

The locus of illuminating centers

宮崎大学・教育文化学部 坂田繁洋
Shigehiro Sakata
Faculty of Education and Culture,
University of Miyazaki

1 序：PISA の街灯問題と灯心

本稿では、PISA(Programme for International Student Assessment, OECD 生徒の学習到達度調査)で(15歳向けに)出題された「街灯問題」を出発点として、そこから展開される幾何学および解析学について概観する。PISA の街灯問題とは次のものである：

問題 1.1 (PISA 2003 年). 町議会は小さな三角形の形をした公園に一本の街灯を設置することにしました。その街灯は公園全体を照らすものとします。街灯はどこに設置したらよいでしょうか？

この問題に対して、PISA の用意した解答は公園の外心であった。その心は「公園 Δ に対して、街灯を点 $x \in \Delta$ に設置したときに最も暗くなる点(三角形の頂点)をできる限り(均等に)明るくすべきである」というものである(と問題 1.1 を知る数学者の何人かは言っている)。言い換えれば、関数

$$\Delta \ni x \mapsto \max_{y \in \Delta} |x - y| \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

を最小にすべきであるというものである。

柴田勝征氏(福岡大学)は、[18]で、PISA の解答に対して、2つの視点から異を唱えた。1つは、公園が鈍角三角形である場合に、外心は公園の外側に出てしまうということである。2つめは「どうして最も暗い点をできる限り(均等に)明るくしなければいけないのか？」という問題の数学化に関することである。柴田氏は「街灯は電力の浪費を最低限に抑えるような位置に設置すべきである」として、PISA の街灯問題を以下の手順で定式化し、1つの解答を与えた：

Step 1 $\Delta \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ を三角形, $h > 0$ を街灯の高さ, $x \in \mathbb{R}^2$ を街灯の足の位置とする。

Step 2 Kepler の逆 2 乗則(光源から空間一様に放射される光の流束の密度は光源からの距離の 2 乗に反比例する)の下で、1点 $y \in \Delta$ の「明るさ」を

$$a(x, y, h) = \frac{1}{(|x - y|^2 + h^2)^{2/2}} \frac{h}{(|x - y|^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{h}{(|x - y|^2 + h^2)^{3/2}} \tag{1.2}$$

と定義する。

Step 3 三角形 Δ 全体の「明るさ」を

$$A_{\Delta}(x, h) = \int_{\Delta} a(x, y, h) dy \tag{1.3}$$

と定義し、関数 $A_{\Delta}(\cdot, h) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を最大にする点に街灯を設置すべきである。

定義 1.2 ([18]). 点 $c(h) \in \mathbb{R}^2$ は三角形 Δ の高さ $h > 0$ の灯心 (illuminating center) であるとは, $c(h)$ が関数 $A_\Delta(\cdot, h)$ の最大点であることとする。すなわち,

$$A_\Delta(c(h), h) = \max_{x \in \mathbb{R}^2} A_\Delta(x, h)$$

が成り立つこととする。

柴田氏は, 平面内の三角形に対して, 灯心という新しい中心を定義したが, その考察は次のようにして一般化される:

Step 1' $K \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ を体 (body, 有界な開集合の閉包), $h > 0$ を街灯の高さ, $x \in \mathbb{R}^m$ を街灯の足の位置とする。

Step 2' $m + 1$ 次元 Euclid 空間内の m 次元球面の表面積は半径の m 乗に比例するから, Kepler の逆 m 乗則の下で, 1 点 $y \in K$ の「明るさ」を

$$a(x, y, h) = \frac{1}{(|x - y|^2 + h^2)^{m/2}} \frac{h}{(|x - y|^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{h}{(|x - y|^2 + h^2)^{(m+1)/2}} \quad (1.4)$$

と定義する。

Step 3' K 全体の「明るさ」を

$$A_K(x, h) = \int_K a(x, y, h) dy \quad (1.5)$$

と定義し, 関数 $A_K(\cdot, h) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を最大にする点を K の高さ $h > 0$ の灯心とよぶ。

体 K の明るさの関数 A_K についてすぐにわかる事実をいくつか挙げておく。

注意 1.3. $A_K(x, h)$ は K の (x, h) における立体角に等しい。すなわち, K を底面, (x, h) を頂点とする錐体 $(x, h) - K$ と (x, h) を中心とする単位球面 $S^m + (x, h)$ との共通部分の面積は $A_K(x, h)$ に等しい。この事実は直接計算によって確かめられる:

$$p_{(x,h)}(y) := \frac{(y, 0) - (x, h)}{|(y, 0) - (x, h)|} = -\frac{(x - y, h)}{\sqrt{|x - y|^2 + h^2}}, \quad A_K(x, h) = \text{Area}(p_{(x,h)}(K)).$$

したがって, 高さ h の灯心は高さ h で K を最もよく見渡せる点と言い換えられる。

注意 1.4. 関数 A_K は次の上半空間における Laplace 方程式の境界値問題の解である:

$$(1) \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \right) A_K(x, h) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad h > 0$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0^+} A_K(x, h) = \frac{\text{Area}(S^m)}{2} \chi_K(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial K$$

このことから, 灯心は上半空間 $\mathbb{R}^m \times (0, +\infty)$ における Laplace 方程式の解を $\mathbb{R}^m \times \{h\}$ に制限して \mathbb{R}^m 上の関数と思ったときの最大点と言える。したがって, 灯心の研究は上半空間における Laplace 方程式の解の形状に関連する。

灯心の研究を行う際, 以下のことが (基本的な) 問題となる:

- 街灯の高さに依らず、灯心は存在するか？
- 灯心が存在したとすれば、それは K に対してどのような位置にあるか？
- 灯心が存在したとすれば、それは何個あるか？特に、灯心が一意に定まるための十分条件はどのようなものか？
- 灯心は高さ h に依存して決まるが、 $h \rightarrow +\infty$ としたとき、 $h \rightarrow 0^+$ としたときの極限点は何か？

以下、高さ h の灯心の集合を

$$A_K(h) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \mid A_K(c, h) = \max_{x \in \mathbb{R}^m} A_K(x, h) \right\} \quad (1.6)$$

とおく。

2 灯心の存在と位置

本章では、 K を \mathbb{R}^m の体 (有界な開集合の閉包) として、 K の灯心の存在と位置について考察する。

命題 2.1 ([13]). 任意の $h > 0$ に対して、灯心は存在して、それらのすべては K の凸包 (K を含む (包含関係に関して) 最小の凸閉集合) に含まれる。

証明. 点 p を K の凸包の補集合から任意にとる。 p と K の凸包との距離を与える点を p' とおく。点 p' を通り、線分 pp' に垂直な超平面に関して、 K は p と反対側にあるから、任意の $y \in K$ に対して、 $|p - y| > |p' - y|$ が成り立つ。積分核 $a(x, y, h)$ は距離 $|x - y|$ に関して狭義単調減少であるから、 $a(p, y, h) < a(p', y, h)$ が成り立つ。よって、 $A_K(p, h) < A_K(p', h)$ が成り立ち、 K の凸包の補集合で $A_K(\cdot, h)$ は最大にならない。

一方で、関数 $A_K(\cdot, h)$ は連続で、 K の凸包はコンパクトであるから、最大点が存在する。 \square

灯心は体 K の「中心」であるから、その位置は K の凸包よりも K の内側にあることを期待したい。Alexandrov の折り返し原理 ([5, 17]) を用いると、 K の凸包の内部に絞り込むことができる。

定義 2.2 ([11]). 方向 $v \in S^{m-1}$ と実数 b を 1 つとる。体 K の v 方向に原点から b 以上離れた部分を

$$K_{v,b}^+ = \{p \in K \mid p \cdot v \geq b\}$$

とおく。超平面 $H_{v,b} := \{p \in \mathbb{R}^m \mid p \cdot v = b\}$ に関する折り返しを $\text{Ref}_{v,b}$ で表す：

$$\text{Ref}_{v,b} : \mathbb{R}^m \ni x \mapsto x - 2(x \cdot v - b)v \in \mathbb{R}^m$$

方向 v を 1 つ固定して、高さ b を下げることにより超平面 $H_{v,b}$ に関して $K_{v,b}^+$ を折り返し、その像が K に含まれるような最小の高さを $l(v)$ で表す：

$$l(v) = \min \left\{ b \in \mathbb{R}^m \mid \forall a \geq b, \text{Ref}_{v,b} \left(K_{v,b}^+ \right) \subset K \right\}$$

体 K の **minimal unfolded region** を

$$Uf(K) = \bigcap_{v \in S^{m-1}} \{p \in \mathbb{R}^m \mid p \cdot v \leq l(v)\}$$

で定義する。

注意 2.3. 体 K の minimal unfolded region は, K が凸の場合に, 熱方程式の解の空間最大点 (ホットスポット) の位置を調べるために, [2] で, [11] と同時期に独立に心臓 (heart) として導入された。[2] では, $\heartsuit(K)$ と表記された。ここでは, 凸でない体も扱っていた [11] の名前と記号を用いる。

例 2.4 ([3, 11]). (1) K を円板 3 枚の非交和とする。このとき, $Uf(K)$ は各円板の中心を結んでできる三角形である (図 1)。

(2) K を鋭角三角形とする。このとき, $Uf(K)$ は最大辺と最小辺の垂直二等分線, 最大角と最小角の二等分線で囲まれる四角形である (図 2)。特に, 内心と外心は $Uf(K)$ の頂点である。

(3) K を鈍角三角形とする。このとき, $Uf(K)$ は最大辺, 最大辺の垂直二等分線, 最大角と最小角の二等分線で囲まれる四角形である (図 3)。特に, 内心は $Uf(K)$ の頂点である。

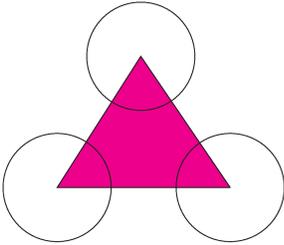


図 1: 円板 3 枚の非交和の minimal unfolded region

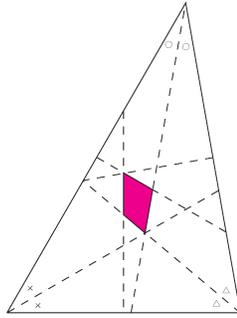


図 2: 鋭角三角形の minimal unfolded region

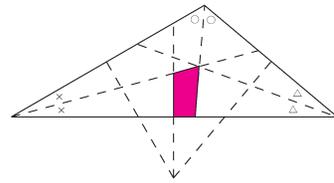


図 3: 鈍角三角形の minimal unfolded region

注意 2.5 ([11]). 体 K の minimal unfolded region に関して, 次が知られている :

- K の重心は minimal unfolded region に含まれる。特に, minimal unfolded region は空集合ではない。
- minimal unfolded region は凸である。(半空間の共通部分は凸である。)
- minimal unfolded region は K の凸包に含まれる。

その他にも minimal unfolded region の幾何学的な性質が, [3, 12, 14] などで, いくつか知られている。

定理 2.6 ([13]). 体 K の灯心は, 任意の $h > 0$ に対して, K の minimal unfolded region に含まれる。

証明. 点 x を K の minimal unfolded region の補集合から 1 つとる。ある方向 $v \in S^{m-1}$ が存在して, $x \cdot v > l(v)$ が成り立つ。 $b = (x \cdot v + l(v))/2$ とおく。 $x' = \text{Ref}_{v,b}(x)$ とおく。任意の $h > 0$ に対して, 不等式 $A_K(x', h) > A_K(x, h)$ が成り立つことを示す。

積分核 $a(\cdot, \cdot, h)$ の球対称性より, 次の関係式が得られる :

- $A_{K_{v,b}^+}(x, h) = A_{\text{Ref}_{v,b}(K_{v,b}^+)}(x', h)$
- $A_{\text{Ref}_{v,b}(K_{v,b}^+)}(x, h) = A_{K_{v,b}^+}(x', h)$

$$\bullet A_{K \setminus (K_{v,b}^+ \cup \text{Ref}_{v,b}(K_{v,b}^+))}(x, h) < A_{K \setminus (K_{v,b}^+ \cup \text{Ref}_{v,b}(K_{v,b}^+))}(x', h)$$

よって,

$$\begin{aligned} & A_K(x', h) - A_K(x, h) \\ &= A_{\text{Ref}_{v,b}(K_{v,b}^+)}(x', h) + A_{K_{v,b}^+}(x', h) + A_{K \setminus (K_{v,b}^+ \cup \text{Ref}_{v,b}(K_{v,b}^+))}(x', h) \\ &\quad - A_{K_{v,b}^+}(x, h) - A_{\text{Ref}_{v,b}(K_{v,b}^+)}(x, h) - A_{K \setminus (K_{v,b}^+ \cup \text{Ref}_{v,b}(K_{v,b}^+))}(x, h) \\ &> 0 \end{aligned}$$

を得る。すなわち, x は灯心ではない。 \square

3 灯心の個数

本章では, K を \mathbb{R}^m の体 (有界な開集合の閉包) として, K の灯心の個数, 特に一意性, について考える。

3.1 灯心が (高さに応じて) 2 個存在する例

例 3.1 ([13]). $m = 1$ で, K を同じ長さの区間の非交和とする :

$$K = [-R, -1] \cup [1, R], \quad R > 1$$

このとき,

$$A_K(x, h) = \left(\int_{-R}^{-1} + \int_1^R \right) \frac{h}{(x-y)^2 + h^2} dy$$

であるから, $y - x = h \tan \theta$ と変数変換することで, $A_K(x, h)$ を初等関数で表せる。すなわち, 直接計算により, 次を得る :

$$\bullet 0 < h < \sqrt{R + (R+1)\sqrt{R}} \text{ のとき,}$$

$$c_{\pm}(h) = \pm \sqrt{\sqrt{R((R+1) + 4h^2)} - (R + h^2)}$$

の 2 点が K の灯心である。

$$\bullet h \geq \sqrt{R + (R+1)\sqrt{R}} \text{ のとき, 原点が唯一の灯心である。}$$

例 3.2. $m = 2$ で, K を外接する同じ大きさの円板 2 枚の和集合 (図 4 の左側) とする :

$$K = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1 + 1)^2 + y_2^2 \leq 1 \right\} \cup \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1 - 1)^2 + y_2^2 \leq 1 \right\}$$

この K の minimal unfolded region は線分 $\{(y_1, 0) \mid -1 \leq y_1 \leq 1\}$ (図 4 の左側) であることがわかる。Mathematica に $A_K((x_1, 0), 1)$ ($-1 \leq x_1 \leq 1$) のグラフを描かせると, 図 4 の右側を得る。よって, 高さ 1 の灯心は 2 点ある (と十分に期待できる)。

注意 3.3. RIMS 研究会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」(2016 年 11 月 11 日-13 日)において, 例 3.2 を紹介した際, Alberto Farina 氏 (Université de Picardie Jules Verne) から「 K がある超平面に関して対称ならば, 灯心の集合はその超平面に関して対称になるか?」との質問をいただいた。一般に, 「 K が超平面 H に関して対称ならば, 関数 $A_K(\cdot, h)$ は H に関して対称である」という主張が成り立つことが示され, Farina 氏の質問に肯定的解答が与えられる。

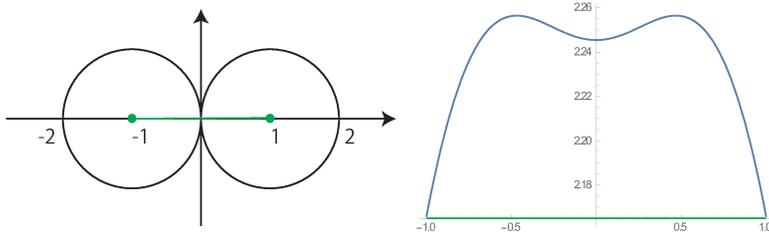


図 4: $A_K((x_1, 0), 1)$ のグラフ

証明. 超平面 H によって作られる 2つの半空間を H^+ , H^- とかく. $x \in K$ を 1つとる. x' を H に関して x と対称な点とする. 積分核 $a(\cdot, \cdot, h)$ の球対称性より

$$A_K(x, h) = \left(\int_{H^+ \cap K} + \int_{H^- \cap K} \right) a(x, y, h) dy = \left(\int_{H^- \cap K} + \int_{H^+ \cap K} \right) a(x', y, h) dy = A_K(x', h)$$

を得る. □

3.2 灯心の一意性のための高さに関する条件

例 3.2 において, 「高さが 1」という条件は本質ではなく, Mathematica を動かすための技術的な条件である. h が K の直径に比べて十分に小さい場合を考える. 直感的には, h が十分小さいとき, $A_K(x, h)$ を立体角の意味で考えると, 点 x (K を眺める位置) の非常に近くにどれだけ K の部分集合を用意するかで $A_K(x, h)$ の大小が決まるといえる. x が $(\pm 1, 0)$ 付近にあるとき, x の近くには K の部分集合がたくさんあり, K の補集合は視界の端にくる. また, x が原点付近にあるとき, x の近くには K の補集合 (眺めなくてもよい部分) が入り込んでくる. このような考察から, h が十分小さいときには $A_K(\cdot, h)$ のグラフが図 4 の右側のようになることが納得できる.

逆に, h が K の直径に比べて十分大きいとき, 高さ h の位置から K を眺めようとするとき, 視界に K の全体が入るため, K の「真ん中付近」に灯心が位置して, 灯心は一意に定まることが期待される. この期待に対して, 次の十分条件が与えられる:

命題 3.4 ([13]). 体 K に対して,

$$D(K) = \max \{|p - q| \mid p \in K, q \in Uf(K)\}$$

とおく. 任意の $h \geq \sqrt{m+2}D(K)$ に対して, 関数 $A_K(\cdot, h)$ は $Uf(K)$ で (狭義) 上に凸になる. したがって, 灯心は一意に定まる.

証明. 任意の方向 $v \in S^{m-1}$ に対して,

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} A_K(x, h) = -(m+1)h \int_K \frac{h^2 - (m+2)|x-y|^2}{(|x-y|^2 + h^2)^{(m+5)/2}} dy$$

であることが直接計算によりわかる. よって, $h \geq \sqrt{m+2}D(K)$ であれば, 関数 $A_K(\cdot, h)$ は $Uf(K)$ で (狭義) 上に凸になる. □

注意 3.5. 体 K の minimal unfolded region は K の凸包に含まれ, K の凸包の直径は K の直径であるから,

$$D(K) = \max \{|p - q| \mid p \in K, q \in Uf(K)\} \leq \max \{|p - q| \mid p \in K, q \in \text{conv } K\} = \text{diam } K$$

が成り立つ。

問題 3.6. RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」(2016年11月11日-13日)において, 例 3.2 と命題 3.4 を紹介した際, 小野寺有紹氏 (九州大学) から「 K が例 3.2 で与えられるとき, 灯心が一意に定まる最小の h を K の幾何的量で特徴付けられないか?」との質問をいただいた。これに関して, 具体的な数学的主張は得られていないので, 未解決問題としてここで提示しておく。

3.3 灯心の一意性のための体に関する条件

命題 3.4 は灯心が一意に定まるための h の十分条件である。次に生じる疑問は灯心が一意に定まるための K の十分条件である。この問題に関して, 例 3.2 を踏まえ, 今井淳氏 (千葉大学) は「 K が凸ならば, 任意の $h > 0$ に対して, 灯心は一意に定まるか?」という問題を提示した。今井氏の問題は次のようにして肯定的に解決される:

命題 3.7 ([16]). 体 K が凸ならば, 任意の $h > 0$ に対して, 関数 $A_K(\cdot, h)$ は狭義 (-1) -concave である。すなわち, 関数

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \frac{1}{A_K(x, h)} \in \mathbb{R}$$

は狭義下に凸である。したがって, $A_K(\cdot, h)$ の臨界点は一意に定まる。

ここで, 命題 3.7 の前半の主張から後半の主張が得られることを理解するために, 関数の凸性についていくつかの事項を復習する。 \mathbb{R}^m 上の非負値関数 φ が α -concave であるとは次が成り立つことをいう:

- $\alpha > 0$ のとき, $\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \varphi(x)^\alpha \in \mathbb{R}$ が上に凸である。
- $\alpha = 0$ のとき, $\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \log \varphi(x) \in \mathbb{R}$ が上に凸である。
- $\alpha < 0$ のとき, $\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \varphi(x)^\alpha \in \mathbb{R}$ が下に凸である。

例えば, $\varphi(x) = \exp(-|x|^2)$ は 0-concave である。

正値関数 φ は C^2 級で狭義 α -concave であるとする。このとき, φ の臨界点の個数は 1 個以下であることが 2 階微分を計算することでわかる。すなわち, 任意の方向 $v \in S^{m-1}$ に対して,

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \varphi(x)^\alpha = \alpha \varphi(x)^{\alpha-2} \left(\varphi(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(x) + (\alpha - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x)^2 \right) \quad (3.1)$$

より,

$$\varphi(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(x) + (\alpha - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x)^2 < 0 \quad (3.2)$$

を得る。この不等式より, 関数 φ の臨界点は極大点であることが従う。よって, 命題 3.7 の前半の主張から後半の主張が得られる。

命題 3.7 の前半の主張が成り立つことを説明するために, 関数の凸性に関して, 命題 3.7 に関連する結果を (本稿に関係ある形で) 紹介する。

定理 3.8 ([1]). f, g を \mathbb{R}^m 上の有解かつ可測な非負値関数として, 共に L^1 ノルムは消えないとする。 $\alpha \geq -1/m$ を 1 つとり, $\gamma = \alpha/(1+m\alpha)$ とおく。このとき,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sup_{\lambda z + (1-\lambda)w=y} (\lambda f(z)^\alpha + (1-\lambda)g(w)^\alpha)^{1/\alpha} dy \geq \lambda \|f\|_1^\gamma + (1-\lambda) \|g\|_1^\gamma$$

が成り立つ。ただし, 左辺の非積分関数は $f(z)g(w) = 0$ となるとき 0 と定義する。

系 3.9 ([1]). $\alpha \geq -1/m$ を 1 つとり, $\gamma = \alpha/(1+m\alpha)$ とおく。 F を $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 上の非負値関数として,

$$G(x) := \int_{\mathbb{R}^m} F(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^m$$

とおく。関数 G が正値ならば, G は γ -concave である。

命題 3.7 は定理 3.8 から系 3.9 を導く証明を修正して得られる。具体的には, 定理 3.8, 積分核の球対称性, K のコンパクト性と凸性を用いて, 次の補題が得られる:

補題 3.10 ([16]). K を \mathbb{R}^m の凸体とする。 $\alpha \geq -1/m$ を 1 つとり, $\gamma = \alpha/(1+m\alpha)$ とおく。 f を \mathbb{R}^m 上の狭義 α -concave な正値関数とする。

$$F_K(x, y) = f(x-y)\chi_K(y), \quad G_K(x) = \int_{\mathbb{R}^m} F_K(x, y) dy$$

とおく。任意の $x \in \mathbb{R}^m$ に対して, $G_K(x) > 0$ ならば, G_K は狭義 γ -concave である。

$(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ の関数 $a(x, y, h)\chi_K(y)$ は補題 3.10 の F_K の条件を $\alpha = -1$ の場合にみたすことがわかり, 関数 $A_K(\cdot, h)$ の狭義 (-1) -concavity が得られる。

命題 3.7 より, $A_K(\cdot, h)$ の臨界点は非退化であるから, 陰関数定理から凸体の灯心の軌跡の滑らかさが得られる。

系 3.11 ([16]). K を \mathbb{R}^m の凸体とする。このとき, 高さ h に灯心を対応させる写像

$$(0, +\infty) \ni h \mapsto A_K(h) \in \mathbb{R}^m$$

は滑らかである。

4 灯心の極限点

本章では, K を \mathbb{R}^m の体 (有界な開集合の閉包) として, 高さ h をパラメータと見て, K の灯心の極限点を考察する。

4.1 高さ無限大の灯心

$h \rightarrow +\infty$ としたときに灯心が K のどのような点に向かうかを考察する。命題 3.4 より, 高さ h が K の直径と比べて十分に大きければ, 関数 $A_K(\cdot, h)$ は $Uf(K)$ で狭義上に凸である。したがって, $A_K(\cdot, h)$ の臨界点を臨界点を調べればよい。直接計算により

$$\nabla A_K(x, h) = -(m+1)h \int_K \frac{x-y}{(|x-y|^2 + h^2)^{(m+3)/2}} dy \quad (4.1)$$

が得られるから、 $A_K(\cdot, h)$ の臨界点 $c = c(h)$ は

$$c = \int_K \frac{y}{(|c-y|^2 + h^2)^{(m+3)/2}} dy \Big/ \int_K \frac{1}{(|c-y|^2 + h^2)^{(m+3)/2}} dy \quad (4.2)$$

をみます。 c はコンパクト集合 $Uf(K)$ に含まれるものを考えているから、 $h \rightarrow +\infty$ とすると、右辺は K の重心

$$\int_K y dy \Big/ \int_K dy \quad (4.3)$$

に収束する。よって、次の定理が得られた：

定理 4.1 ([13]). 体 K の高さ無限大の灯心は K の重心である。

4.2 高さ 0 の灯心

$h \rightarrow 0^+$ としたときに灯心が K のどのような点に向かうかを考察する。

点 x を体 K の内部から 1 つとる。 $h \rightarrow 0^+$ とすると、

$$\frac{A_K(x, h)}{h} = \int_K (|x-y|^2 + h^2)^{-(m+1)/2} dy \rightarrow \int_K |x-y|^{-(m+1)/2} dy = +\infty \quad (4.4)$$

となることに注意する。すなわち、安直に $h \rightarrow 0^+$ として、その極限として得られる関数の最大点を調べればよいというものではない。そこで、 x を K の内部から 1 つとり、 $0 < \varepsilon < \text{dist}(x, K^c)$ を 1 つとる。 x を中心として半径が ε の閉球を $B_\varepsilon(x)$ とかけば、 $A_{B_\varepsilon(x)}(x, h)$ は x に依らない量であることに注意する。

$$\frac{A_K(x, h)}{h} = \frac{A_{K \setminus B_\varepsilon(x)}(x, h)}{h} + \frac{A_{B_\varepsilon(x)}(x, h)}{h} \quad (4.5)$$

であるから、関数

$$x \mapsto \frac{A_{K \setminus B_\varepsilon(x)}(x, h)}{h} \quad (4.6)$$

の最大点を考察すればよいことが期待される。また、 $h \rightarrow 0^+$ とすると、

$$\frac{A_{K \setminus B_\varepsilon(x)}(x, h)}{h} = \int_{K \setminus B_\varepsilon(x)} (|x-y|^2 + h^2)^{-(m+1)/2} dy \rightarrow \int_{K \setminus B_\varepsilon(x)} |x-y|^{-(m+1)} dy \quad (4.7)$$

であるから、高さ 0 の灯心は関数

$$x \mapsto \int_{K \setminus B_\varepsilon(x)} |x-y|^{-(m+1)} dy = - \int_{K^c} |x-y|^{-(m+1)} dy + \frac{\text{Area}(S^{m-1})}{\varepsilon} \quad (4.8)$$

の最大点であることが期待される。この期待を正当化するためには、ある $\varepsilon > 0$ と $h_0 > 0$ が存在して、任意の $0 < h < h_0$ に対して、すべての灯心は K の半径 ε の内側平行体

$$K \sim \varepsilon B^m := \{p \in K \mid \text{dist}(p, K^c) \geq \varepsilon\} \quad (4.9)$$

に含まれることを示す必要がある。以下、そのための準備を行う。

定義 4.2 ([11]). \mathbb{R}^m の体 K と $\alpha < 0$ に対して,

$$V_K^{(\alpha)}(x) = - \int_{K^c} |x - y|^{\alpha - m} dy, \quad x \in \overset{\circ}{K}$$

とおく。 K の内点 c が K の $r^{\alpha - m}$ -center であるとは、 c が $V_K^{(\alpha)}$ の最大点であることをいう。
 $r^{\alpha - m}$ -center の集合を

$$\mathcal{V}_K(\alpha) = \left\{ c \in \overset{\circ}{K} \mid V_K^{(\alpha)}(c) = \max_{x \in \overset{\circ}{K}} V_K^{(\alpha)}(x) \right\}$$

とおく。

注意 4.3. 今井氏は, [11] で, 体の中心を定義のように定義した。これより前に, Moszyńska は, [10] で, K が星体の場合に

$$\Phi_K : \text{Ker}(K) \ni x \mapsto \int_{S^{m-1}} \phi(\rho_{K-x}(v)) d\sigma(v) \in \mathbb{R}$$

の最大点として中心を (凸幾何学の問題意識から) 定義し, 考察していた。ここで,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(K) &:= \{p \in K \mid \forall q \in K, \overline{pq} \subset K\}, \\ \rho_{K-x}(v) &:= \max \{\lambda \in \mathbb{R} \mid x + \lambda v \in K\} \end{aligned}$$

である。星体 K と $x \in \text{Ker}(K)$ に対して,

$$V_K^{(\alpha)}(x) = - \int_{S^{m-1}} \left(\int_{\rho_{K-x}(v)}^{+\infty} r^{\alpha-1} dr \right) d\sigma(v) = \frac{1}{\alpha} \int_{S^{m-1}} \rho_{K-x}(v)^\alpha d\sigma(v)$$

であるから, 今井氏の中心は Moszyńska の中心を K が星形でない場合にも考察しているといえる。

命題 4.4 ([11]). 体 K が境界外部錐条件をみたすとき, すなわち, ある開錐 C が存在して, 任意の K の境界点 p に対して, p を頂点とする C と合同な開錐 $C(p)$ が K の補集合にとれるとき, $r^{\alpha - m}$ -center は存在する。

命題 4.4 は, K の境界外部錐を用いて, 関数 V_K の K の境界付近での値を評価し, x が K の境界に近づくとき, $V_K^{(\alpha)}(x)$ が $-\infty$ に発散することから得られる。その証明から想起させられることは「 K の境界外部錐と K の幾何的量から決まるある正定数を半径とする K の内側平行体にすべての $r^{\alpha - m}$ -center が含まれているのではないか?」ということである。

命題 4.5 ([15]). K を \mathbb{R}^m の体とする。 K は頂角の大きさが κ , 高さが δ の錐 C を境界外部錐にもつとする。 C と合同で, Re_1 を頂点として, $x_1 x_m$ 平面において, 第 x_1 軸から半時計まわりに角 θ だけ回転軸が傾いた錐を $C_\theta(Re_1)$ で表す。 $R_\infty(K)$ で K の内接球 (K に含まれる最大の球) の半径を表す。

(1) 関数

$$E_K^{(\alpha)}(R) := \min_{0 \leq \theta \leq (\pi - \kappa)/2} \left(\int_{C_\theta(Re_1) \cap B_{\text{diam } K}(0)} - \int_{B_{\text{diam } K}(0) \setminus B_{R_\infty(K)}(0)} \right) |\xi|^{\alpha - m} d\xi, \quad R > 0$$

は唯一の零点 $\tilde{R} = \tilde{R}(\alpha, \kappa, \delta, \text{diam } K, R_\infty(K))$ をもち, $\tilde{R} < R_\infty(K)$ が成り立つ。

(2) すべての $r^{\alpha - m}$ -centers は K の半径 \tilde{R} の内側平行体に含まれる。

証明の概略. $V_K^{(\alpha)}$ の積分核が球対称, 正值, 狭義単調減少であることを用いる. K の内心 (内接球の中心) i において, $V_K^{(\alpha)}(i)$ は下から $V_{B_{R_\infty(K)}(i)}^{(\alpha)}$ で押さえられ, $K \sim \tilde{R}B^m$ の補集合の点 p において, $V_K^{(\alpha)}(p)$ は上から $V_{B_{\text{diam } K}(0) \setminus C_{\theta(p)}(\text{dist}(p, K^c)_{e_1})}^{(\alpha)}$ で上から押さえられ, 関数 $E_K^{(\alpha)}$ の狭義単調性を用いて, $V_K^{(\alpha)}(i) > V_K^{(\alpha)}(p)$ が示される. \square

(4.7) での計算より, 関数 $A_{K \setminus B_\varepsilon(\cdot)}(\cdot, h)$ は, h が十分小さいとき, $V_K^{(-1)}$ で (定数項の差を除いて) 近似できるから, 命題 4.5 の証明を少し修正することで, 次が得られる:

定理 4.6 ([15]). K を \mathbb{R}^m の外部錐条件をみたす体とする. すなわち, ある開錐 C が存在して, 任意の K の補集合の点 p に対して, p を頂点とする C と合同な錐 $C(p)$ が K の補集合にとれるとする. K は頂角の大きさが κ , 高さが δ の錐 C を外部錐にもつとする. このとき, 任意の $0 < b < 1$ に対して, ある $h_0 > 0$ が存在して, 任意の $0 < h < h_0$ に対して, すべての高さ h の灯心は K の半径 $b\tilde{R}$ の内側平行体に含まれる.

よって, 冒頭で述べた期待が正当化され, 次が成り立つ:

系 4.7 ([15]). K を \mathbb{R}^m の外部錐条件をみたす体とする. 任意の 0 に収束する単調減少列 $\{h_n\}$ と高さ h_n の灯心 $c(h_n)$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(c(h_n), \mathcal{V}_K(-1)) = 0$$

が成り立つ. すなわち, 高さ 0 の灯心は $r^{-(m+1)}$ -center である.

定理 4.6 の別の応用例を紹介する. 例 3.2 は Mathematica による実験的なものであったが, K に外部錐条件を仮定すると, 例 3.2 とまったく同じというわけにはいかないが, 一般に, 灯心が 2 個以上存在することを証明できる.

例 4.8 ([16]). $0 \leq \varepsilon \leq 1$ に対して, K_ε を持ち手の幅が 2ε のダンベル

$$K_\varepsilon = ([-3, -1] \times [-1, 1]^{m-1}) \cup ([1, 3] \times [-1, 1]^{m-1}) \cup ([-1, 1] \times [-\varepsilon, \varepsilon]^{m-1})$$

とする. C を頂角の大きさが κ , 高さが δ である K_0 の外部錐とする. C は K_ε の外部錐でもある. $\text{diam } K_\varepsilon = 2\sqrt{m+8}$, $R_\infty(K_\varepsilon) = 1$ である. $\alpha = -1$ に対して命題 4.5 で決まる \tilde{R} は ε に依らないことに注意する.

定理 2.6 より, K_ε のすべての灯心は $([-2, 2] \times \{0\}^{m-1})$ に含まれる. 定理 4.6 と併せて, ある h_0 が存在して, 任意の $0 < h < h_0$ に対して, $K_{\tilde{R}/\sqrt{m}}$ の高さ $0 < h < h_0$ の灯心は $([-2, -1] \cup [1, 2]) \times \{0\}^{m-1}$ に含まれる. 注意 3.3 より, 高さ h の灯心は 2 点以上存在する.

例 4.9 ([16]). K をアニュラス

$$K = B_3(0) \setminus \overset{\circ}{B}_1(0)$$

とする. C を頂角の大きさが κ , 高さが δ である K の外部錐とする. $\text{diam } K = 6$, $R_\infty(K) = 1$ である. $\alpha = -1$ に対して命題 4.5 で決まる \tilde{R} は $\tilde{R} < 1$ をみたすことに注意する.

定理 2.6 より, K のすべての灯心は $B_2(0)$ に含まれる. 定理 4.6 と併せて, ある h_0 が存在して, 任意の $0 < h < h_0$ に対して, K の高さ h の灯心は $B_2(0) \setminus \overset{\circ}{B}_{1+\tilde{R}/2}(0)$ に含まれる. 積分核 $a(\cdot, \cdot, h)$ の球対称性より, ある $1 + \tilde{R}/2 \leq \rho \leq 2$ が存在して, 高さ $0 < h < h_0$ の灯心は球面 ρS^{m-1} を含む. すなわち, 非可算無限個の灯心が存在する.

5 灯心の軌跡と関連研究

体 K の高さ h の灯心の軌跡についてまとめる。命題 2.1 より、任意の $h > 0$ に対して、灯心は存在する。命題 2.6 より、灯心は高さに依らず K の minimal unfolded region に含まれる。系 4.7 より、灯心の軌跡は K の $r^{-(m+1)}$ -center から出発する。例 3.2 より、一般には、灯心は 2 個以上存在するが、 h が K の直径と比べて命題 3.4 の不等式をみたすだけ大きければ、灯心は一意に定まる。または、 K が凸であれば、命題 3.7 より、灯心は高さに依らず一意に定まる。高さが無限大になると、その唯一の灯心は K の重心に辿り着く。

本稿で述べた結果は問題意識から定理の主張および証明まですべて筆者のオリジナルというわけではない。その都度説明をすべきだったが、文章が読みにくくなる懸念されたため省略した。ここで関連研究を紹介する。

注意 1.3 で体 K の明るさの関数 A_K が立体角に等しいことを、注意 1.4 で A_K が上半空間における Laplace 方程式をみたすことを述べたが、これは微分積分の一般論として知られているようである。少なくとも、杉浦光夫著「解析入門 II」(東京大学出版会)にはその記述がある。また、 A_K は Poisson 積分とよばれる実解析学で有名な関数である。

第 2 章以降で紹介した結果には幾何的な関連研究と解析的な関連研究がある。幾何的なものは第 4 章でも少し紹介したが、[10] に始まる体の中心の研究である。解析的なものは熱方程式の解の形状に関する研究である。

体 K の定義関数を初期値とする熱方程式の初期値問題の解を

$$W_K(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \int_K \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, t > 0 \quad (5.1)$$

とおく。時刻 t を固定して、関数 $W_K(\cdot, t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ の最大点はホットスポットとよばれる。命題 2.1 と定理 4.1 に対応する結果は [4] で、定理 2.6 に対応する結果は [2] で、命題 3.4 に対応する結果は [6] で、命題 3.7 に対応する結果は [1] で、定理 4.6 に対応する結果は [9] で既に知られている。順に、各時刻 t でホットスポットは存在し、時間無限大で K の重心に収束する；任意の時刻 t に対して、ホットスポットは K の minimal unfolded region に含まれる； $t \geq D(K)^2/2$ ならば、ホットスポットは一意に定まる； K が凸ならば、関数 $W_K(\cdot, t)$ は狭義 0-concave である；ある時刻 t_0 が存在して、任意の $0 < t < t_0$ に対して、ホットスポットは K の内心である、となる。

熱方程式の解の形状 (ホットスポット) の研究は解が具体的に表示できる場合以外にも多くの研究結果が知られている。例えば、[7, 8] は球の外部領域で熱方程式の初期境界値問題を考え、解が具体的に表示できない初期値に対して、ホットスポットの挙動を調べている。

本稿では、灯心に限って話を進めてきたが、ホットスポットの研究にも類似点があるように、本質的に使用した関数 A_K の性質は積分核 $a(\cdot, \cdot, h)$ の球対称性と狭義単調性である。[13, 14, 15] では、一般の距離核ポテンシャルの言葉で本稿の内容を記述している。

謝辞

筆者に本稿の執筆の機会を与えてくださった宮本安人氏 (東京大学) と岡部真也氏 (東北大学) に厚く御礼申し上げたい。

参考文献

- [1] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler Theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Func. Anal. **22** (1976), 366–389.
- [2] L. Brasco, R. Magnanini and P. Salani, *The location of the hot spot in a grounded convex conductor*, Indiana Univ. Math. J. **60** (2011), 633–660.
- [3] L. Brasco and R. Magnanini, *The heart of a convex body*, Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's (R. Magnanini, S. Sakaguchi and A. Alvino eds), Springer INdAM Series 2 (2013), 49–66.
- [4] I. Chavel and L. Karp, *Movement of hot spots in Riemannian manifolds*, J. Analyse Math. **55** (1990), 271–286.
- [5] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.
- [6] S. Jimbo and S. Sakaguchi, *Movement of hot spots over unbounded domains in \mathbb{R}^N* , J. Math. Anal. Appl. **182** (1994), 810–835.
- [7] K. Ishige, *Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Neumann boundary condition*, J. Differential Equations **212** (2005), 394–431.
- [8] K. Ishige, *Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Dirichlet boundary condition*, Adv. Differential Equations, **12** (2007), 1135–1166.
- [9] L. Karp and N. Peyerimhoff, *Geometric heat comparison criteria for Riemannian manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31** (2007), 115–145.
- [10] M. Moszyńska, *Looking for selectors of star bodies*, Geom. Dedicata **81** (2000), 131–147.
- [11] J. O'Hara, *Renormalization of potentials and generalized centers*, Adv. in Appl. Math. **48** (2012), 365–392.
- [12] J. O'Hara, *Minimal unfolded regions of a convex hull and parallel bodies*, to appear in Hokkaido Math. J.
- [13] S. Sakata, *Movement of centers with respect to various potentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 8347–8381.
- [14] S. Sakata, *Experimental investigation on uniqueness of a center of a body*, preprint.
- [15] S. Sakata, *Geometric estimate of a potential and cone conditions of a body*, preprint.
- [16] S. Sakata, *Stationary centers and characterization of convex polyhedra*, in preparation.
- [17] J. Serrin, *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Rational. Mech. Anal. **43** (1971), 304–318.

- [18] Katsuyuki Shibata, *Where should a streetlight be placed in a triangle-shaped park?* *Elementary integro-differential geometric optics*, <http://www1.rsp.fukuoka-u.ac.jp/kototoi/shibataaleph-sjs.pdf>

Shigehiro Sakata

Faculty of Education and Culture, University of Miyazaki,

1-1 Gakuen Kibanadai West, Miyazaki city, Miyazaki prefecture, 889-2192, Japan

sakata@cc.miyazaki-u.ac.jp

<http://tmubdell.math.se.tmu.ac.jp/sakata/>