

二次元コルモゴロフ流における局在乱流

京都大学 理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻*

蛭田佳樹[†], 藤定義

Yoshiki Hiruta, Sadayoshi Toh

Division of Physics and Astronomy, Graduate School of Science
Kyoto University

1 introduction

近年力学系のアプローチを用いて流体系の空間的に局在したダイナミクスを捉えようとする動きが高まっている。とくに、層流乱流遷移の間で発生する乱流パフや乱流スポットなどの局在した乱れ [1-4] を力学系の観点から理解できるのではないかと、期待されている。[5-11] 様々な流体系を総括する一般的な視点を得るために、また簡単に数値的な証拠を得るために、単純な流体系において局在した乱流がどのように現れるか考察するのは重要だろう。

二次元コルモゴロフ流は層流から乱流への遷移を示す最も簡単な流体系として研究されてきた。この系で、最近 Lucas&Kerswell [12] によって非常に興味深い局在したダイナミクス (局在した周期運動、進行波など) を示すことが報告された。しかし、彼らの系ではそのような局在した構造は単独では取りだすことはできなかった。ここでは、外力に垂直な方向の流量が保存量であることに着目し、この量を調整することで空間的に局在した解として取り出すことができることを DNS で確認した。この系における非一様な解を議論する場合には 0 でない流量を考えることが重要だと言える。また、実際に空間的に局在した乱流が現れることを DNS で確認した。

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

[†] e-mail:hiruta@kyoryu.scphys.kyoto-u.ac.jp

2 支配方程式に付随する保存量

二次元コルモゴロフ流は長方形領域 $[0, 2\pi] \times [0, L]$ 上において定義された定常外力ありの Navier-Stokes 方程式

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \sin(ny) \hat{\mathbf{x}} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

で支配される。ここで、 Re , α , n はそれぞれ、レイノルズ数、領域のアスペクト比、外力の波数である。また、 $L = \frac{2\pi}{\alpha}$ である。

$$U_y = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/\alpha} dx \int_0^{2\pi} dy u_y \quad (3)$$

で定義される単位長さあたりの流量 U_y は領域の周期性と式 (2) を考慮しながら式 (1) を全領域で積分することで

$$\frac{dU_y}{dt} = 0 \quad (4)$$

を満たすことがわかる。ここで、外力により y 方向のガリレイ不変性は破れていることに注意すべきである。我々は流体方程式の非一様な解に興味があったので $U_y \neq 0$ の状況について調べることにする。

x 方向に並進対称性を持った層流解は U_y に依存して

$$\mathbf{u}_{\text{lam}}(U_y) = -\frac{Re}{n} \cos \theta \cos(ny + \theta) \hat{\mathbf{x}} + U_y \hat{\mathbf{y}} \quad (5)$$

となる。ここで、 $\tan \theta = ReU_y/n$ である。

3 数値シミュレーション

非一様な流れを考慮に入れるために導入した U_y を変化させた時、系の振る舞いがどのように変化するか数値的に調べた。式 1 を渦度ベースのスペクトル法を用いて数値計算した。初期値は $U_y = 0$ の時に層流からピッチフォーク分岐で不安定化して現れたキンク対にした。パラメータは $\alpha = 0.25$, $n = 4$ に固定し、 $Re = 50$ について $U_y < 3.0$ で U_y を変化させた時の流れを考えた (図 1)。流量が増えるとともに、解が非対称になり局在した流れ構造が現れることがわかる。特に $|U_y| = 2.0$ 付近では局所的に複雑な振る舞いを

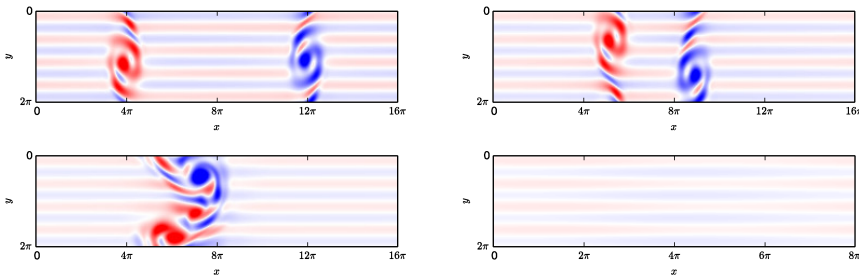


図1 渦度によるスナップショット。 $Re = 50$ $n = 4$ $\alpha = 0.25$. $|U_y| = 0.0$ (左上), 1.0 (右上), 2.0 (左下), 3.0 (右下)

する乱流構造が現れる。 $|U_y| \gg 2.0$ で右下のような x -方向に並進対称性を持った層流解 $\mathbf{u}_{\text{lam}}(U_y)$ に落ち着く。

4 流量による流れのの大域的な構造の制限

二次元コルモゴロフ流に現れる流れの大域的な構造を議論する。低アスペクト比 $\alpha < 1$ の流れでは、コルモゴロフ流は x 方向に長波長の構造を持つことが知られている。[12–15] Lucas らによれば、層流は不安定化して長波長のキンクとアンチキンクのペアが現れる。このキンク構造が重要になるのは $U_y \neq 0$ の状況でも一緒である。すなわち、この系においては流れは局在した kink 構造と層流領域によって形成される。最も単純な場合として流れ $\mathbf{u}_{\text{lam}}(-\lambda_p)$ が幅 L_p で、 $\mathbf{u}_{\text{lam}}(-\lambda_n)$ が幅 L_n で実現しその間を kink 構造がつかないでいるとすると、 L_p と L_n の間には近似的に

$$L = L_p + L_n \quad (6)$$

$$U_y = \frac{-\lambda_p L_p}{L} + \frac{-\lambda_n L_n}{L} \quad (7)$$

の関係がある。この連立方程式の解としてその解の局在度合いがわかる。 $U_y = 0$ の時は L_p と L_n に関し対象だが、 U_y が大きくなるごとに非対称になることがわかる。特に、 $U_y \sim \lambda_p$ (or $U_y \sim \lambda_n$) が満たされる時、解が非常に狭い領域で実現しそうなことがわかるであろう。実際、 $Re = 50$ で図1のような一つのキンクペアによって構成される流れでは、 $|\lambda_p|, |\lambda_n| \sim 1.7$ であることが確認されている。

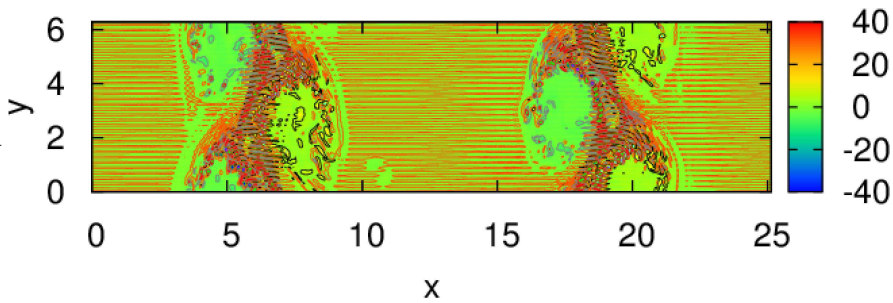


図2 渦度によるスナップショット. $Re = 2000$ $n = 32$ $\alpha = 0.25$ $U_y = 3.6$.

5 局在解同士の相互作用

二次元コルモゴロフ流において空間的に局在したダイナミクスが現れることを確認した。これらの空間的に局在した解は、この系の構成要素になりうるのだろうか？つまり、二次元コルモゴロフ流のダイナミクスは $U_y \neq 0$ の系の局在解の重ね合わせでかけるのだろうか。数値的に様々な場合を調べた結果、局在解をを数値的に切り貼りして作った初期値に対し DNS を行うとそれぞれの局在解が非常に接近している時以外は、それぞれの局所構造は安定に存在した。したがって、Lucas らが報告した混在した局在ダイナミクスは $U_y \neq 0$ の局在周期解や局在進行波解の重ね合わせであることが予想される。

また、流量による流れの大域構造の制限は Re や n が大きくても変わらないことが確認された (図2)。図2は高 Re , 高波数の DNS のスナップショットで、局在乱流の共存がこのパラメータ域でも観測されている。

6 まとめ

二次元コルモゴロフ流において流量が制限する解の大域的な構造を議論した。また実際に DNS で空間的に局在した解を構成・共存させることができた。この流体系は非常に単純で数値的なコストも比較的小さいので、数値的厳密解 (不安定な進行波解・周期解) も比較的容易に求められることが期待される。流量が非零の状況の統計的・力学系的理解は今後の課題である。

参考文献

- [1] Y. Duguet, P. Schlatter, and D. S. Henningson. Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 650:119, 2010.
- [2] K. Avila, D. Moxey, A. Lozar, M. Avila, D. Barkley, and B. Hof. The onset of turbulence in pipe flow. *Science*, 333(6039):192–196, 2011.
- [3] M. Avila, F. Mellibovsky, N. Roland, and B. Hof. Streamwise-localized solutions at the onset of turbulence in pipe flow. *Physical Review Letters*, 110(22):1–4, 2013.
- [4] B. Eckhardt. Doubly localized states in plane Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 758:1–4, nov 2014.
- [5] T. Itano and S. Toh. The Dynamics of Bursting Process in Wall Turbulence. *Journal of the Physical Society of Japan*, 70(3):703–716, 2001.
- [6] G. Kawahara and S. Kida. Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst. *Journal of Fluid Mechanics*, 449:291, 2001.
- [7] B. Eckhardt, T. M. Schneider, B. Hof, and J. Westerweel. Turbulence Transition in Pipe Flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 39(1):447–468, 2007.
- [8] P. Cvitanović and J. F. Gibson. Geometry of the turbulence in wall-bounded shear flows: periodic orbits. *Physica Scripta*, T142:014007, December 2010.
- [9] G. Kawahara, M. Uhlmann, and L. Veen. The Significance of Simple Invariant Solutions in Turbulent Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44(1):203–225, 2012.
- [10] E. Brand and J. Gibson. A doubly-localized equilibrium solution of plane Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 750:R1, 2014.
- [11] S. Zammert and B. Eckhardt. Fully localised periodic orbits in plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 348–359, 2014.
- [12] D. Lucas and R. Kerswell. Spatiotemporal dynamics in two-dimensional Kolmogorov flow over large domains. *Journal of Fluid Mechanics*, 750:518–554, June 2014.
- [13] L. Meshalkin and Y. Sinai. Investigation of stability for a system of equations describing plane motion of a viscous incompressible fluid. *Appl. Math. Mech*,

- 25:1140–1143, 1961.
- [14] C. Marchioro. An example of absence of turbulence for any Reynolds number: II. *Communications in Mathematical Physics*, 108:647–651, 1987.
- [15] G. I. Sivashinsky. Weak turbulence in periodic flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 17(2):243–255, 1985.