数理解析研究所講究録
第2005巻 2016年 145-148

三次元有限要素法に対する事前誤差評価について

小林 健太
KENTA KOBAYASHI
一橋大学商学研究科
GRADUATE SCHOOL OF COMMERCE AND MANAGEMENT, HITOTSUBASHI UNIVERSITY*
土屋 卓也
TAKUYA TSUCHIYA
愛媛大学理学部数学科
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, EHIME UNIVERSITY†

1 ポアソン方程式

$f\in L^2(\Omega)$ に対し，u を以下のポアソン方程式の弱解とする．

$$\begin{cases} -\Delta u=f & \text{in} \quad \Omega, \\ u=0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^3$ の非凸な多角形領域とする．このとき，弱解 u は $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ の滑らかさを持つ．この方程式の有限要素解に対する H_0^1 および L^2 ノルムについての事前誤差評価を求めたい．そのため，次の補間誤差定数を用いる．

2 補間誤差定数

四面体 T と $u\in H^2(T)$ を考える．T の4つの頂点で u と値が一致し，T 上で一次関数となるような関数を $\Pi_T u$ で表す．このとき，三角形 T と $u\in H^2(T)$ について

$$\|\nabla(\Pi_T u-u)\|_{L^2(T)}\le C_T|u|_{H^2(T)}$$

なる評価が成り立つことが知られている．ここで C_T は T のみに依存する（u とは関係ない）定数である．この C_T を補間誤差定数という．

$\Pi_T u$ は一つの四面体 T の上での話であったが，応用上は，これを分割を構成する全ての四面体上で接続したものが用いられる．Ω の有限要素分割を構成する四面体要素を $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m$ とし，$u\in H^2(\Omega)$ に対し，各 τ_k 上で定義される $\Pi_{\tau_k}u$ を接続して Ω 全体を定義域にしたものを Πu とする．このとき，Πu は Ω 全体で連続になる．Πu を u の $\mathcal{P}_1$ 補間，もしくは区分線形補間，区分一次補間などと呼ぶ．

*kenta.k@r.hit-u.ac.jp
†tsuchiya.takuya.mb@ehime-u.ac.jp

3 事前誤差評価

ポアソン方程式 (1.1) の有限要素解を u_h とする．また，有限要素基底で張られる空間を S_h とする．このとき，u は $\partial\Omega$ で零になるので，Πu も $\partial\Omega$ で零になる．よって，$\Pi u \in S_h$ が成り立つ．ここで，有限要素解 u_h の構成法を思い出すと，u_h は S_h の元のなかで H_0^1 誤差 $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}$ を最小にするものであった．よって

$$\|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\Pi u - u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

が成り立つ．さて，補間誤差定数の定義を用いると

$$\begin{aligned}\|\Pi u - u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|\nabla(u - \Pi u)\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_k \|\nabla(u-\Pi u)\|^2_{L^2(\tau_k)}} \leq \sqrt{\sum_k C^2_{\tau_k} |u|^2_{H^2(\tau_k)}} \\ &\leq \max_k C_{\tau_k} \sqrt{\sum_k |u|^2_{H^2(\tau_k)}} = \max_k C_{\tau_k} |u|_{H^2(\Omega)}\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，多角形領域 Ω においては

$$|u|_{H^2(\Omega)} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つことが知られているので，最終的に

$$\|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \max_k C_{\tau_k} |u|_{H^2(\Omega)} = \max_k C_{\tau_k} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = \max_k C_{\tau_k} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ．L^2 誤差については，Aubin-Nitsche の技巧を用いることにより

$$\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\max_k C_{\tau_k}\right)^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

が得られる．

f は与えられている関数なので，この定理は，有限要素法による誤差の上界が，実際に数値計算を実行する前から見積もれることを意味している．このようなタイプの誤差評価を事前誤差評価という．

4 補間誤差定数の評価

以上により，3 次元有限要素法の誤差評価が補間誤差定数 C_T の評価から得られることがわかった．著者らは，与えられた四面体 T に対する補間誤差定数の精密評価について研究を行っているが，今のところ任意の四面体について通用するような評価方法は見つかっていない．しかし，著者らによってある程度の粗い評価は得られているのでそれを紹介する．

四面体 T の頂点の座標を $p_1, \cdots, p_4$ とする．また，λ_k を，p_k で 1，他の頂点で 0 となるような線形関数とする．λ_k は体積座標と呼ばれる．さらに，T の直径（最大辺の長さ）を $d(T)$，内接円の直径を $\rho(T)$ とする．以下，$dxdydz$ を dV と書く．

二階微分可能なスカラー関数 u と

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

に対してヘシアン行列を

$$Hu(w)=\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{pmatrix}$$

と定義する．このとき，一般化された Taylor 展開

$$u(p_k)=u(w)+\nabla u(w)(p_k-w)+\int_0^1 s(p_k-w)^T Hu(p_k+s(w-p_k))(p_k-w)ds$$

が成り立つ．また，体積座標については

$$\sum_{k=1}^4 \lambda_k(w)=1, \qquad \sum_{k=1}^4 \lambda_k(w)(p_k-w)=0$$

が成り立つ．

以下，$\lambda_k(w)$ は λ_k と略記する．さて，

$$\Pi_T u=\sum_{k=1}^4 \lambda_k u(p_k)$$

であることと，上の体積座標の性質を用いると

$$u-\Pi_T u=-\sum_{k=1}^4 \lambda_k \int_0^1 s(p_k-w)^T Hu(p_k+s(w-p_k))(p_k-w)ds$$

となるので

$$(u-\Pi_T u)_x=-\sum_{k=1}^4 (\lambda_k)_x \int_0^1 s(p_k-w)^T Hu(p_k+s(w-p_k))(p_k-w)ds$$

が成り立つ．これを T 上で積分すると

$$\begin{aligned}
\iiint_T (u-\Pi_T u)_x dV &= -\iiint_T (\lambda_k)_x \sum_{k=1}^4 \int_0^1 s(p_k-w)^T Hu(p_k+s(w-p_k))(p_k-w)dsdV \\
&= -\iiint_T \sum_{k=1}^4 (\lambda_k)_x \int_0^1 1_{p_k+(w-p_k)/s\in T}\; s^{-4}(p_k-w)^T Hu(w)(p_k-w)dsdV \\
&= -\iiint_T \sum_{k=1}^4 (\lambda_k)_x \left(\int_0^1 1_{p_k+(w-p_k)/s\in T}\; s^{-4}ds\right)(p_k-w)^T Hu(w)(p_k-w)dV \\
&= -\iiint_T \sum_{k=1}^4 (\lambda_k)_x \left(\int_{1-\lambda_k}^1 s^{-4}ds\right)(p_k-w)^T Hu(w)(p_k-w)dV \\
&= -\frac{1}{3}\iiint_T \sum_{k=1}^4 (\lambda_k)_x \left(\frac{1}{(1-\lambda_k)^3}-1\right)(p_k-w)^T Hu(w)(p_k-w)dV
\end{aligned}$$

となる．ここで $(p_k-w)^T Hu(w)(p_k-w)$ を展開して Schwarz の不等式で評価することにより

$$|(p_k-w)^T Hu(w)(p_k-w)| \le |p_k-w|^2\sqrt{|u_{xx}|^2+|u_{yy}|^2+|u_{zz}|^2+2|u_{xy}|^2+2|u_{yz}|^2+2|u_{zx}|^2}$$

が成り立つので

$$\left|\iiint_T (u-\Pi_T u)_x dV\right| \le \frac{1}{3}\left|\iiint_T \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{\rho(T)}\left(\frac{1}{(1-\lambda_k)^3}-1\right)d(T)^2(1-\lambda_k)^2\right.$$
$$\left.\times\sqrt{|u_{xx}|^2+|u_{yy}|^2+|u_{zz}|^2+2|u_{xy}|^2+2|u_{yz}|^2+2|u_{zx}|^2}dV\right|$$
$$=\frac{d(T)^2}{3\rho(T)}\left|\iiint_T \sum_{k=1}^{4}\frac{(3-3\lambda_k+\lambda_k^2)\lambda_k}{1-\lambda_k}\sqrt{|u_{xx}|^2+|u_{yy}|^2+|u_{zz}|^2+2|u_{xy}|^2+2|u_{yz}|^2+2|u_{zx}|^2}dV\right|$$
$$\le \frac{d(T)^2}{3\rho(T)}|u|_{H^2(T)}\sqrt{\iiint_T\left(\sum_{k=1}^{4}\frac{(3-3\lambda_k+\lambda_k^2)\lambda_k}{1-\lambda_k}\right)^2 dV}$$

が成り立つ．ここで，若干の計算を行うと

$$\iiint_T\left(\sum_{k=1}^{4}\frac{(3-3\lambda_k+\lambda_k^2)\lambda_k}{1-\lambda_k}\right)^2 dV = \frac{3(1549-140\pi^2)}{35}|T|$$

であることがわかるので

$$\left|\iiint_T (u-\Pi_T u)_x dV\right| \le \frac{d(T)^2}{\rho(T)}\sqrt{\frac{1549-140\pi^2}{105}|T|}\,|u|_{H^2(T)}$$

が成り立つ．ここで，平均零関数に対する Poincaré 不等式を用いると

$$\|(u-\Pi_T u)_x\|^2_{L^2(T)} = \left\|(u-\Pi_T u)_x - \frac{1}{|T|}\iiint_T (u-\Pi_T u)_x dV\right\|^2_{L^2(T)} + \left\|\frac{1}{|T|}\iiint_T (u-\Pi_T u)_x dV\right\|^2_{L^2(T)}$$
$$\le \frac{d(T)^2}{\pi^2}\|\nabla(u-\Pi_T u)_x\|^2_{L^2(T)} + \frac{d(T)^4}{\rho(T)^2}\cdot\frac{1549-140\pi^2}{105}|u|^2_{H^2(T)}$$
$$= \frac{d(T)^2}{\pi^2}\|\nabla u_x\|^2_{L^2(T)} + \frac{d(T)^4}{\rho(T)^2}\cdot\frac{1549-140\pi^2}{105}|u|^2_{H^2(T)}$$

となる．ここで $\sqrt{6}\rho(T) \le d(T)$（等号は T が正四面体のとき）より

$$\|(u-\Pi_T u)_x\|^2_{L^2(T)} \le \frac{d(T)^4}{6\pi^2\rho(T)^2}\|\nabla u_x\|^2_{L^2(T)} + \frac{d(T)^4}{\rho(T)^2}\cdot\frac{1549-140\pi^2}{105}|u|^2_{H^2(T)}$$
$$\le \frac{d(T)^4}{\rho(T)^2}\left(\frac{1}{6\pi^2}\|\nabla u_x\|^2_{L^2(T)} + \frac{1549-140\pi^2}{105}|u|^2_{H^2(T)}\right)$$

同様の評価が $\|(u-\Pi_T u)_y\|^2_{L^2(T)}$ と $\|(u-\Pi_T u)_z\|^2_{L^2(T)}$ についても成り立つので，足し合わせると

$$\|\nabla(u-\Pi_T u)\|^2_{L^2(T)} \le \frac{d(T)^4}{\rho(T)^2}\left(\frac{1}{6\pi^2}+\frac{1549-140\pi^2}{35}\right)|u|^2_{H^2(T)} \le \frac{2.19^2 d(T)^4}{\rho(T)^2}|u|^2_{H^2(T)}$$

となり，最終的に以下の評価が得られる．

$$\|\nabla(u-\Pi_T u)\|_{L^2(T)} \le \frac{2.19\,d(T)^2}{\rho(T)}|u|_{H^2(T)}.$$

5 まとめ

有限要素解の事前誤差評価には補間誤差定数の評価が本質的な役割を果たす．特に，3 次元有限要素法の誤差評価には四面体要素に対する補間誤差定数の評価が重要である．この定数の精密評価については現在研究中であるが，ひとまず粗い評価が得られたので報告させて頂いた．