数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 112-118

Modular adjacency algebras and standard representations of wreath products of complete graphs *

信州大学 理学部 数理・自然情報科学科 花木 章秀 †
Akihide Hanaki
Faculty of Science, Shinshu University
長崎大学 教育学部 島袋 修 ‡
Osamu Shimabukuro
Faculty of Education, Nagasaki University

1 はじめに

アソシエーションスキームの隣接代数は任意の体上で定義できるが, 主に標数0の体上で考えられてきた. このとき, 隣接代数は半単純である [1]. しかし, 正標数の体上では半単純とは限らず, これまであまり研究されこなかった. 花木氏と吉川氏によってクラス2のアソシエーションスキームの正標数の体上での隣接代数 (モジュラー隣接代数) とその標準加群 (モジュラー標準加群) の構造が考えられた [3]. それ以前にも隣接行列から得られる行列を正標数の体上で階数を考える試みは成されてきていた [2, 5] が, 先の両氏の論文で初めて正標数の体上で階数を考えることとモジュラー標準加群の構造との関係性が明らかになった. また, モジュラー標準加群の構造を考えることで強正則グラフのパラメーターよりも詳細な分類が得られることもわかった. つまり, これらの結果はアソシエーションスキームから得られるモジュラー標準加群の構造によって, そのアソシエーション

* 本研究は科研費 (課題番号:25400011) の助成を受けたものである.
† 〒390-8621 松本市旭 3-1-1,hanaki@shinshu-u.ac.jp
‡ 〒852-8131 長崎市文教町1－1 4 , shimabukuro@nagasaki-u.ac.jp

スキームの組合せ論的な特徴付けが可能であることを示唆している．しかし，一般に，その代数構造が複雑なため標準加群の構造を決定することは難しく，効果的な構造の決定方法が必要である．本稿では，最も単純なアソシエーションスキームである完全グラフ（1 クラスアソシエーションスキーム）のリース積のモジュラー隣接代数の構造と標準加群の直既約直和分解を与える．残念ながら，この結果は，先に述べた組合せ論的な特徴付けには寄与しないが，この標準加群に関する結果は，あるアソシエーションスキームの無限系列に対して決定できた初めての例であり，この手法は他のアソシエーションスキームのモジュラー標準加群の構造の決定に役立つと思われる．

2 モジュラー隣接代数と標準加群

X を n 個の元から成る有限集合，R_i $(i=0,\dots,d)$ を X 上の空でない二項関係とする．各 R_i に対して，行と列を X によってインデックス付けされた n 次正方行列 A_i を次のように定める．

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y)\in R_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

これを R_i の隣接行列とよぶ．$S := \{R_i\}_{0\le i\le d}$ として，(X,S) が対称なアソシエーションスキームであるとは次の 4 条件を満たすときとする．

(1) A_0 は単位行列である，

(2) $\displaystyle\sum_{i=0..d} A_i = J$ (J は全成分が 1 の n 次正方行列)，

(3) 任意の $i\in\{0,\dots,d\}$ に対して ${}^tA_i = A_i$ (${}^tA_i$ は A_i の転置行列)，

(4) 任意の $f,g,h\in\{0,1,\dots,d\}$ に対して，ある非負整数 $p^h_{f,g}$ が存在して，

$$A_fA_g = \sum_{0\le h\le d} p^h_{f,g}A_h.$$

が成り立つ．

このとき，隣接行列の条件から，

$$\mathbb{Z}S := \oplus_{i=0,\dots,d}\mathbb{Z}A_i$$

は $\mathbb{Z}$ 多元環である.

そこで, R を乗法単位元を持つ任意の可換環とすると, $\mathbb{Z}$ 上のテンソル積

$$RS := R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S$$

を考えることができる. 特に, この RS を R 多元環と考えるこができ, RS を R 上 (X, S) の隣接代数とよぶ. ここでは, 正標数 p の体 F 上の隣接代数をモジュラー隣接代数とよぶ.

また, FX を X を基底とする F 線形空間とする. FS は $Mat_X(F)$ の部分代数なので, FX を右 FS 加群としてみることができる. この FX をモジュラー標準加群とよぶ. 対応する表現は

$$FS \to Mat_X(F), (A_i \mapsto A_i)$$

である. これを F 上 (X, S) の標準表現とよぶ.

3 完全グラフのリース積

本稿では完全グラフ (1 クラスアソシエーションスキーム) のリース積に対して FS と FX の構造を決定する.

$\lambda = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $(q_i \geq 2)$ として, q_i 個の頂点を持つ完全グラフを K_{q_i} とする. $K_{q_1} \wr K_{q_2} \wr \cdots \wr K_{q_n}$ によって定義されるアソシエーションスキームを (X, S) で表す.

(X, S) の隣接行列は, 次のように定義できる. まず,

$$A_0^{\lambda_1} = E_{q_1}, \quad A_1^{\lambda_1} = J_{q_1} - E_{q_1}$$

とする. ただし, λ_1 は λ の部分列で $\lambda_1 = (q_1)$ とする. また, E_q を q 次の単位行列, J_q を q 次の正方行列で全成分が 1 の行列とする.

隣接行列 $\{A_i^\lambda\}_{i=0}^n$ は, 以下のように定義できる.

$$A_i^\lambda = \begin{cases} A_i^{\lambda_{n-1}} \otimes E_{q_n}, & i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ J_{\prod_{t=1}^{n-1} q_t} \otimes (J_{q_n} - E_{q_n}), & i = n, \end{cases}$$

ただし, λ_{n-1} は, λ の部分列 $\lambda_{n-1} = (q_1, q_2, \cdots, q_{n-1})$ とする.

隣接行列 $\{A_i^\lambda\}_{i=0}^n$ は, モジュラー隣接代数 FS の基底の一つであるが, ここで, 次のように基底の変換を行う.

$$D_i^\lambda = \sum_{t=0}^{i} A_t^\lambda, \quad i = 0, \ldots, n$$

これは，次のようにも表すことができる．

$$D_0^{\lambda_1} = E_{q_1} \quad D_1^{\lambda_1} = J_{q_1}$$

とすることで，

$$D_i^{\lambda} = \begin{cases} D_i^{\lambda_{n-1}} \otimes E_{q_n}, & i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ D_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \otimes J_{q_n}, & i = n. \end{cases}$$

まず，FS の構造について考える．FS を単純因子の直和に分解した時の因子の個数は，

$$l = \sharp \mathrm{IBr}(FS) = \sharp \left\{ i \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid p \nmid \prod_{t=0}^{i} q_t \right\}$$

である．ただし，$q_0 = 1$ とする．

もし，l が $n+1$ と一致するならば FS は半単純であり，$n+1$ 個の F の直和と同型である．$l < n+1$ として構造を考えると，次の定理が得られる．

Theorem 1. $r = n - l + 1$ とする．

$$FS \cong F[x_1, \cdots, x_r]/(x_i x_j \mid 1 \leq i, j \leq r) \oplus \overbrace{F \oplus \cdots \oplus F}^{l-1},$$

初めの因子が主ブロック [4] に対応している．

簡単に説明しておくと，FS は，完全グラフ $K_{q_1}, \ldots, K_{q_n}$ から得られる行列のテンソル積で与えられるので，FX も同様に

$$FX = FX^{(q_1)} \otimes \cdots \otimes FX^{(q_n)}$$

とかける．ただし，$FX^{(q_i)}$ は K_{q_i} のモジュラー標準加群とする．そこで，各 $FX^{(q_i)}$ について $\{e_j\}_{j=1}^{q_i}$ を標準基底として，次のように基底の変換を行う．

- $p \mid q_i$ のとき，

$$v_0 = e_1, \quad v_1 = \sum_{j=1}^{q_i} e_j,$$
$$v_k = e_k - e_1 \quad (k = 2, 3, \cdots, q_i - 1).$$

- $p \nmid q_i$ のとき，

$$w_1 = \sum_{j=1}^{q_i} e_j,$$
$$w_k = e_k - e_1 \quad (k = 2, 3, \cdots, q_i).$$

すると $FX^{(q_i)}$ への $D_1^{(q_i)} = J_{q_i}$ の作用は

- $p \mid q_i$ のとき,

$$v_k J_{q_i} = \begin{cases} v_1 & \text{for } k = 0, \\ 0 & \text{for } k \neq 0. \end{cases}$$

- $p \nmid q_i$ のとき,

$$w_k J_{q_i} = \begin{cases} q_i w_1 & \text{for } k = 1, \\ 0 & \text{for } k \neq 1. \end{cases}$$

である. この基底に対する D_i の標準形は,

$$G_i = \underbrace{L_{q_1} \otimes \cdots \otimes L_{q_i}}_{i} \otimes E_{q_{i+1}} \otimes \cdots \otimes E_{q_n}$$

となる. ただし,

$$L_{q_i} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & \text{if } p \mid q_i; \\ \begin{pmatrix} q_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & \text{if } p \nmid q_i, \end{cases}$$

$(0 \leq i \leq n)$ である. この G_i たちを用いて FS の構造を考えることで先の構造定理が得られる.

次に, モジュラー標準加群 FX の構造について考える. そのために, まず,

$$U_i = \begin{cases} Fv_0 \oplus Fv_1 & \text{if } p \mid q_i, \\ Fw_1 & \text{if } p \nmid q_i. \end{cases}$$

として, 右 FS 加群 V_i を次のように定める.

$$V_i = U_1 \otimes \cdots \otimes U_i (i = 1, 2, \cdots, n).$$

D_k の作用は $1 \leq k \leq i$ に対して,

$$L'_{q_1} \otimes \cdots \otimes L'_{q_k} \otimes E'_{q_{k+1}} \otimes \cdots \otimes E'_{q_i}$$

である. ただし,

$$L'_{q_i} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } p \mid q_i, \\ \begin{pmatrix} q_i \end{pmatrix} & \text{if } p \nmid q_i, \end{cases}$$

$$E'_{q_i} = \begin{cases} E_2 & \text{if } p \mid q_i, \\ E_1 & \text{if } p \nmid q_i. \end{cases}$$

また, $i < k \leq n$ に対して 0 である. 更に, 1 次元の右 FS 加群で $D_0 = E_{|X|}$ を除く D_k の作用で 0 になるものを V_0 とする. 作用を考えることで $V_0, \cdots, V_n$ は, 互いに非同型であることがわかる. また, それぞれの自己準同型環を考えることで直既約であることが証明でき, 次元については, 次が得られる.

Proposition 2. V_i の F 上次元は,$2^{d(i)}$ である. ただし,

$$d(i) = \sharp\{k \mid 1 \leq k \leq i,\ p \mid q_k\}$$

とし, $d(0) = 0$ とする.

また, $j_{i+1} \notin \{0, 1\}, j_{i+2}, \cdots, j_n$ のとき, その作用が等しいことから

$$V_i \cong U_1 \otimes \cdots \otimes U_i \otimes x_{j_{i+1}} \otimes \cdots \otimes x_{j_n}$$

である. ただし, $x_k \in \{v_k, w_k\}$ である.

特に FX は上同型右辺の直和でかけることから, FX の直既約直和分解は次のようにかける.

Theorem 3.

$$FX \cong \bigoplus_{i=0}^{n} m_i V_i$$

ただし, $i = 0, \cdots, n-1$ に対して,

$$m_i = \begin{cases} (q_{i+1} - 2) \prod_{k=i+2}^{n} q_k, & \textit{if } p \mid q_{i+1} \\ (q_{i+1} - 1) \prod_{k=i+2}^{n} q_k, & \textit{if } p \nmid q_{i+1} \end{cases}$$

但し, $m_n = 1$.

最後に例として $K2 \wr K3$ のモジュラー標準加群を与えておく.

(1) $Char F = 2$ のとき, $FX \cong 0V_0 \oplus 2V_1 \oplus 1V_2$.

(2) $Char F = 3$ のとき, $FX \cong 3V_0 \oplus 1V_1 \oplus 1V_2$.

(3) $Char F \neq 2, 3$ のとき半単純で, $FX \cong 3V_0 \oplus 2V_1 \oplus 1V_2$.

参考文献

[1] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics. I. Association Schemes, Benjamin-Cummings, Menlo Park, CA, (1984).

[2] A.E. Brouwer and C.A. van Eijl, On the p-rank of the adjacency matrices of strongly regular graphs, Journal of Algebraic Combinatorics, 1, 329-346, (1992).

[3] A.Hanaki and M.Yoshikawa, On modular standard modules of association schemes, Journal of Algebraic Combinatorics, 21(3), 269-279, (2005).

[4] H. Nagao, Y. Tsushima, Representations of Finite Groups, Academic Press, San Diego, CA, 1989

[5] R. Peeters, On the p-ranks of the adjacency matrices of distance-regular graphs, Journal of Algebraic Combinatorics, 15, 127-149, (2002).