

Linearly implicit finite difference scheme for a nonlinear wave equation with application to approximation of the blow-up time

佐々木 多希子*, 齊藤 宣一
Takiko Sasaki, Norikazu Saito

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1 はじめに

本論文では、次の空間 1 次元非線形波動方程式の初期値・境界問題を考える:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u^p, & t > 0, x \in (0, L), \\ (u, u_x)(t, 0) = (u, u_x)(t, L), & t \geq 0, \\ (u, u_t)(0, x) = (u_0, u_1)(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $L > 0$ である。 p に関する仮定は (2.4) で述べる。 (1.1) の解 (古典解) は時間大域的に存在しないことが知られている。

方程式の解が時間大域的に存在しないことを、解が有限時間で爆発するという。非線形偏微分方程式の解が有限時間で爆発する場合、その爆発時間を求めること、また爆発時間付近での解の挙動の研究は非常に重要である。しかしながら、爆発時間を解析的に求めることは一般的に難しく、したがって数値計算によって爆発時間を近似的に求める方法が研究されている。

1976 年に空間 1 次元で、2 次の非線形項を持つ熱方程式に対して、爆発時間を近似的に求める方法が Nakagawa[7] により提案された。その後、Chen[1] は一般的なべき乗型の非線形項を持つ熱方程式に対して、爆発時間を近似的に求める手法が提案した。また、Cho, Hamada and Okamoto[2] により、より一般的な非線形項を持つ熱方程式に対して爆発時間を近似的に求める手法が開発された。

近年、空間 1 次元の、2 次の非線形項を持つ非線形波動方程式に対し、爆発時間を数値的に求める差分スキームが Cho[3] により提案された。

ただし、Cho[3] のスキームには以下に述べるような難点があった。爆発時間の近似、これを数値爆発時間と呼ぶことにするが、Cho[3] では、数値爆発時間を提案し、またその収束

*tsasaki@ms.u-tokyo.ac.jp

証明を行っている。数値爆発時間の収束証明は次の二つのステップに分かれている。

(ステップ1) スキームの収束証明。

(ステップ2) 数値爆発時間の収束証明。

Cho[3]では、スキームには陽的なスキームを用いているのだが、ステップ1が未解決であり、ステップ1が成り立つことを仮定してステップ2を示している。

最近、我々はこの問題に対し、陽的なスキームだけではなく、[9]の手法(2次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式の線形差分近似)を用いた、線形で陰的なスキームも用いて数値爆発時間の解析を行った。その結果、ステップ1、ステップ2の両方を示すことができる(1.1)のスキームを得ることに成功した。

本論文では、この成果について報告する。構成は次の通りである。まず、第2章において、(1.1)の時間局所解の一意存在定理と、その時間大域解の非存在定理についてまとめる。第3章では、[9]の方法による、(1.1)の差分スキームを数種類紹介し、その性質を述べる。第4章では、第3章で述べるスキームの中で、爆発時間の近似が可能なスキームの誤差解析、及び、数値爆発時間の収束解析の概略について述べる。詳細は[8]で発表予定である。第5章では数値例を述べ、最後に第6章で本論文のまとめを述べる。

2 時間局所解の一意存在、及びその時間大域解の非存在

(1.1)は、滑らかな初期値を与えると滑らかな時間局所解を持つことが知られている。(1.1)の時間局所解の一意存在定理をやや一般的に述べる。円周の長さが L の円を S_L^1 と書き、次の空間1次元の波動方程式の初期値・境界問題を考える：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(u), & t > 0, x \in S_L^1, \\ (u, u_t)(0, x) = (u_0, u_1)(x), & x \in S_L^1. \end{cases} \quad (2.1)$$

このとき、Evans[4]の方法で、次の命題を示すことができる。

命題 2.1 (i) f が C^4 級であり、初期値が

$$u_0, u_1 \in C^3(S_L^1) \quad (2.2)$$

を満たすならば、ある正定数 T が存在し、(2.1)の解 $u \in C^3([0, T] \times S_L^1)$ が一意的に存在する。特に、ある正定数 C_{ml} が存在して、

$$\|\partial_t^m \partial_x^l u\|_{L^\infty([0, T] \times S_L^1)} \leq C_{ml} \|u\|_{L^\infty([0, T] \times S_L^1)}$$

が成り立つ。ここで、 $m + l \leq 3$, $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ である。

(ii) 初期値が

$$u_0(x) \geq 0, \quad u_1(x) \geq 0 \quad (x \in [0, L]) \quad (2.3)$$

を満たし、さらに、 $f(u) \geq 0$ ($u \geq 0$)ならば、(i)の解は $u \geq 0$ ($t \in [0, T], x \in S_L^1$)を満たす。

以下では初期値について、常に (2.2) と (2.3) を仮定する。したがって、(1.1) は正確には、(2.1) において

$$f(u) = u^p \quad (p \geq 2 \text{ 整数})$$

あるいは

$$f(u) = |u|^p \quad (p \geq 4 \text{ 実数})$$

の場合を考えていると仮定すれば良い。すなわち以下では

$$p \geq 2 : \text{整数} \quad \text{または} \quad p \geq 4 : \text{実数} \quad (2.4)$$

を仮定する。

本論文では、命題 2.1 における T の上限を u の最大存在時間といい、 T^* と書くことにする。 $T^* = \infty$ のとき、 u は時間大域的に存在するといい、 $T^* < \infty$ のとき、 u は有限時間で爆発するというようにする。

命題 2.1 で得られた (1.1) の時間局所解 u は、時間大域的に存在しない、つまり、有限時間で爆発することが知られている。(1.1) の解の爆発について、次の命題が成り立つ。この命題は命題 2.1(i) よりただちに従う。

命題 2.2 (1.1) の解 u について、次は同値である。ある正定数 T^* が存在し、

- (i) u が $t = T^*$ で爆発する。
- (ii) $\lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_{L^\infty((0,L))} = \infty$.

命題 2.2 より、解が爆発するというのは、 $\|u\|_{L^\infty}$ が発散するということであることが分かる。

(1.1) の解の爆発の証明において、次の関数が重要な役割を果たす。

$$K(u(t)) = \frac{1}{L} \int_0^L u(t, x) dx$$

とする。

このとき、次の定理が成立する。

定理 2.3 (2.2), (2.3), (2.4) に加えて、

$$\alpha = K(u_0) \geq 0, \quad \beta = K(u_1) > 0 \quad (2.5)$$

すると、

$$T_1 = \int_\alpha^\infty \left[\beta^2 + \frac{2}{p+1} (s^{p+1} - \alpha^{p+1}) \right]^{-\frac{1}{2}} ds. \quad (2.6)$$

は非線形項の仮定により $T_1 < \infty$ である。このとき、ある正定数 $T_2 \leq T_1$ が存在し、

$$\lim_{t \uparrow T_2} K(u(t)) = \infty.$$

簡単な計算により, $|K(u(t))| \leq \|u(t)\|_{L^\infty((0,L))}$ が成立する. これと定理 2.3, 及び命題 2.2 より, ある正定数 $T^* \leq T_2$ が存在し, (1.1) の解 u は $t = T^*$ で爆発することが分かる.

定理 2.3 の証明において, 次の補題が重要である.

補題 2.4 次が成り立つ:

$$\frac{d^2}{dt^2}K(u(t)) \geq (K(u(t)))^p.$$

補題 2.5 (2.5) の仮定のもとで, 次が成り立つ:

$$\frac{d}{dt}K(u(t)) \geq \left(\frac{2}{p+1} (K(u(t)))^{p+1} + M_0 \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

ここで, $M_0 = \beta^2 - \frac{2}{p+1}\alpha^{p+1}$.

この補題により, $K(u(t))$ の存在時間について,

$$t < T_1$$

という評価が得られて, 定理 2.3 が成り立つ.

[補題 2.4 の証明] 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}K(u(t)) &= \int_{-L}^L u_{tt}(t, x) dx \\ &= \int_{-L}^L u_{xx}(t, x) dx + \int_{-L}^L u^p(t, x) dx. \end{aligned}$$

(1.1) より,

$$\int_{-L}^L u_{xx}(t, x) dx = [u_x(t, x)]_{-L}^L = 0.$$

また, Jensen の不等式より,

$$\int_{-L}^L u^p(t, x) dx \geq \left(\int_{-L}^L u(t, x) dx \right)^p = K(u(t))^p. \quad (2.8)$$

したがって,

$$\frac{d^2}{dt^2}K(u(t)) \geq (K(u(t)))^p.$$

以上より, 補題 2.4 が示された. □

[補題 2.5 の証明] 補題 2.4 より, 次を得る:

$$\frac{d}{dt}K(u(t)) \geq \frac{d}{dt}K(u(0)) + \int_0^t (K(u(t)))^p.$$

したがって、(2.5)の仮定の下で、 $\frac{d}{dt}K(u(t)) \geq 0$ が成り立つので、

$$\frac{d}{dt}K(u(t))\frac{d^2}{dt^2}K(u(t)) \geq \frac{d}{dt}K(u(t))(K(u(t)))^p$$

が成り立つ。よって次が成り立つ:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt}K(u(t)) \right)^2 - \int_{\alpha}^{K(u(t))} \xi^p d\xi \right\} \geq 0.$$

したがって、

$$\left(\frac{d}{dt}K(u(t)) \right)^2 \geq \beta^2 + \frac{2}{p+1} \left\{ (K(u(t)))^{p+1} - \alpha^{p+1} \right\}$$

を得る。以上より補題 2.5 が示された。 \square

(1.1)のスキームが、これらの補題の離散版と呼べるものを満足していると、 τ, h を十分小さくとったときに、(1.1)のスキームは爆発し、かつその爆発時間(これがすなわち数値爆発時間である。)は、(1.1)の解の爆発時間に収束していることを示すことができる。

注意 2.6 本論文では、簡単のため、非線形項は上記のようなべき乗型であることを仮定しているが、十分に滑らかで凸であれば、同様の議論ができる。

3 非線形波動方程式の差分スキーム

(1.1)のスキームの差分スキームを考える。安定で、収束証明可能であり、かつ実用的なスキームを考えたいが、一般的に安定な非線形偏微分方程式のスキームは非線形になり、線形なスキームに比べると計算量が多くなる。しかしながら、一部の連立型の偏微分方程式は陰的だが線形で、かつ収束証明ができる差分スキームを得ることができる。(1.1)は次のように書き直すことで、線形で、かつ収束証明な差分スキームを得ることができる。詳しくは[9]を参照して頂きたい。

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = \phi, & t > 0, x \in (0, L), \\ \partial_t \phi - \partial_x \phi = u^p, & t > 0, x \in (0, L), \\ (u, \phi)(t, 0) = (u, \phi)(t, L), & t \geq 0, \\ (u, \phi)(0, x) = (u_0, u_1 + \partial_x u_0)(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (3.1)$$

注意 3.1 Cho[9]では、(1.1)を直接離散化し、陽的なスキームを得ている。それを用いて爆発時間の近似を行っているが、スキームの収束証明ができない。そこで本論文では、(1.1)を(3.1)のような時間・空間1階の方程式系に書き換えて考察を行う。

このように(1.1)を書き直すことで、(3.1)の第1式では ϕ を、(3.1)の第2式では ϕ を定数とみなせば、線形な方程式とみなすことができる。このことに注意して、(3.1)を次のように近似する。

$\tau > 0$, $J \in \mathbb{N}$ をとり, $h = L/J$, $x_j = jh$ とおく. 離散的な時間変数を $t_n, t_{n+\frac{1}{2}}$ として (定義は後で述べる), 求める近似値を

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j), \quad \phi_j^{n+\frac{1}{2}} \approx \phi(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j), \quad \mathbf{u}^n = (u_j^n) \in \mathbb{R}^J, \quad \boldsymbol{\phi}^{n+\frac{1}{2}} = (\phi_j^{n+\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^J$$

とあらわす.

そして, (3.1) の線形差分スキームとして, 次のスキームを考える:

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t_n} + \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right) = \phi_j^n, \\ \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t_n} - \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{h} \right) = (u_j^n)^p, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right) = \phi_j^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\phi_j^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{3}{2}}}{h} + \frac{\phi_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{h} \right) = (u_j^{n+1})^p, \end{cases}$$

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right) = \phi_j^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\phi_j^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t_n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{3}{2}}}{h} + \frac{\phi_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{h} \right) = (u_j^{n+1})^p, \end{cases}$$

ここで, Δt_n は

$$\Delta t_n = \tau \cdot \min \left\{ 1, \frac{1}{\|\mathbf{u}^n\|_{l^\infty}} \right\} \quad (3.2)$$

と選び,

$$t_n = \Delta t_0 + \Delta t_1 + \cdots + \Delta t_{n-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \Delta t_l, \quad t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{2} + t_n$$

とする. また, 簡単のため, $\gamma = \frac{\tau}{h} < 1$ を固定して考える.

(A) は陽的スキームであり, $\underline{\quad}$ は時間に関して中心差分近似を用いている. また (C) は, (B) の時間の刻み幅 τ を可変時間刻み幅 Δt_n に置き換えたものである.

注意 3.2 非線形偏微分方程式に中心差分を直接適用すると, 非線形なスキームになる. それを避けるために, (B) では, u と ϕ で離散化する時間をずらしている. そのように離散化をすることで, 線形なスキームであり, かつ, 基本的な差分法の誤差解析の手法により, 時間2次収束しているスキームを得ることができる.

注意 3.3 (B), (C) はともに, u とずれた時間で離散化している. 最初の時刻 $t_{\frac{1}{2}}$ は, $t = 0$ から $\tau/2$ だけすぎた時刻とする.

定義 3.4 数値爆発時間 $T(\tau, h)$ を次で定義する.

$$T(\tau, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta t_n.$$

これらのスキームに関する結果をまとめて述べる.

表 1: (3.1) に対するスキームの提案と, その精度及び数値爆発時間の収束

| スキーム | 精度 | $T(\tau, h)$ の T_0 への収束 |
|------|-----------------|---------------------------|
| (A) | $O(\tau + h)$ | × |
| (B) | $O(\tau^2 + h)$ | – |
| (C) | $O(\tau + h)$ | ○ |

注意 3.5 (C) では (3.1) の爆発を再現するために時間の刻み幅を (3.2) のようにとっているが, 必ずしもこのようにとる必要はない. 今回は簡単のため, (3.2) において, $\|\mathbf{u}^n\|_{l^\infty}$ を用いているが, 重要なのは, $\|\mathbf{u}^n\|_{l^\infty}$ にあたる部分が $K(u_h^n)$ (4.2.2 で定義する.) より大きいことである. $\|\mathbf{u}^n\|_{l^\infty}$ はその一つである.

4 スキーム及び数値爆発時間の収束とその証明

4.1 (C) の収束及び数値爆発時間の収束

表 1 より, (3.1) の爆発を再現するスキームとしては, (C) が適切であることが分かる. (C) の結果を詳しく述べる.

(C) は次の安定性 (局所安定性) の命題が成り立つ:

命題 4.1 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^J$, $R = \|\mathbf{a}\|_{l^\infty} + \|\mathbf{b}\|_{l^\infty}$ とする. このとき, ある正定数 T_R が存在し, $\tau \in (0, T_R/2)$ ならば, 次を満たす (C) の解 $(\mathbf{u}^n, \phi^{n+\frac{1}{2}})$ が一意的に存在する:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^0, \phi^{\frac{1}{2}}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ \|\mathbf{u}^n\|_{l^\infty} + \|\phi^{n+\frac{1}{2}}\|_{l^\infty} &\leq 2R \quad (t_n \leq T_R). \end{aligned}$$

命題 4.2

$$u_1(x) + \partial_x u_0(x) \geq 0 \tag{4.1}$$

の下で

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad \phi_j^{\frac{1}{2}} = u_1(x_j) + \partial_x u_0(x_j)$$

と選ぶと, $\mathbf{u}^n \geq \vec{0}$, $\phi^{n+\frac{1}{2}} \geq \vec{0}$ ($n \geq 0$) を得る.

また, (C) は次の収束定理が成り立つ:

定理 4.3 $T < T^*$ とする。また, 正定数 M を

$$M = \max\{\|\partial_t^k \partial_x^m u\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(0, L'))} \mid k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k + m \leq 3\}$$

とおく。さらに, (C) の初期値 $(\mathbf{u}^0, \phi^{\frac{1}{2}})$ を

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad \phi_j^{\frac{1}{2}} = u_1(x_j) + \partial_x u(x_j)$$

を満たすように選ぶ。さらに, $\gamma = \tau/h < 1$ とする。このとき, 次を満たす p, T, M, γ のみに依存する正定数 τ_0, K_0 が存在する: $\tau \in (0, \tau_0)$, $t_{n+1} \leq T$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n\|_{l^\infty} + \|\phi(t_{n+\frac{1}{2}}) - \phi^{n+\frac{1}{2}}\|_{l^\infty} \leq K_0(\tau + h).$$

ここで,

$$\mathbf{u}(t_n) = (u(t_n, x_j)), \quad \phi(t_{n+\frac{1}{2}}) = (\phi(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j)).$$

さらに, 爆発時刻への収束について, 次の結果を得た:

定理 4.4 $T^* = T_2$ を仮定する。(2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (4.1), 定理 4.3 の仮定の下で次が成り立つ:

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(\tau, h) = T^*.$$

注意 4.5 定理 4.4 の証明には (今の時点では),

$$T^* = T_2 \tag{4.2}$$

を仮定する。放物型方程式の場合は, どのような非線形項のときに, $T^* = T_2$ が成り立つのかが知られている (Friedman, McLeod[5]). しかしながら, 双曲型方程式の場合には, 筆者の知る限りでは, いつ $T^* = T_2$ が成り立つのかは知られていない。本論文では $T^* = T_2$ を仮定する。

4.2 証明の方針

4.2.1 命題 4.1, 定理 4.3 の証明

命題 4.1 の証明は不動点定理に基づいている。スキームを Duhamel の公式のような和分で書き表し, 適当なノルムで計るということである。不動点定理で得られる安定性なので, 命題 (1.1) により得られた安定性はスキームの初期値に依存する局所的な安定性であり, その安定性が示せる時間は, この命題だけでは (3.1) の最大存在時間とは関係がないことに注意する。

定理 4.3 の証明は 2 段階に分かれている。まず, 十分小さな時間 ((C) の解が安定で,かつ, (3.1) 解の最大存在時間より小さい時間) で (C) の解が収束することを示す。その次に, 命題 4.1 を用いて, (C) の解が安定である時間が (3.1) の最大存在時間より真に小さければ矛盾が生じることを示す。つまり, (C) の解は (3.1) の解の最大存在時間直前まで収束していることを示す。詳しくは [9] を参照して頂きたい。

4.2.2 定理 4.4 の証明

定理 4.4 の証明は Cho[3] に基づいている. 定理 4.4 の証明は次の 2 段階に分かれている.

(ステップ 1) $\liminf_{h \rightarrow 0} T(\tau, h) \leq T^*$

(ステップ 2) $\limsup_{h \rightarrow 0} T(\tau, h) \geq T^*$

ステップ 1, ステップ 2 とともに, 背理法で示す.

ステップ 1 は, (C) の解が (3.1) の解に収束していれば示すことができる.

ステップ 2 の証明には, (C) の解が有限時間で爆発していることを示す必要がある. (1.1) の爆発を示すときに重要だった補題 2.4, 補題 2.5 の離散版を, (C) の解が満たしていることを示し, スキーム (C) が爆発することを示す.

まず記号を定義する.

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [x_j, x_{j+1}), \\ 0 & \text{if } x \notin [x_j, x_{j+1}), \end{cases}$$

$$u_h^n(x) = \sum_{j=1}^J u_j^n \chi_j(x), \quad \phi_h^{n+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{j=1}^J \phi_j^{n+\frac{1}{2}} \chi_j(x), \quad K(f) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

注意 4.6 (1.1) の収束証明可能なスキームを得るために, (1.1) を連立系の方程式 (3.1) に書き直してスキームを得た. しかしながら, (C) の解の爆発を示すためには, 補題 2.4, 補題 2.5 の離散版を示せばよいのだが, これらは (1.1) (連立系ではない) に対する補題であるので, (C) の解の $\phi^{n+\frac{1}{2}}$ をうまく消去して, u^n だけの関係式を得る必要がある. これは実際うまくいき, 次の補題を得る.

補題 2.4 の離散版と言えるのが次の補題である:

補題 4.7 $K(u_h^n)$ は n に関して単調増加で, 特に次を満たす:

$$\frac{K(u_h^{n+2}) - K(u_h^{n+1})}{\Delta t_{n+1}} \geq \frac{K(u_h^{n+1}) - K(u_h^n)}{\Delta t_n} + \Delta t_n (K(u_h^{n+1}))^p.$$

補題 2.5 の離散版と言えるのが次の補題である:

補題 4.8 次が成立する:

$$\frac{K(u_h^{n+1}) - K(u_h^n)}{\Delta t_n} \geq \sqrt{\frac{1}{p+1} K(u_h^n) + M_1}.$$

ここで,

$$M_1 = \frac{K(u_h^1) - K(u_h^0)}{\Delta t_0} - \frac{1}{p+1} K(u_h^0)^{p+1}.$$

また, $G(z)$ を

$$G(z) = \sqrt{\frac{1}{p+1} z^{p+1} + M_1}$$

で定める.

補題 4.7, 補題 4.8 より, 次の補題を示せる. つまり, (C) の解は有限時間で爆発するということを示せるということである:

補題 4.9 τ によらない正定数 C が存在し、次が成立する:

$$T(\tau, h) \leq 2 \left(\int_{K(u_h^n)}^{\infty} \frac{dz}{G(z)} + C\tau \right).$$

特に, $T(\tau, h) < \infty$.

補題 4.9, 定理 4.3 より, ステップ 2 を証明することができる.

注意 4.10 (A) は, 補題 4.8 を満たすことが証明できないので, ステップ 2 を示すことができない.

補題 4.8 を示せば, 常微分方程式の爆発に関する結果 (詳しくは Cho, Hamada and Okamoto[2] を参照せよ.) を応用することで, 補題 4.9 が示され, 定理 4.4 が示される.

我々が考えたいのは偏微分方程式の爆発問題であるが, 偏微分方程式のスキームを書き換え, [2] に記載されている常微分方程式のスキームの結果に帰着できれば, 常微分方程式の議論を用いることができる.

(C) は補題 4.7, 補題 4.8 を示せば, 常微分方程式の議論に帰着できる. ここでは (C) が補題 4.7, 補題 4.8 を満たすことを示す.

[補題 4.7 の証明] 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \frac{K(\phi_h^{n+\frac{3}{2}}) - K(\phi_h^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta t_n} &= \sum_{j=1}^J \frac{\phi_j^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t_n} h \\ &= \sum_{j=0}^J \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_j^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{3}{2}}}{h} + \frac{\phi_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{h} \right) + (u_j^{n+1})^p \right\} h. \end{aligned}$$

(C) の解に周期境界条件を課しているので, 次が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^J \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{\phi_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{h} \right) = 0.$$

一方で, Jensen の不等式より,

$$\sum_{j=1}^J (u_j^{n+1})^p h \geq \left(\sum_{j=1}^J u_h^{n+1} h \right)^p = (K(u_h^{n+1}))^p$$

が成り立つ. したがって, 次を得る:

$$\frac{K(\phi_h^{n+\frac{3}{2}}) - K(\phi_h^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta t_n} \geq (K(u_h^{n+1}))^p. \quad (4.3)$$

同様の計算により,

$$\frac{K(u_h^{n+1}) - K(u_h^n)}{\Delta t_n} = K(\phi_h^{n+\frac{1}{2}}) \quad (4.4)$$

を得る. (4.3), (4.4) より, 次を得る:

$$\frac{K(u_h^{n+2}) - K(u_h^{n+1})}{\Delta t_{n+1}} - \frac{K(u_h^{n+1}) - K(u_h^n)}{\Delta t_n} \geq \Delta t_n (K(u_h^{n+1}))^p.$$

したがって, 補題 4.7 が示された. □

[補題 4.8 の証明] 補題 4.7 より, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \left(\frac{K(u_h^{n+2}) - K(u_h^{n+1})}{\Delta t_{n+1}} \right)^2 &\geq \frac{K(u_h^{n+1}) - K(u_h^n)}{\Delta t_n} \left(\frac{K(u_h^{n+1}) - K(u_h^n)}{\Delta t_n} + \Delta t_n (K(u_h^n))^p \right) \\ &= \left(\frac{K(u_h^{n+1}) - K(u_h^n)}{\Delta t_n} \right)^2 + \left(\frac{K(u_h^{n+1}) - K(u_h^n)}{\Delta t_n} \right)^2 (\Delta t_n)^p (K(u_h^n))^p \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{K(u_h^{n+2}) - K(u_h^{n+1})}{\Delta t_{n+1}} \right)^2 - \left(\frac{K(u_h^1) - K(u_h^0)}{\Delta t_0} \right)^2 \\ &\geq \sum_{k=0}^n \left(K(u_h^{k+1}) - K(u_h^k) \right) (K(u_h^{k+1}))^p \\ &\geq \int_{K(u_h^0)}^{K(u_h^{n+1})} x^p dx \\ &= \frac{1}{p+1} (K(u_h^{n+1})^{p+1} - K(u_h^0)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

したがって, 補題 4.8 が示された. (A) は, (4.5) が成り立たないので, 補題 4.8 を示すことができず, 爆発時間を近似できない.

補題 4.8, 補題 4.9 の証明は, それぞれ, 補題 2.4, 補題 2.5 の証明を (C) で再現していると言える.

5 具体的な方程式に対する数値例

(3.1) において, $p = 4$ であり, 初期条件が, $u_0(x) = 10 \sin(4\pi x) + 1.5$, $u_1(x) = 100$ である場合を考える. $h = 10^{-2}$, $\gamma = \tau/h = 1/2$ とし, x の計算範囲を $[0, 1]$ とする. 図 1 は, 横軸が x , 縦軸が u の数値解の絶対値である.

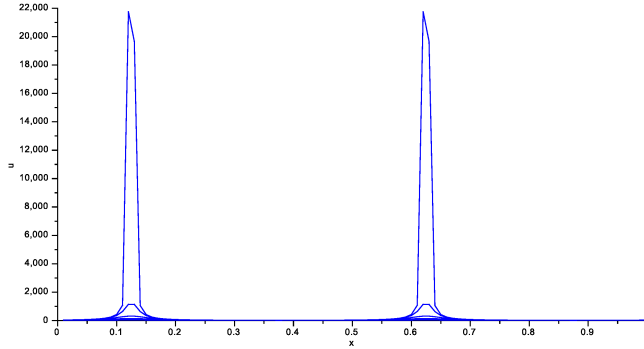


図 1: (C) を適用した u の数値解の爆発 .

図 1 より, ある程度時間が経つと, u の数値解の絶対値が発散しており, 補題 4.9 が再現されている (有限時間で数値解が爆発している) ことが分かる.

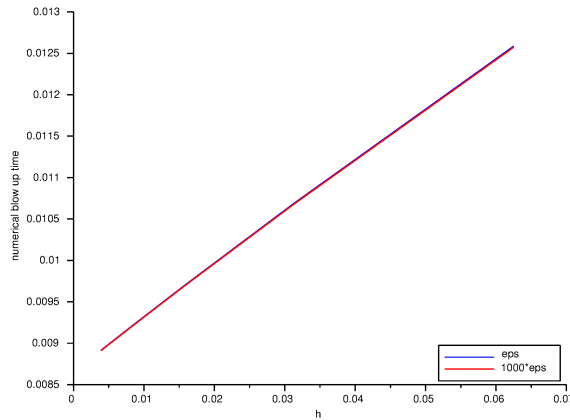


図 2: 数値爆発時間の収束.

図 2 は, 横軸が空間の刻み幅 h , 縦軸は数値爆発時間

$$T^\# = \min\{t_n \mid \|\phi^n\|_{l^\infty}^{-1} \leq \text{eps}\}.$$

である. ($\text{eps}=10^{-12}$ と, 10^{-9} の $T^\#$ を plot している.) 空間の刻み幅 h を小さくしていくと, 数値爆発時間 $T^\#$ も一次関数的に減少していくのが分かる. したがって, 定理 4.4 より, この関数と縦軸のぶつかる時間が (1.1) の解 u の爆発時間であることが予測される.

6 おわりに

Cho[3]は空間1次元の非線形波動方程式に対して、その爆発を再現するスキームを提案したが、その手法は、スキームの収束証明ができないという難点があった。この問題に対し、本論文では非線形波動方程式を時間・空間1階の方程式系に書き直して離散化することで、スキームの収束証明及び、数値爆発時間の収束の証明ができるスキームを提案し、解析方法の概略を説明した。

しかしながら、この手法は、(1.1)の解 u の L^∞ ノルムが発散する時間と $K(u(t))$ で定義した積分量が発散する時間が等しいという仮定をおいて議論をしている。このような仮定が、いつ成り立つのかは、筆者の知る限りでは知られていないのでこれはとても強い仮定と言える。この仮定を無くしても爆発を再現できるようなスキームの研究が残された課題である。

参考文献

- [1] Y. G. Chen: *Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$* . J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **33** (1986), 541-574.
- [2] C.-H. Cho, S. Hamada and H. Okamoto: *On the finite difference approximation for a parabolic blow-up problems*, Japan J. Indust. Appl. Math., **24**(2007), 105-134.
- [3] C.-H. Cho: *A finite difference scheme for blow-up solutions of nonlinear wave equations*, Numer. Math. Theory Methods Appl., **3**(2010), 475-498.
- [4] L. C. Evans: *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [5] A. Friedman and B. McLeod: *Blow-up positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J., **2** (1985),425-447.
- [6] R. T. Glassey: *Blow-up theorems for nonlinear wave equations*, Math. Z. **132** (1973), 183-203.
- [7] T. Nakagawa: *Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$* . Appl. Math. Optim, **2** (1976), 337-350.
- [8] N. Saito and T. Sasaki: 準備中.
- [9] T. Sasaki: *A second-order time-discretization scheme for a system of nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci., **90** (2014) 15-20.