となる。

$\square$

Remark 2. Lemma 3 (3) で、$v_1 = u$ に対して τ として $\tau = a$ を取ることが出来る。このとき、$\mathrm{Stab}_G(m) = \langle a, b, d \rangle$ となる。 $\square$

Remark 3. $G \cong M_{12}$ の極大部分群で 45 次元のベクトル空間の 1 次元を固定するものは以下の 3 種類である。

極大部分群	$Z_2 \times S_5$	$L_2(11)$	$4^2 : D_{12}$
固定部分空間	$\langle u \rangle$	$\langle m \rangle$	$\langle s \rangle$
	$(v \in \mathcal{U})$	(Lemma 3 (3))	(Lemma 3 (4))

$\square$

Remark 4. Margolin[1] は 45 次の別の格子を thorn を用いて構成している。その自己同型群は $Z_2 \times M_{12}$ と書かれているが、実際には $Z_2 \times M_{12} : 2$ である。 $\square$

4　可換代数

M_{12} の 45 次の既約指標を χ とすると、

$$(S^2(\chi), 1_{M_{12}}) = 1, \quad (S^2(\chi), \chi) = 1, \quad (S^3(\chi), 1_{M_{12}}) = 1$$

となる。ここで、$S^k(\chi)$ $(k = 2, 3)$ は χ の k 次対称ベキの指標とする。これにより、M_{12} の 45 次既約空間には結合的内積を持つ可換非結合代数の構造がスカラー倍を除いて一意的に定まることがわかる。この積について和嶋氏 [2] は thorn の間の積を記述している。

我々は M_{12} の 45 次表現を格子から構成し、それにより M_{12} の 2^6 型の元と対応するベクトル $\mathcal{U}$ を得たので、これらの積を記述しておく。

$v, w \in \mathcal{U}$ に対して、$v^\tau = w, w^\tau = w$ となる $\tau \in M_{12}:2$ を考える。このとき、可換代数であることから

$$(v \cdot w)^\tau = v^\tau \cdot w^\tau = w \cdot v = v \cdot w$$

である。すなわち、積 $v \cdot w$ は τ の固有値 1 の固有空間に属するベクトルであることがわかる。特に $v = w$ の場合には $v \cdot v$ は v の固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(v)$ の固有値 1 の固有空間の共通部分に属する。$\tau \in A$ に対して τ の固有値 1 の固有空間を $W(\tau, 1)$ と書くことにする。

Lemma 4. $v \in \mathcal{U}$ に対して $\displaystyle\bigcap_{\tau \in \mathrm{Stab}_G(v)} W(\tau, 1) = \langle v \rangle$ である。

これより、$v \in \mathcal{U}$ に対して、$v \cdot v = \lambda v$ なる $\lambda \in \mathbb{Q}$ が存在する。また結合的内積であることから、$x, y, z \in W$ に対して $(x \cdot y, z) = (x, y \cdot z)$ となる。このことをうまく使うと W における積を記述することが出来る。u との積を考えることにする。$D = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$ とおく。記述が少々複雑になるが、結果だけ記しておく。

Proposition 2. $u, v \in \mathcal{U}$ とする。

(1) $(u, v) = -5$ のとき、

$$u \cdot v = -\frac{\lambda}{2}(u + v)$$

(2) $(u, v) = -3$ のとき、

$$u \cdot v = -\frac{\lambda}{4}(u + v + \sum_{x \in X} x)$$

ここで、$X = \{x \in \mathcal{U} \mid (x, \sum_{\sigma_y \in D} y) = -1, (x, u)(x, v) = -1\}$ とおく。

(3) $(u, v) = -1$ のとき、

$$\begin{aligned} u \cdot v = \frac{\lambda}{16}\{&2z - (u + v) + 5(w_1 + w_4) + (w_2 + w_3) \\ &+ 2t + 2m_1 - 2m_2 + 2(m_3 + m_4) - (m_5 + m_6)\} \end{aligned}$$

ここで、$\sigma_z = (\sigma_u\sigma_v)^3$, $\sigma_{w_j} = (\sigma_u\sigma_v)^j\sigma_u$ $(j = 0, \cdots, 5)$, $t \in \mathcal{U}$ は $\sigma_t \in \langle \sigma_{w_1}, \sigma_{w_2}, C_G(D)\rangle \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ で $\sigma_t \notin C_G(D)$, $\sigma_t \notin \{\sigma_{w_1}, \sigma_{w_2}\}$ である唯一の元、$m_1, \cdots, m_6$ は M_{12} の極大部分群である $L_2(11)$ で $C_G(D)$ を Sylow 2 群に持つもの（計 6 個）が固定するベクトルで、内積が

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
u	-1	3	-1	3	3	3
v	-1	3	3	-1	3	3
w_2	3	-1	3	3	-1	3
w_4	3	-1	3	3	3	-1

となるものとする。

(4) $(u, v) = 1$ のとき、

$$u \cdot v = \frac{\lambda}{8}\{2(u+v) + 5x + 8z_2 - (z + z_1) + 2(t_1 + t_2) - (y_1 + y_2)\}$$

ここで、$\sigma_x = \sigma_u^{\sigma_v}$, $C_G(D) = \langle \sigma_z, \sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}\rangle \cong Z_2 \times Z_2$ で $(u, z_2) = -5 = (v, z_2)$ となるようにとる。また、$\sigma_{t_1} = \sigma_x\sigma_z$, $\sigma_{t_2} = \sigma_x\sigma_{z_1}$, $(u_{z_2}, u_{y_i}) = -5$ かつ $\langle \sigma_x, \sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}\rangle \cong S_3$ で $\langle \sigma_x, \sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}\rangle \neq D$ を満たすようにとる。

(5) $(u, v) = 2$ のとき、

$$\begin{aligned} u \cdot v = \frac{\lambda}{24}\{&4(u+v) + 5(w_1 + w_3) + 11w_2 + 14z - 5t - 2(t_1 + t_1') + 2(t_2 + t_2') \\ &- 3(x_1 + x_2) - 6(y_1 + y_2)\} \end{aligned}$$

ここで、$\sigma_{w_j} = (\sigma_u\sigma_v)^j\sigma_u$ $(j = 0, \cdots, 4)$, $C_G(D) = \langle \sigma_z\rangle$, $t (= t_4)$ は $(z, t) = -5 = (w_2, t)$ かつ $(u, t) = 2 = (v, t)$ を満たすものとし、$\sigma_{t_j} = (\sigma_u\sigma_t)^j\sigma_u$ $(j = 0, \cdots, 4)$, $\sigma_{t_j'} = \sigma_{t_j}^{\sigma_{w_2}}$, さらに x_j $(j = 1, 2)$ は $(z, x_j) = 3$ かつ $(u, x_j) = -3 = (v, x_j)$ を満たし、y_j $(j = 1, 2)$ は $(z, y_j) = 3$ かつ $(u, y_j) = -1 = (v, y_j)$ を満たすものとする。

(6) $(u, v) = 3$ のとき、

$$u \cdot v = \frac{\lambda}{6}\{2(u + v + w) - \sum_{\substack{x \in \mathcal{U} \\ \sigma_x \in C_G(D)}} x\}$$

ここで、$\sigma_w = \sigma_u\sigma_v$ とする。

□

5　最後に

M_{12} の 45 次の既約表現には最小ノルムのベクトルが M_{12} の 2^6 型の元と対応するような格子が存在することがわかった。これにより格子の自己同型という形で M_{12} の表現が記述でき、これを用いて 45 次に可換代数構造の積を記述することが出来る。最終的にはこの可換代数の自己同型群を決めたい。

また、M_{12} に限らず、他の単純群でも既約表現に良い性質を持った格子を構成することが出来るのではないか、それを用いて表現空間に単純群特有の良い性質（例えば可換代数構造のような）を見つけることが出来るのではないかという期待をしている。

参考文献

[1] R. Margolin, Representation of M_{12}, J. Algebra **156** (1993) 362–369.

[2] 和嶋雅幸, 非結合的多元環とその自己同型群, 第 30 回代数学シンポジウム報告集, (1984) 143–155.