数理解析研究所講究録
第2005巻 2016年 149-160

射影とその構成的誤差評価

—有限と無限を繋ぐもの—

渡部 善隆 (Yoshitaka Watanabe)

九州大学 情報基盤研究開発センター
Research Institute for Information Technology, Kyushu University

概要

本稿では，非線形関数方程式に対する精度保証付き数値計算において重要な役割を果たす Hilbert 空間の射影とその構成的誤差評価に着目し，誤差評価定数算定の現状を概観しながら，10 年後に解決して欲しい課題にも触れます．

1 関数方程式と不動点定式化

$\hat{X}$ を Banach 空間，X, Y を Hilbert 空間とし，埋め込みを含めた包含関係: $\hat{X} \hookrightarrow X \hookrightarrow Y$ が成り立つとします．また，埋め込み $\hat{X} \hookrightarrow X$ のコンパクト性を仮定します．以降，X, Y の内積を $(u,v)_X$, $(u,v)_Y$，内積から導かれるノルムを $\|u\|_X = \sqrt{(u,u)_X}$, $\|u\|_Y = \sqrt{(u,u)_Y}$ で表記します．

次に，線形作用素 $\mathcal{A} : \hat{X} \to Y$ と（一般に非線形）作用素 $f : X \to Y$ を定めます．作用素 f は連続であり，X の有界集合を Y の有界集合に移すとします．f の微分可能性は必ずしも仮定しません．

以上の準備のもと，方程式:

$$\mathcal{A}u = f(u) \tag{1}$$

の解 u を求める問題を考えます．非線形微分方程式の場合，式 (1) の $\mathcal{A}$ は最高階数の微分を含む線形作用素，f はそれ以外の非線形項に対応します．

任意の $\phi \in Y$ に対し，$\mathcal{A}\psi = \phi$ は一意の解 $\psi \in \hat{X}$ を持つと仮定し，この対応関係を $\mathcal{A}^{-1} : Y \to \hat{X}$ で表記します．また，作用素 $\mathcal{A}^{-1}$ に連続性を仮定します．次に，埋め込み作用素 $I_{\hat{X}\hookrightarrow X}$ と $\mathcal{A}^{-1}$ との合成写像: $I_{\hat{X}\hookrightarrow X} \circ \mathcal{A}^{-1} : Y \to X$ を改めて $\mathcal{A}^{-1} : Y \to X$ と置き直します．この時，$\mathcal{A}^{-1}$ と f の合成写像を

$$F := \mathcal{A}^{-1} \circ f : \quad X \to X \tag{2}$$

と定義すると，方程式 (1) は X 上の不動点問題:

$$u = F(u) \tag{3}$$

に書き直すことができます．その作り方より，F はコンパクト作用素です．対応関係は次の通りです．

$$F : \begin{cases} X & \xrightarrow[\text{連続・有界}]{f} & Y & \xrightarrow[\text{コンパクト}]{\mathcal{A}^{-1}} & X \\ u & \mapsto & f(u) & \mapsto & \mathcal{A}^{-1} \circ f(u) \end{cases}$$

したがって，Schauder の不動点定理より，空でない有界凸閉集合 $U \subset X$ に対する包含関係:

$$F(U) \subset U \tag{4}$$

を確認することができれば，U の中に F の不動点の存在を，すなわち式 (1) の解の存在を保証することができます．U のように，解を包含することが期待される集合（有界凸閉集合）を，“候補者集合” と呼ぶことにします．

2 有限次元部分空間と直交射影

作用素 $\mathcal{A}$ に対し，

$$(u,v)_X = (\mathcal{A}u, v)_Y, \qquad \forall u \in \hat{X}, \quad \forall v \in X \tag{5}$$

の成立を仮定します．次に，X の有限次元部分空間を X_h，X の内積に対する直交射影 $P_h : X \to X_h$ を

$$(u - P_h u, v_h)_X = 0, \qquad \forall v_h \in X_h \tag{6}$$

で定義し，さらに，直交射影 P_h に対し，h に依存する**具体的な数値が算定可能**な $C(h) > 0$ が存在し

$$\|(I - P_h)v\|_X \le C(h)\|\mathcal{A}v\|_Y, \quad \forall v \in \hat{X} \tag{7}$$

を満たすことを仮定します．I は恒等写像，h は $h \to 0$ ならば $X_h \to X$ が期待されるパラメータです．また，“$C(h)$” はオーダーが h という意味ではないことに注意してください．

ここで，$v \in \hat{X}$ に対して $\phi = \mathcal{A}v$ とすれば，直交射影 P_h の定義 (6) と式 (5) より

$$(P_h v, v_h)_X = (\phi, v_h)_Y, \qquad \forall v_h \in X_h \tag{8}$$

となります．したがって式 (7) は，$\phi \in Y$ が与えられたとき，方程式 $\mathcal{A}v = \phi$ の解 $v \in \hat{X}$ の X_h における近似解が，射影を用いた式 (8) により計算可能であり，かつ，v と $P_h v$ の誤差評価が

$$\|v - P_h v\|_X \le C(h)\|\phi\|_Y$$

で与えられることを意味します．また，$C(h)$ は，存在を示すだけでは不十分で，具体的な値を算定することが必要となります．本稿の主役をつとめるこの $C(h)$ の見積もりを，“構成的誤差評価” と呼びます．

3 射影と射影誤差に基づく解の検証

式 (6) で定義される直交射影 P_h を用いることで，X の不動点方程式 $u = F(u)$ を，有限次元 X_h 部分と無限次元の誤差に対応する $X_h^\perp$ 部分に

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_h u &=& P_h F(u), \\ (I - P_h)u &=& (I - P_h)F(u) \end{array} \right. \tag{9}$$

と一意に分解することができます（次節参照）．$X_h^\perp$ は内積 $(\cdot,\cdot)_X$ に対する X_h の直交補空間です．分解された有限次元および無限次元部分それぞれについて候補者集合を設定し，F を作用させた後の包含関係を調べます．まず，問題 (1) の近似解を $u_h \in X_h$ とします．解を X で探すため，必ずしも $u_h \in \hat{X}$ である必要はありません．具体的には，$\mathcal{A}$ に対する条件 (5) を用いて

$$(u_h, v_h)_X = (f(u_h), v_h)_Y, \quad \forall v_h \in X_h \tag{10}$$

を満たす u_h を（ここでは）近似的に計算します．次に，有界凸閉集合となる候補者集合 $U \subset X$ を

$$U = u_h + U_h + U_*, \quad U_h \subset X_h, \quad U_* \subset X_h^\perp \tag{11}$$

と選びます．U_h, U_* は近似解 u_h と真の解の差を包含することが期待される集合です．このとき，式 (11) で定めた候補者集合 U に対し，$F(U) \subset U$ が成立するための十分条件は

$$\begin{cases} P_h F(U) - u_h & \subset & U_h, \\ (I - P_h)F(U) & \subset & U_* \end{cases} \tag{12}$$

であることがわかります．よって問題は，直交射影 P_h によって分けられた有限次元部分と無限次元部分それぞれに対する包含関係の確認に帰着されます．式 (12) の第 1 式の左辺は近似解 u_h の残差に，第 2 式の左辺は $F(U)$ に対する射影 P_h の誤差にそれぞれ対応します．次の定理は，候補者集合の無限次元部分の構成と包含関係成立のための条件を与えます．

定理 3.1 式 (11) の候補者集合 U の無限次元部分 U_* を，半径 $\alpha > 0$ の X の球として

$$U_* = \left\{ u_* \in X_h^{\perp} \mid \|u_*\|_X \le \alpha \right\} \tag{13}$$

で定めるとき，

$$C(h) \sup_{u \in U} \|f(u)\|_Y \le \alpha \tag{14}$$

が成立すれば，式 (12) の後半: $(I - P_h)F(U) \subset U_*$ が満たされる．

式 (13) の U_* は中心 0，半径 α の球であり，空でない有界凸閉集合です．また，条件 (14) の不等式は，構成的誤差評価定数 $C(h)$ を十分小さく取ることができるならば，その成立が期待できます．

次に，候補者集合の有限次元部分の構成と包含関係成立のための条件を導きます．X_h の次元を N で表記し，$\{\phi_i\}_{1\le i\le N}$ を X_h の基底とします．また，$N \times N$ 複素行列 D を，$1 \le i, j \le N$ に対し

$$[D]_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_X \tag{15}$$

で定義します．通常，行列 D は実正定値対称行列です．ここで，候補者集合の有限次元部分 $U_h \subset X_h$ を，複素凸閉集合 $\{B_i\}_{1\le i\le N}$ と基底との一次結合で

$$U_h = \sum_{i=1}^{N} B_i \phi_i \tag{16}$$

と設定します．X が実空間の場合には，B_i を上端と下端を持つ閉区間に設定します．複素空間の場合には，実部・虚部が閉区間となるように B_i を定義するか，中心と半径で表現される閉円板に設定します．このとき，U_h は，各 $1 \le i \le N$ に対し B_i に属するすべての複素数と基底 ϕ_i との一次結合全体の関数集合として，すなわち

$$U_h = \left\{ \sum_{i=1}^{N} v_i \phi_i \in X_h \;\middle|\; v_i \in B_i \subset \mathbb{C},\ 1 \le i \le N \right\} \tag{17}$$

と表現することができます．その作り方から U_h は有界凸閉集合となり，次の検証条件が成り立ちます．

定理 3.2 式 (13), (16), (11) より構成される候補者集合 $U \subset X$ に対し，$\boldsymbol{d} = [d_i] \subset \mathbb{C}^N$ を，$1 \le i \le N$ で

$$d_i = \{ (f(u), \phi_i)_Y - (u_h, \phi_i)_X \in \mathbb{C} \mid u \in U \} \tag{18}$$

と定める．このとき

$$\boldsymbol{x} = \left\{ \hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{C}^N \mid \hat{\boldsymbol{x}} = D^{-1}\hat{\boldsymbol{d}},\ \ \forall \hat{\boldsymbol{d}} \in \boldsymbol{d} \right\} \tag{19}$$

となる $\boldsymbol{x} = [x_i] \subset \mathbb{C}^N$ に対し

$$x_i \subset B_i, \qquad 1 \le i \le N \tag{20}$$

が成り立てば，式 (12) の前半: $P_h F(U) - u_h \subset U_h$ が満たされる．

定理 3.2 における式 (18) は，U が無限次元の項を含むため，正確な値を求めることはできません．そのため実際の計算では，$\boldsymbol{d}$ を包含する複素閉集合で代用します．また，式 (19) を満たす $\boldsymbol{x}$ も集合として正確に算定することは困難です．こちらも実際の計算では，$\boldsymbol{x}$ を包含する複素閉集合で代用します．それぞれ大きめの評価となるものの，最終的な包含関係 (20) が得られれば検証には問題ありません．また，式 (19)（に対応する包含集合）は，行列 D に対する連立 1 次方程式を精度保証付きで解くことにより定まります．

4 Hilbert 空間における射影

ここまで，関数方程式に対する不動点定式化の概要と解の数値的検証手順について，文献 [1] の検証方式 FS-Int を例に紹介しました．以下では，精度保証付き数値計算の講演では「さらっ」と流されがちな直交射影 P_h と射影誤差 (7) に着目し，具体的な評価定数の構成方法と課題について論じたいと思います．

4.1 射影定理

一般に X を Hilbert 空間，X の内積とノルムを $(u,v)_X$, $\|u\|_X := \sqrt{(u,u)_X}$ で表記し，X の閉部分空間 M と M の直交補空間:

$$M^{\perp} := \{ u \in X \mid (u,v)_X = 0,\ v \in M \}$$

を定義します．このとき，次の射影定理が成立します．

射影定理
X の任意の要素 u は M と $M^{\perp}$ の要素との和に一意に分解される:

$$u = u_1 + u_2, \qquad u_1 \in M, \quad u_2 \in M^{\perp}.$$

射影定理は,

> 「ヒルベルト空間における最大の基本定理は閉部分空間の上への射影（正射影）の存在を保証する射影定理である．」[2, 第 5 章まえがき]

といわれる通り，関数解析学における基本定理のひとつです．

4.2 射影

射影定理における u_1 を u の M の上への正射影（または略して射影）といいます．また，u を u_1 に対応させる作用素を X における M の上への正射影作用素（または略して射影作用素）といい，P_M で表します．本稿では，P_M も $P_M u$ もまとめて "射影" あるいは "直交射影" と呼びます．

射影は，X ノルムの誤差を最小にするという**最良近似**:

$$\|u - P_M u\|_X = \inf_{\chi \in M} \|u - \chi\|_X \tag{21}$$

の性質を持ちます．

4.3 閉部分空間 M が有限次元の場合

$M \subset X$ が 2 節で導入した有限次元部分空間 X_h の場合，X_h は完備ですので閉部分空間となり，射影定理が成立します．したがって，任意の $u \in X$ は以下の通り一意に分解されます．

$$u = u_h + u_*, \qquad u_h \in X_h, \quad u_* \in X_h^{\perp}.$$

X_h への射影を（P_M を P_h に書き直して）$P_h : X \to X_h$ と表記すると，P_h は (6) で定義することができます．射影で写される X_h は有限次元の世界ですので，計算機内で取り扱うことができます．したがって，3 節で述べたように，射影の誤差: $\|u - P_h u\|_X = \|u_*\|_X$ に対する評価式を手に持つことができるならば，非線形関数方程式の解の存在検証理論に持ち込むことができます．

4.4 射影の誤差評価

次節で見ていくように，射影の誤差評価 $\|u - P_h u\|_X$ に関わる定数は，設定した X_h と基底に応じて個別に構成する必要があります．このことを**構成的誤差評価**と呼ぶことは 2 節で述べました．また，誤差評価は $h \to 0$ のとき $\|u - P_h u\|_X \to 0$ となるように行うことが必須です．もちろん，$h \to 0$ ということは，有限次元 X_h の基底の数が増えるということを意味しており，射影の誤差評価を精緻にしようとすると，有限次元部分の計算量が増えることになります．

5 具体的な射影と誤差評価の例

この節では，具体的な非線形問題を取り上げ，空間設定と (7) に対応して必要となる $C(h)$ を導きます．実際の $C(h)$ の値は次節で与えます．

5.1 2 階楕円型境界値問題 (1)

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ に対し，Dirichlet 境界条件を課した問題:

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega, \\ \quad u = & 0, \qquad\qquad\quad\; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

を考えます．Ω において 2 乗可積分関数全体の集合を $L^2(\Omega)$，超関数の意味での k 階微分が $L^2(\Omega)$ に属する関数全体の集合を $H^k(\Omega)$ とするとき，関数空間 X は

$$X = H_0^1(\Omega) := \{\, u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ on } \partial\Omega \,\},$$

X の内積は $(u,v)_X = (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$, ノルムは $\|u\|_X = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ で, また, $\hat{X} = \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\Delta u \in L^2(\Omega)\}$, $Y = L^2(\Omega)$, $(u,v)_Y = (u,v)_{L^2}$, $\|u\|_Y = \|u\|_{L^2(\Omega)}$ と定めることができます.

このとき, 射影 $P_h : X \to X_h$ は

$$(\nabla(u - P_h u), \nabla v_h)_{L^2} = 0, \qquad \forall v_h \in X_h$$

で, 射影の誤差評価は

$$\|u - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C(h)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{for} \quad u \in H_0^1(\Omega) \;\; \text{s.t.} \;\; \Delta u \in L^2(\Omega) \tag{22}$$

を満たす $C(h)$ を求める問題となります.

5.2 2 階楕円型境界値問題 (2)

前の方程式の境界条件を Neumann 条件にした問題:

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x,u,\nabla u), \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = & 0, \qquad\qquad\quad\; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

の場合は, $X = H^1(\Omega)$ となり, X の内積は $\mu > 0$ に対して $(u,v)_X = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} + \mu(u,v)_{L^2(\Omega)}$, ノルムは $\|u\|_X = \sqrt{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \mu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}$ と設定することができます. また, $\hat{X} = \{u \in H^1(\Omega) \,|\Delta u \in L^2(\Omega)\}$, Y は Dirichlet 境界条件と同じです. このとき, 射影 $P_h : X \to X_h$ は

$$(u - P_h u, v_h)_X = 0, \qquad \forall v_h \in X_h$$

で, また射影の誤差評価は

$$\|u - P_h u\|_X \le C(h)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{for} \quad u \in H^1(\Omega) \;\; \text{s.t.} \;\; \Delta u \in L^2(\Omega) \tag{23}$$

を満たす $C(h)$ を求める問題となります.

5.3 4 階楕円型境界値問題

$\Omega \in \mathbb{R}^2$ の凸多角形領域において, 次の問題を考えます.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = & f(x,u,\nabla u,\Delta u), \quad x \in \Omega, \\ u = & \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad\qquad\quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

X は

$$X = H_0^2(\Omega) := \left\{ u \in H^2(\Omega) \mid u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\},$$

X の内積は $(u,v)_X = (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$, ノルムは $\|u\|_X = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ と設定することができます. また, $\hat{X} = H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$ です. このとき, 射影 $P_h : X \to X_h$ は

$$(\Delta(u - P_h u), \Delta v_h)_{L^2(\Omega)} = 0, \qquad \forall v_h \in X_h$$

で, また射影の誤差評価は

$$\|\Delta(u - P_h u)\|_{L^2(\Omega)} \le C(h)\|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{for} \quad u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$$

を満たす $C(h)$ を求める問題となります.

6 構成的誤差評価の具体例

この節では，構成的誤差評価定数 $C(h)$ の具体例を紹介し，残された課題についても述べます.

6.1 Fourier 級数展開

領域 $\Omega = (0,1)^d$ $(d = 1,2,3)$ において，Dirichlet 境界条件を課した 2 階楕円型問題:

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x,u,\nabla u), \quad x \in \Omega, \\ \quad u = & 0, \qquad\qquad\quad\; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

に対応する直交射影 P_h の誤差評価:

$$\|u - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C(h)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

を考えます．基底関数を打ち切り項数 N（3 節の N と異なります）とした Fourier 級数:

$$\phi_m(x) := \sin(\pi m x), \quad 1 \le m \le N$$

に設定すると，最適な $C(h)$ を次のように求めることができます.

Ω	X_h	$C(h)$
$(0,1)$	span $\{\phi_m(x)\}$	$\dfrac{1}{\pi(N+1)}$
$(0,1)^2$	span $\{\phi_m(x)\cdot\phi_n(y)\}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{(N+1)^2+1}}$
$(0,1)^3$	span $\{\phi_m(x)\cdot\phi_n(y)\cdot\phi_l(z)\}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{(N+1)^2+2}}$

$C(h)$ は次元によらず $O(1/N)$ です．具体的には，$N = 10$ で $C(h) \approx 0.0288$, $N = 100$ で $C(h) \approx 0.00315$ です．しかし，有限次元部分空間 X_h の次元数は，1 次元では $N = 100$ でも 100 なのに対して，3 次元では $100^3 = 1,000,000$ となります．このことは，精度保証においては，1 次元では（ある程度の）“力技” が効くということと，2 次元・3 次元の偏微分問題では計算コストがかかることを示しています.

6.2 2 点境界値問題の多項式近似

1 次元の 2 点境界値問題:

$$\begin{cases} -u'' & = f(x,u,u'), \quad x \in (0,1), \\ u(0) & = \; u(1) \; = \; 0 \end{cases}$$

に対応する直交射影 P_h の誤差評価:

$$\|(u - P_h u)'\|_{L^2(\Omega)} \le C(h)\|u''\|_{L^2(\Omega)}$$

を考えます．区間 $(0,1)$ を $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = 1$ と分割し $I_i := (x_{i-1}, x_i)$, $h_i := x_i - x_{i-1}$, $h := \max_{1\le i\le n+1} h_i$ とおき，$P_r(I)$ を I 上の r 次（$r \ge 1$）以下の多項式全体,

$$X_h^r := \{v \in C(\Omega) \mid v|_{I_i} \in P_r(I_i),\ 1 \le i \le n+1,\ v(0) = v(1) = 0\}$$

と定義します．このとき，とくに $X_h = X_h^1$ とすれば，補間射影: $I_h : H_0^1(\Omega) \to X_h^1$ s.t. $I_h v(x_i) = v(x_i)$ $(0 \le i \le n+1)$ と射影の最良近似の性質を用いて

$$\begin{aligned} \|(u - P_h u)'\|_{L^2(\Omega)} &\le \|(u - I_h u)'\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{h}{\pi}\|u''\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

を導くことができます．証明および 2 次以上の多項式近似については文献 [3] を参照してください．

6.3　2 次元矩形要素

6.2 節の結果を 2 次元に拡張した例として，幅 h の正方領域で等分割できる 2 次元矩形領域 Ω において，Dirichlet 境界条件を課した 2 階楕円型問題:

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega, \\ \quad\; u = & 0, \qquad\qquad\quad\; x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{24}$$

に対応する直交射影 P_h の誤差評価:

$$\|u - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C(h)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \tag{25}$$

は，x 方向および y 方向それぞれの区分 1 次多項式 $X_h^1(x)$, $X_h^1(y)$ の積全体として X_h を定義すれば，$C(h) = h/(2\pi)$ となります [3]．

6.4　2 次元三角形要素

Ω を 2 次元凸多角形領域として，問題 (24) と，対応する直交射影 P_h の誤差評価 (25) を考えます．Ω を $\tau_1, \ldots, \tau_m$ に三角形分割し，三角形 T 上の関数 $u \in H^2(T)$ に対し，T の 3 つの頂点で u と値が一致し，T 上一次関数となるような関数を $\Pi_T u$ で表し，以下を仮定します．

$$\|\nabla(u - \Pi_T u)\|_{L^2(T)} \le C_T\|\Delta u\|_{L^2(T)}$$

さらに，$u \in H_0^1(\Omega)$ に対し，各 τ_k 上で定義される $\Pi_{\tau_k} u$ を繋げて Ω 全体を定義域にしたものを Πu とします．いわゆる区分一次補間です．

このとき，射影の最良近似より

$$\begin{aligned} \|u - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} &\le \|u - \Pi u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\le \max_{1 \le k \le m} C_{\tau_k}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

となり，$C(h)$ を求める問題は，分割された各三角形に対する補間誤差評価定数 C_T を求める問題に帰着されます．C_T については，小林健太さんによる以下の「美しい」定理がよく知られています [4]．

補間誤差評価定数評価

A, B, C を三角形 T の三辺の長さ，S を T の面積とすると

$$C_T < \sqrt{\frac{A^2B^2C^2}{16S^2} - \frac{A^2+B^2+C^2}{30} - \frac{S^2}{5}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}\right)} \tag{26}$$

が成立．

式 (26) の右辺の 2, 3 番目の項はマイナスですので，C_T は

$$C_T < \frac{ABC}{4S}$$

と，外接円半径で上から評価すること《も》できます．したがって，三角形分割の際には，外接円半径が小さくなるように分割すれば $C(h) \to 0$ が保証されます．

6.5 その他

その他，構成的誤差評価が得られている問題（基底）としては，

- 矩形領域の矩形要素分割に対する区分双 2 次要素 [3]
- 3 次 Hermite 補間 [5]
- Legendre 多項式展開 [6]
- アスペクト比を持つ領域に対する Fourier 級数展開 [7]

などがあります．

5.2 節の 2 階楕円型 Neumann 境界条件に対する有限要素部分空間の誤差評価は，一定の評価は得られているものの，非線形問題に展開するにはまだ粗い定数であり，よりシャープな評価が期待されます．また，Chebyshev 多項式展開については，（筆者の知る限り）構成的誤差評価定数は（まだ）得られていません．

7 応用 1: Navier-Stokes 方程式

この節と次の節では，個別の方程式に対する解の精度保証で必要となる構成的誤差評価を概観します．

7.1 定常 Navier-Stokes 方程式

2 次元凸多角形領域 Ω において，定常 Navier-Stokes 方程式の弱形式:

$$\begin{cases} \nu(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (p, \operatorname{div} v)_{L^2(\Omega)} = & -((u\cdot\nabla)u, v)_{L^2(\Omega)} + (f, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^2, \\ (\operatorname{div} u, q)_{L^2(\Omega)} = & 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{27}$$

を考えます．未知関数は流速場 $u \in H_0^1(\Omega)^2$ および圧力場 $p \in L_0^2(\Omega)$ です．ただし，$\nu > 0$ は粘性係数，$f = [f_1, f_2]^T \in L^2(\Omega)$ は外力項，

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega v\,dx\,dy = 0 \right\}$$

です．

7.2 Stokes 方程式

Navier-Stokes 方程式 (27) の解を捕まえる関数空間は $X := H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ です．また，定式化に修正が必要になるものの，$\mathcal{A}$ に対応する線形問題は，Stokes 方程式:

$$\nu(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (p, \operatorname{div} v)_{L^2(\Omega)} - (q, \operatorname{div} u)_{L^2(\Omega)} = \langle \xi, v \rangle, \quad \forall [v, q] \in X \tag{28}$$

です．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $H^{-1}(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)^2$ の duality pairing です．任意の $\xi \in H^{-1}(\Omega)^2$ に対し，Stokes 方程式 (28) は唯一の解 $[u, p] \in X$ を持ちます．また，$X_h \subset X$ を離散 inf-sup 条件を満たす有限要素部分空間に設

定すれば，式 (28) の離散化方程式:

$$\nu(\nabla u_h, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} - (p_h, \operatorname{div} v_h)_{L^2(\Omega)} - (q_h, \operatorname{div} u_h)_{L^2(\Omega)} = \langle \xi, v_h \rangle, \quad \forall [v_h, q_h] \in X_h \tag{29}$$

も任意の $\xi \in H^{-1}(\Omega)^2$ に対して一意解 $[u_h, p_h] \in X_h$ を持ちます．この式 (28) の解 $[u,p]$ から式 (29) の解 $[u_h, p_h]$ への対応 $[u,p] \mapsto [u_h, p_h]$ を Stokes 射影と呼び，その構成的誤差評価:

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \le C(h) \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \tag{30}$$

を $\xi \in L^2(\Omega)^2$ について，また，$\xi \in H^{-1}(\Omega)^2$ の場合についても考えることで，Navier-Stokes 方程式 (27) の解の精度保証の定式化を与えることができます [8].

7.3 $C(h)$ 導出のために不可欠な定数

関数空間:

$$V := \{ v \in H_0^1(\Omega)^2 \mid \operatorname{div} v = 0 \}$$

の直交補空間を $V^\perp$ とします．このとき，任意の $q \in L_0^2(\Omega)$ に対し，$\operatorname{div} v = q$ を満たす $v \in V^\perp$ が唯一存在し

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{\beta} \|q\|_{L^2(\Omega)} \tag{31}$$

が成り立つことが知られています．$\beta > 0$ は Ω にのみ依存する定数です．式 (31) は Babuška-Aziz の不等式と呼ばれます．式 (30) の構成的誤差評価のためには，式 (31) の $1/\beta$ の値を明示的に知る必要があります [9].

2 次元においては，Horgan-Payne による以下の評価が知られています [10].

Babuška-Aziz の不等式の評価定数

Ω を star-shaped 領域とする．境界 $\partial\Omega$ を極座標を用いて $r = f(\theta)$ であらわす．このとき

$$\mathcal{F}(\theta) \equiv \left\{ \left[1 + \left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{|f'(\theta)|}{f(\theta)} \right\}^2$$

とおくと

$$\frac{1}{\beta} \le \sqrt{1 + \max_\theta \mathcal{F}(\theta)}$$

が成立.

たとえば正方領域では，$1/\beta < 2.614$，Ω が正 n 角形のときは，$1/\beta = \sqrt{\dfrac{2}{1 - \sin(\pi/n)}}$ となります．ただし，Horgan-Payne の conjecture（未証明）では，$1/\beta = \sqrt{7/2} \sim 1.871$ が最適値です．また，3 次元は（おそらく）現在のところ具体的な定数は未評価です．

8 応用 2: 時間発展方程式

3 次元までの有界領域 Ω と $T > 0$ で決まる時間領域 $J := (0, T)$ に対する放物型問題:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u &= g(t, x, u, \nabla u) \quad \text{in} \quad \Omega \times J, \\ \qquad u(x,t) &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{on} \quad \partial\Omega \times J, \\ \qquad u(x,0) &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{32}$$

を考えます．$\nu > 0$ は既知のパラメータです．式 (32) に対応する線形問題は，$f \in L^2(J; L^2(\Omega))$ に対して

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega \times J, \\ \quad u(x,t) &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times J, \\ \quad u(x,0) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{33}$$

となります．ここで，$L^2(J; L^2(\Omega))$ は，$\int_J \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt < \infty$ となる関数全体の集合です．問題 (33) に対し，空間方向を半離散近似（h）して得られる基本解行列を用いて時間方向を線形補間（k）し，全離散近似した射影 P_h^k の構成的誤差評価:

$$\|u - P_h^k u\|_{L^2(J, H_0^1(\Omega))} \le C(h,k)\|f\|_{L^2(J, L^2(\Omega))} \tag{34}$$

を与えることができれば，非線形問題 (32) の解の精度保証の定式化を導くことができます．$L^2(J; H_0^1(\Omega))$ は，$\int_J \|f(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt < \infty$ となる関数全体の集合であり，式 (34) のノルムは，関数空間の定義から導かれるものです．

文献 [11] では，$\Omega = J = (0,1)$, $\nu = 1/10$ において，$u(x,t) = t \times x(1-x)$ が式 (33) の解となるように f を設定し，$k = h^2$ の条件のもと構成的誤差評価を

h	$C(h,k)$
1/2	3.73
1/4	1.87
1/8	0.94
1/16	0.47

で与えることに成功しました．2 次元以上における $C(h)$ の値や，$k = h^2$ を外すことができるか，より現実的な非線形問題の解の精度保証に向けて，今後の研究の進展が期待されます．

参考文献

[1] 中尾 充宏, 渡部 善隆: 実例で学ぶ精度保証付き数値計算～理論と実装～, 臨時別冊・数理科学 2011 年 10 月 (SGC ライブラリ 85), サイエンス社, 2011.

[2] 藤田 宏: 理解から応用への関数解析, 岩波書店, 2007.

[3] 中尾 充宏, 山本 野人: 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.

[4] 小林 健太: 有限要素法の精度保証と誤差公式, 数学セミナー, 2012 年 10 月号, pp.21–25.

[5] Y. Watanabe, M. Plum, and M.T. Nakao: A computer-assisted instability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (ZAMM; Journal of Applied Mathematics and Mechanics) **89**, 5–18, (2009).

[6] T. Kinoshita and M.T. Nakao: On very accurate enclosure of the optimal constant in the a priori error estimates for H_0^2-projection, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **234**, 526–537, (2010).

[7] Y. Watanabe, N. Yamamoto, M.T. Nakao, and T. Nishida: A numerical verification of nontrivial solutions for the heat convection problem, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* **6**, 1–20, (2004).

[8] Y. Watanabe, N. Yamamoto, and M.T. Nakao: A numerical verification method of solutions for the Navier-Stokes equations, *Reliable Computing* **5**, 347–357, (1999).

[9] M.T. Nakao, N. Yamamoto, and Y. Watanabe: A posteriori and constructive a priori error bounds for finite element solutions of the Stokes equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **91**, 137-158, (1998).

[10] C.O. Horgan and L.E. Payne: On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **82**, 165–179, (1983).

[11] M.T. Nakao, T. Kimura, and T. Kinoshita: Constructive a priori error estimates for a full discrete approximation of the heat equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **51**, 1525–1541, (2013).