

数値積分誤差の影響を受けない特性曲線有限要素法

早稲田大学大学院基幹理工学研究科 内海晋弥 (su48@fuji.waseda.jp)

早稲田大学理工学術院 田端正久 (tabata@waseda.jp)

Shinya Uchiumi (Graduate School of Fundamental Science and Engineering,
Waseda University)

Masahisa Tabata (Faculty of Science and Engineering, Waseda University)

1 はじめに

特性曲線有限要素法は、流れ問題に対する有力な解法である。しかし、従来のスキームでは合成関数項に数値積分が使われることによって理論で示された収束結果が得られず、また、発散する数値例も存在する。P1有限要素に対しては質量集中化 [2] を用いてこの問題は解決される。本研究では、移流拡散方程式の P1, P2 有限要素近似に対して、近似流速を用い、厳密に積分を行うことにより、数値積分誤差の影響がない安定なスキームを構成する。スキームの収束性を示し、その理論結果が数値計算で実現されることを報告する。

本稿では略記号 $L^2(H^1) = L^2(0, T; H^1(\Omega))$ を用いる。 $L^\infty(W^{1,\infty}), L^\infty(L^2)$ などと同様である。

2 移流拡散方程式と近似流速

$\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数とする移流拡散問題：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi - \nu \Delta \phi = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1a)$$

$$\phi = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad (1b)$$

$$\phi = \phi^0, \quad x \in \Omega, t = 0 \quad (1c)$$

を考える。ここに、 Ω は $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ の有界領域、 $\Gamma \equiv \partial\Omega$ はその境界、 $T > 0$ は時刻、 $\nu > 0$ は拡散係数、 $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \phi^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ はそれぞれ与えられた関数である。 $u(x, t) = 0 (x \in \Gamma, \forall t \in (0, T))$ を仮定する。

命題 1. $f \in L^2(H^{-1}), \phi^0 \in L^2(\Omega), u_i \in L^\infty((L^\infty)^d) (i = 1, 2)$ を仮定する。このとき、(1) で $u = u_i (i = 1, 2)$ としたときの解 $\phi_i \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) (i = 1, 2)$ が一意に存在する。さらに $u_i \in L^\infty((W^{1,\infty})^d) (i = 1 \text{ 又は } 2)$ ならば正定数 $c(1/\nu, T, \|u_1\|_{L^\infty((L^\infty)^d)}, \|u_2\|_{L^\infty((L^\infty)^d)}, \sup_{\Omega \times [0, T]} \nabla \cdot u_i) (i = 1 \text{ 又は } 2)$ が存在し、

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^\infty(L^2)} + \sqrt{\nu} \|\nabla(\phi_1 - \phi_2)\|_{L^2(L^2)} \leq c \|u_1 - u_2\|_{L^\infty((L^\infty)^d)} (\|\phi^0\|_{L^2} + \|f\|_{L^2(H^{-1})})$$

が成立する。

3 数値積分誤差の影響を受けない特性曲線有限要素法

$\{\mathcal{T}_h\}_h$ を $\bar{\Omega}$ の正則な三角形分割列とし, W_h を P1 または P2 有限要素空間とする. $\Pi_h^{(k)} : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow W_h$ を $P_k (k = 1, 2)$ 有限要素空間への補間作用素とし, $f_h \equiv \Pi_h^{(k)} f$ とする. $V_h(g_0) \subset W_h$ を境界節点で g_0 の値をとる関数の全体とし, $V_h \equiv V_h(0)$ とする. $\Delta t > 0$, $N_T \equiv [T/\Delta t]$ とする. $u^n(x) \equiv u(x, n\Delta t)$ とし, ϕ^n など同様に定める. \circ を関数の合成とし, (\cdot, \cdot) を L^2 内積とする. $u_h \equiv \Pi_h^{(1)} u$ とおく.

$$X_1^n(x) \equiv x - u^{n+1}(x)\Delta t, \quad X_{1h}^n(x) \equiv x - u_h^{n+1}(x)\Delta t$$

とおく.

スキーム 1 (従来のスキーム). 次を満たす $\phi_h^n \in V_h, n = 0, \dots, N_T$, を求めよ.

$$\left(\frac{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_1^n}{\Delta t}, \psi_h \right) + \nu (\nabla \phi_h^{n+1}, \nabla \psi_h) = (f_h^{n+1}, \psi_h), \forall \psi_h \in V_h, 0 \leq n \leq N_T - 1, \quad (2a)$$

$$\phi_h^0 = \Pi_h \phi_0. \quad (2b)$$

スキーム 1 において, X_1^n を X_{1h}^n で置き換えたものを **スキーム 2** とする.

注意 1. スキーム 1 では合成関数項 $(\phi_h^n \circ X_1^n, \psi_h)$ の計算に数値積分が用いられ, 誤差が生じる. スキーム 2 では $(\phi_h^n \circ X_{1h}^n, \psi_h)$ を厳密に積分することができる.

関数集合 $\psi = \{\psi^n\}_{n=0}^{N_T}$ に対して, ノルム

$$\|\psi\|_{\ell^\infty(L^2)} \equiv \max\{\|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}; n = 0, \dots, N_T\}, \quad \|\dot{\psi}\|_{\ell^2(L^2)} \equiv \left\{ \Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|\dot{\psi}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

を定義する.

定理 1. ϕ_h を $P_k (k = 1, 2)$ 要素を用いたスキーム 2 の解とする. 正定数 $c(1/\nu, T, u, \phi)$ が存在し,

$$\|\phi - \phi_h\|_{\ell^\infty(L^2)} + \sqrt{\nu} \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{\ell^2(L^2)} \leq c(h^k + \Delta t). \quad (3)$$

が成立する.

注意 2. 数値積分を厳密に行えば, スキーム 1 に対して (3) の評価が成立することが知られている (Rui-Tabata[3]).

定理 1 の証明. $\|\cdot\|_Y \equiv \|\cdot\|_{\ell^\infty(L^2)} + \sqrt{\nu} \|\cdot\|_{\ell^2(L^2)}$ と表す. 三角不等式から,

$$\|\phi - \phi_h\|_Y \leq \|\phi - \phi^{(h)}\|_Y + \|\phi^{(h)} - \phi_h\|_Y$$

である. 命題 1 を $u_1 = u, u_2 = u_h$ として適用し, Rui-Tabata[3] の結果と合わせて $O(h^k + \Delta t)$ を得る. \square

定理 1 から, P1, P2 要素を用いるとき, スキーム 2 では最適オーダーの収束結果が得られることがわかる.

4 厳密な積分を行うアルゴリズム

4.1 TST アルゴリズム

まず、従来の有限要素法における右辺ベクトルの標準的な求め方を述べる. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ϕ_α を節点 P_α に関する基底関数とする. 求めるべき積分は, 要素ごとに分けて書くと

$$\begin{aligned} (\Pi_h f, \phi_\alpha) &= \int_{\Omega} \Pi_h f \phi_\alpha dx = \int_{\text{supp}(\phi_\alpha)} \Pi_h f \phi_\alpha dx \\ &= \sum_{K \in \{K; K \cap \text{supp}(\phi_\alpha) \neq \emptyset\}} \int_K \Pi_h f \phi_\alpha dx \end{aligned}$$

となる. 各要素ごとの積分は,

$$\begin{aligned} (\Pi_h f, \phi_\alpha)_K &= \int_K \Pi_h f \phi_\alpha dx = \int_K \sum_{\beta} f(P_\beta) \phi_\beta \phi_\alpha dx \\ &= \sum_{\beta} M_{\alpha\beta} f(P_\beta) \end{aligned}$$

となる. ここに, $M_{\alpha\beta} \equiv \int_K \phi_\beta \phi_\alpha dx$ は要素質量行列である.

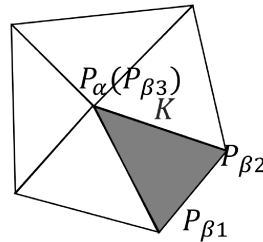


図 1: P_α と $\text{supp} \phi_\alpha$ に含まれる要素

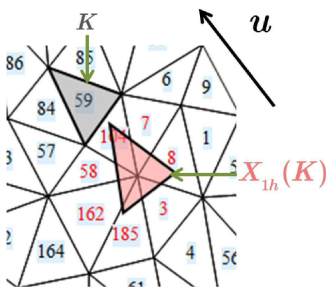


図 2: 上流要素群 $U(K)$

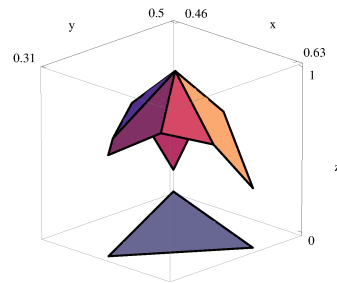


図 3: 合成関数 $\phi_h \circ X_{1h}$

X_{1h}^n を X_{1h} と書く. 合成関数 $\phi_h \circ X_{1h}$ は一般に要素上で滑らかでない (図 3). (2a) の項 $(\phi_h \circ X_{1h}, \psi_h)$ の積分を厳密に行う田中-鈴木-田端 (以下 TST) [4] のアルゴリズムを述

べる. α, β を大域節点番号, ϕ_α を節点 P_α に関する基底関数, $K \in \mathcal{T}_h$: 要素とする. 標準的な右辺ベクトルの求め方と同様に,

$$\Phi_\alpha^K \equiv \int_K \phi_h \circ X_{1h}(x) \phi_\alpha(x) dx = \sum_\beta B_{\alpha\beta}^K \phi_h(P_\beta),$$

を計算する. ここに $B_{\alpha\beta}^K \equiv \int_K \phi_\beta \circ X_{1h}(x) \phi_\alpha(x) dx$. である. 上流要素群 $U(K)$ を

$$U(K) \equiv \{e \in \mathcal{T}_h; \text{int}(e) \cap \text{int}X_{1h}(K) \neq \emptyset\}.$$

で定める. 例えば図2において

$$U(K) = \{e_3, e_7, e_8, e_{58}, e_{104}, e_{162}, e_{185}\}$$

である. $e \in U(K)$ とし, 多角形 $I(K, e)$ を

$$I(K, e) \equiv K \cap (X_{1h})^{-1}(e).$$

で定める.

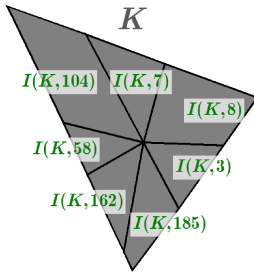


図 4: K の部分領域 $I(K, e)$

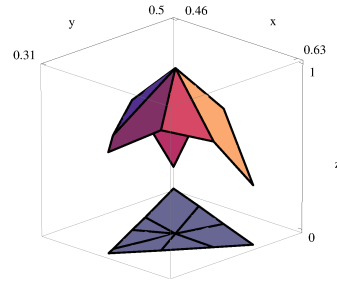


図 5: 合成関数 $\phi_h \circ X_{1h}$ と K の分割

$$B_{\alpha\beta}^{I(K,e)} \equiv \int_{I(K,e)} \phi_\beta \circ X_{1h}(x) \phi_\alpha(x) dx$$

とおくと, 被積分関数は $I(K, e)$ 上 2 次式 (P1 要素) あるいは 4 次式 (P2 要素) であり, その積分を厳密に行うことができる. これらの和

$$B_{\alpha\beta}^K = \sum_{e \in U(K)} B_{\alpha\beta}^{I(K,e)}.$$

で $B_{\alpha\beta}^K$ を求める.

4.2 TST アルゴリズムの改良

TST アルゴリズムに改良を施して計算量を減らす. 簡単のために $T \equiv I(K, e)$ が三角形になる場合を考え,

$$\Phi_\alpha^T \equiv \int_T \phi_h \circ X_{1h}(x) \phi_\alpha(x) dx$$

の計算について述べる. $\phi_\alpha, \phi_\beta, \phi_i, \phi_j$ はそれぞれ

- K の局所節点 P_α
- e の局所節点 Q_β
- T の局所節点 R_i, R_j

に関する基底関数である (図6). 添え字は $\alpha, \beta, i, j = 1, \dots, N, N = 3$ (P1 要素), $N = 6$ (P2 要素) を動く. 計算すべき対象は

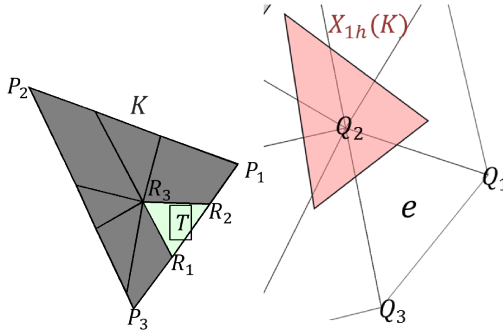


図 6: 要素 K, e, T とその局所節点

$$\begin{aligned}
 \Phi_\alpha^T &= \int_T \phi_h \circ X_{1h}(x) \phi_\alpha(x) dx \\
 &= \sum_\beta \int_T \phi_h(Q_\beta) \phi_\beta \circ X_{1h}(x) \phi_\alpha(x) dx \\
 &= \sum_\beta \sum_i \sum_j \int_T \phi_h(Q_\beta) \phi_\beta \circ X_{1h}(R_i) \phi_i(x) \phi_\alpha(R_j) \phi_j(x) dx \\
 &= \sum_\beta \sum_i \sum_j \phi_\alpha(R_j) m_{ij} \phi_\beta \circ X_{1h}(R_i) \phi_h(Q_\beta)
 \end{aligned}$$

である. ここに $m_{ij} \equiv \int_T \phi_i \phi_j dx$. TST と改善した手法での計算の順序は以下のとおりである.

$$\sum_\beta \left\{ \sum_j \phi_\alpha(R_j) \left(\sum_i m_{ij} \phi_\beta \circ X_{1h}(R_i) \right) \right\} \phi_h(Q_\beta) \quad (\text{TST})$$

$$\sum_j \phi_\alpha(R_j) \left\{ \sum_i m_{ij} \left(\sum_\beta \phi_\beta \circ X_{1h}(R_i) \phi_h(Q_\beta) \right) \right\} \quad (\text{Present})$$

これらを次のように略記する.

$$\begin{aligned}
 &\sum_\beta \left\{ \sum_j k_{\alpha j} \left(\sum_i m_{ij} e_{i\beta} \right) \right\} v_\beta \\
 &\sum_j k_{\alpha j} \left\{ \sum_i m_{ij} \left(\sum_\beta e_{i\beta} v_\beta \right) \right\}
 \end{aligned}$$

(TST)は行列演算 $\{K(ME)\}v$ となり、乗算が $(2N^3 + N^2)$ 回である。一方、(Present)は $K\{M(Ev)\}$ であり、乗算が $3N^2$ 回である。したがって、計算効率を向上させることができる。

5 数値結果

空間次元 $d = 2$ での数値結果を述べる。数値積分を用いるスキーム1とスキーム2を比較した。スキーム1では、Gauss型5次の数値積分公式[1]を用いた。積分点は図7に示されている。P1,P2要素それぞれについて行った。代表長 h は境界辺の長さとした。時間刻み Δt をP1要素では $\Delta t = c_1 h$, P2要素では $\Delta t = c_2 h^2$ とする。相対誤差 E を

$$E \equiv \frac{\|\Pi_h \phi - \phi_h\|_{\ell^\infty(L^2)}}{\|\Pi_h \phi\|_{\ell^\infty(L^2)}}$$

で定義する。

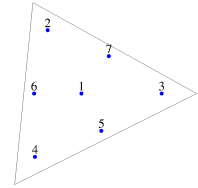


図7: 5次精度数値積分公式の積分点

5.1 Rotating Gaussian hill問題

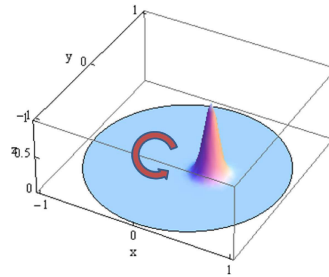


図8: Rotating Gaussian hill問題の厳密解 ϕ_e

問題 1 (Rotating Gaussian hill). (1) で, Ω を単位円板とし,

$$\phi_e(x, t) \equiv \frac{\sigma}{\sigma + 4\nu t} \exp \left\{ -\frac{(\bar{x}_1(t) - x_{1,c})^2 + (\bar{x}_2(t) - x_{2,c})^2}{\sigma + 4\nu t} \right\}$$

$$\bar{x}_1(t) \equiv x_1 \cos t + x_2 \sin t, \bar{x}_2(t) \equiv -x_1 \sin t + x_2 \cos t,$$

$$(x_{1,c}, x_{2,c}) \equiv (0.25, 0), \sigma \equiv 0.01$$

$$u(x, t) \equiv (-x_2, x_1), f \equiv 0,$$

$$g(x, t) \equiv \phi_e(x, t) \quad (x \in \Gamma, t \in (0, T))$$

$$\phi^0(x) \equiv \phi_e(x, 0) \quad (x \in \Omega), T = 2\pi, \nu = 10^{-5}$$

とする。

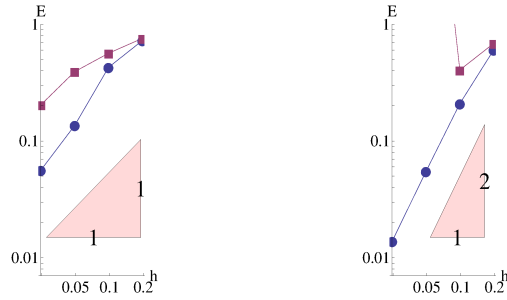


図 9: 相対誤差 E の代表要素長 h に関する収束性. P1 要素 (左), P2 要素 (右). ■: スキーム 1, ●: スキーム 2

解は $\phi = \phi_e$ である. P1: $\Delta t = c_1 h$ ($c_1 = \frac{4}{5\pi} \doteq 0.255$), P2: $\Delta t = c_2 h^2$ ($c_2 = \frac{128}{5\pi^2} \doteq 2.59$) とした. 図 9 は相対誤差 E の両対数グラフである. P1, P2 いずれの場合も, スキーム 2 の方が誤差が小さい. また, P2 要素では, スキーム 1 では $h \doteq 0.049, h \doteq 0.025$ で誤差が非常に大きくなりグラフに表示できていないが, スキーム 2 では理論的な収束オーダー 2 が観測される.

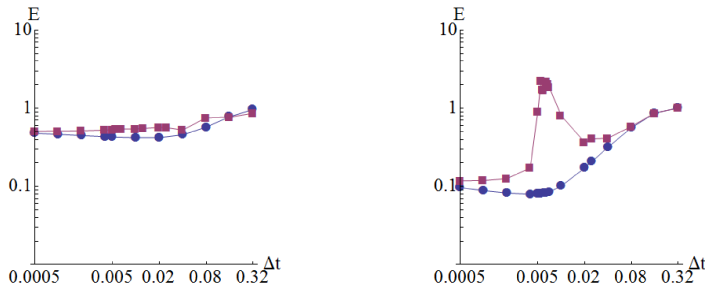


図 10: 相対誤差 E の時間刻み Δt 依存性. P1 要素 (左), P2 要素 (右). ■: スキーム 1, ●: スキーム 2

次に, $h = 2\pi/64 \doteq 0.0982$ を固定し, Δt と誤差 E の関係を図 10 に両対数グラフで示した. P1 要素では, Δt の変化に対しての E の変化はあまりない. 一方 P2 要素において, スキーム 1 では, $\Delta t = 0.0065$ 付近で E が非常に大きくなっている. スキーム 2 では Δt の変化に対して, E は大きく変化しない. スキーム 2 は安定性が証明されているので自然な結果である.

図 11 は $h = 2\pi/64 \doteq 0.0982, \Delta t = 0.0065, n\Delta t \doteq 2\pi$ の時の解 ϕ_h^n である. P1 要素ではスキーム 1 の解はスキーム 2 の解より振動している. P2 要素ではスキーム 1 の解は激しく振動し, 不安定になっているが, スキーム 2 の解は安定に計算ができています.

数値積分を用いるスキーム 1, TST アルゴリズムによるスキーム 2, その改良の計算時間を比較した. $h = 2\pi/128 \doteq 0.049, \Delta t = 0.00625$, OS: Windows 7, CPU: Intel Xeon Processor E3-1245 (3.30GHz), コンパイラ: Visual C++ 2010, 最適化オプション: 無し の条件で行った. 図 12 は計算時間を示している. アルゴリズムの改良により, P1, P2 い

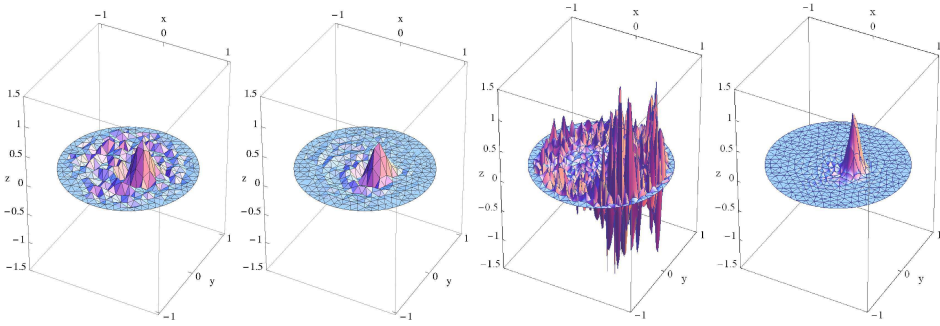


図 11: 解 ϕ_h^n ($n\Delta t \equiv 2\pi$). 左から, スキーム 1/P1, スキーム 2/P1, スキーム 1/P2, スキーム 2/P2

ずれのときも計算時間が短縮されている. 特に, P2 のときに時間短縮が大きい. スキーム 1 と今回の改良されたスキームの計算時間を比較すると, いずれも 2 倍程度に収まっている.

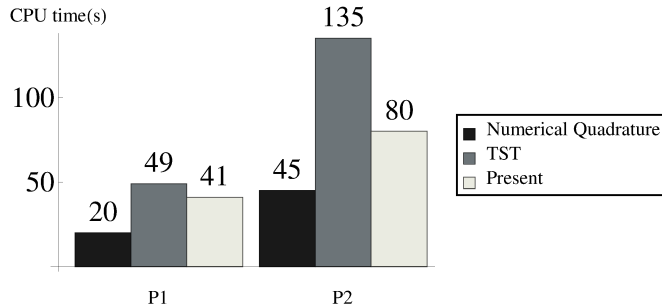


図 12: 各スキームの計算時間

5.2 流速が 1 次式でない問題

問題 2. (1) で $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ とし,

$$\begin{aligned} \phi_e(x, t) &\equiv \exp(x + y + t) \\ u(x, t) &\equiv (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2, \sin \pi x_1 \sin \pi x_2), \\ f &\equiv \exp(x + y + t)(1 - 2\nu + 2 \sin \pi x_1 \sin \pi x_2), \\ g(x, t) &\equiv \phi_e(x, t) \quad (x \in \Gamma, t \in (0, T)) \\ \phi^0(x) &\equiv \phi_e(x, 0) \quad (x \in \Omega), \\ T = 1, \nu &= 10^{-5} \end{aligned}$$

とする.

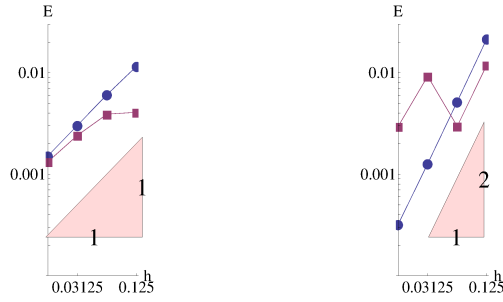


図 13: 相対誤差 E の代表要素長 h に関する収束性. P1 要素 (左), P2 要素 (右). ■ : スキーム 1, ● : スキーム 2

解は $\phi = \phi_e$ である. P1: $\Delta t = \frac{1}{8}h$, P2: $\Delta t = h^2$ と時間刻みを設定した. 図 13 は相対誤差 E の両対数グラフである. この問題は流速が 1 次式で無いため, スキーム 2 では近似流速を使用するが, 有限要素解の収束のオーダーに影響は及ぼさない. そのことは図 13 において確認できる. ただし, 一部, スキーム 1 の方が良い結果が出ている.

6 終わりに

特性曲線有限要素法において, 流速を P1 要素で近似し, 積分を厳密に行うことにより, 安定で最適な収束精度が得られることを示した. 数値積分を伴う従来のスキームでは発散することがあるが, 本スキームではそれが起こらないことを示した. 今後は, 3次元問題への拡張, Navier-Stokes 方程式の有限要素近似への応用が課題である.

参考文献

- [1] F. Hecht. Freefem++. <http://www.freefem.org/ff++/>.
- [2] O. Pironneau and M. Tabata. Stability and convergence of a Galerkin-characteristics finite element scheme of lumped mass type. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 64, No. 10-12, pp. 1240–1253, 2010.
- [3] H. Rui and M. Tabata. A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Numerische Mathematik*, Vol. 92, pp. 161–177, 2002.
- [4] 田中克徳, 鈴木厚, 田端正久. 厳密な積分を用いる特性有限要素法. 九州大学情報基盤センター年報, Vol. 2, pp. 11–18, 2002.