数理解析研究所講究録
第2011巻 2016年 112-117

可換な2つの非拡大写像の共通不動点

高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysis

1. Introduction

可換な2つの非拡大写像について, 共通不動点への近似手続きをBanach空間で考察する. 不動点に関する問題の中で, 2つの写像の共通不動点の研究は, 特に重要なものの1つだと著者は考えている. 近似手続きの正当性を示すことは, 写像の数を2つに絞っても, 一般のBanach空間においては単純ではない. また, 3つ以上の写像の共通不動点を近似する手続きは, 実効的な手続きといえるか疑問な点がある. 不動点の問題は, 近似手続きの実効性を別にしても, 一般のBanach空間とstrictly convexなBanach空間では大きな隔たりがある. 一般のBanach空間では, 非拡大写像の不動点集合が必ずしも凸集合にならないことが問題を難しくする. これに比して, 同等の問題を考えることを前提にすれば, uniformly convexなBanach空間では, 不動点集合が凸であることに加えてノルムが好ましい凸性を持ち, 問題が格段に易しくなる. 本稿ではBanach空間の基本事項を説明しないので, 必要があれば, 例えばTakahashi [21] を参照されたい.

Ishikawa [6] は, 1979年に, 次の複雑ではあるが素晴らしい定理を証明した.

Theorem 1. *Let a be a real number belonging to $(0,1)$. Let D be a compact convex subset of a Banach space E. Let $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ be a finite sequence of commuting nonexpansive self-mappings on D. Let $x_1 \in D$ and $\{x_n\}$ be a sequence in D defined by*

$$x_n = \left[\Pi^{n}_{n_{k-1}=1}\left[S_k\,\Pi^{n_{k-1}}_{n_{k-2}=1}\left[S_{k-1}\,\Pi^{n_{k-2}}_{n_{k-3}=1}\left[\cdots\left[S_3\,\Pi^{n_2}_{n_1=1}\left[S_2\Pi^{n_1}_{n_0=1}\,S_1\right]\right]\cdots\right]\right]\right]\right] x_1$$

for $n \in N$, where $S_i = aT_i + (1-a)I$ for $i \in N(1,k)$. Then, $\{x_n\}$ converges strongly to some common fixed point of $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$.

おそらく, この近似手続きの表現する内容を理解することは, 論文 [6] を読まなければ難しいと思う. また, この論文を通読することは容易ではない. このため, Kubota–Takeuchiは解説論文 [10] を書いた. Ishikawaの定理は, 2重の漸化式から生成される写像の2重列 $\{L_{(i,n)}\}$ を使用すると, 次の様に書き直せる.

Theorem 2. *Let $a \in (0,1)$. Let D be a compact and convex subset of a Banach space E. Let $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ be a finite sequence of commuting nonexpansive self-mappings on D. For each $i \in N(1,k)$, let S_i be a nonexpansive self-mapping on D defined by $S_i = aT_i + (1-a)I$. Let $L_{(1,n)} = S_1^n$ for $n \in N$ and $\{L_{(i,n)}\}$ be a double sequence of nonexpansive self-mappings on D defined by*

$$L_{(i+1,n)} = \pi(S_{i+1}L_{(i,\underline{n})}) \qquad \text{for} \quad i \in N(1,k-1),\ n \in N,$$

where $\pi(S_{i+1}L_{(i,\underline{n})}) = (S_{i+1}L_{(i,n)})(S_{i+1}L_{(i,n-1)})\cdots(S_{i+1}L_{(i,1)})$.

Then, there exists a nonexpansive self-mapping P on D such that

(a) *$\{L_{(k,n)}\}$ converges uniformly to P,*
(b) *$P(D) = F(P) = F(T_k) \cap \cdots \cap F(T_2) \cap F(T_1)$.*

That is, for any $x_1 \in D$, $\{L_{(k,n)}x_1\}$ converges strongly to some $u \in \cap_{i=1}^k F(T_i)$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10.
Key words and phrases. Commuting two nonexpansive mappings, common fixed point.

この近似手続きは, 通常の iteration の形をしていないが次の様に書き直せる:

(I) $x_1 \in D, \qquad x_{n+1} = S_k L_{(k-1,n)} x_n \quad \text{for} \quad n \in N.$

生成手続きに従っていくつか書き下すと次の様になる:

$$
\begin{aligned}
L_{(1,n)} &= S_1^n \quad \text{for} \quad n \in N,\\
L_{(2,1)} &= \pi(S_2 L_{(1,\underline{1})}) = S_2 L_{(1,1)} = S_2 S_1,\\
L_{(2,2)} &= \pi(S_2 L_{(1,\underline{2})}) = (S_2 L_{(1,2)})(S_2 L_{(1,1)}) = (S_2 S_1^2)(S_2 S_1),\\
L_{(3,1)} &= \pi(S_3 L_{(2,\underline{1})}) = S_3 L_{(2,1)} = S_3(S_2 S_1),\\
L_{(3,2)} &= \pi(S_3 L_{(2,\underline{2})}) = (S_3 L_{(2,2)})(S_3 L_{(2,1)}) = (S_3(S_2 S_1^2)(S_2 S_1))(S_3(S_2 S_1)),\\
L_{(4,1)} &= \pi(S_4 L_{(3,\underline{1})}) = S_4 L_{(3,1)} = S_4(S_3(S_2 S_1)),\\
L_{(4,2)} &= \pi(S_4 L_{(3,\underline{2})}) = (S_4 L_{(3,2)})(S_4 L_{(3,1)})\\
&= (S_4(S_3(S_2 S_1^2)(S_2 S_1))(S_3(S_2 S_1)))(S_4(S_3(S_2 S_1))).
\end{aligned}
$$

まだ複雑に感じられるかもしれない. しかし, 写像の数を 2 つ ($k = 2$) に限定すると, iteration (I) は次の (a) となる (この設定の下で最も simple な iteration と思われる).

Theorem 3. *Let $a \in (0,1)$. Let D be a compact and convex subset of a Banach space E. Let T_1, T_2 be nonexpansive self-mappings on D with $T_1 T_2 = T_2 T_1$. For $i = 1, 2$, let S_i be a nonexpansive self-mapping on D defined by $S_i = aT_i + (1-a)I$. Let $x_1 \in D$ and define a sequence $\{x_n\}$ in D by*

(a) $x_{n+1} = S_2 S_1^n x_n \quad \text{for} \quad n \in N.$

Then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point z of T_1 and T_2.

一方, Shimizu and Takahashi [17] は 1997 年に定理 4 を, Atsushiba and Takahashi [1] は 1998 年に定理 5 を証明した.

Theorem 4. *Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[0,1]$ satisfying $\lim a_n = 0$ and $\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \infty$. Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and let S and T be nonexpansive self-mappings on C such that $ST = TS$ and $F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$. Let $x_1 \in C$ and define a sequence $\{x_n\}$ in C by*

$$x_{n+1} = a_n x_1 + \tfrac{2(1-a_n)}{(n+1)(n+2)} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} S^i T^j x_n \quad \text{for} \quad n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ converges strongly to the common fixed point $z = P_{F(S)\cap F(T)} x_1$ of S and T, where $P_{F(S)\cap F(T)}$ is the metric projection of H onto $F(S) \cap F(T)$.

Theorem 5. *Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[0,a] \subset [0,1)$. Let E be a uniformly convex Banach space which has the Opial property or whose norm is Fréchet differentiable. Let C be a closed convex subset of E and let S and T be nonexpansive self-mappings on C such that $ST = TS$ and $F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$. Let $x_1 \in C$ and define a sequence $\{x_n\}$ in C by*

$$x_{n+1} = a_n x_n + \tfrac{(1-a_n)}{n^2} \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j x_n \quad \text{for} \quad n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ converges weakly to some common fixed point z of S and T.

Ishikawa [6] と Atushiba–Takahashi [1] の影響を受けて, Suzuki [19] は, Atushiba–Takahashi type iteration を使用し, 2002 年に次の定理 6 を証明した. この iteration は, iteration (a) ほど simple ではないが, 理論的に興味深いものである. この方向で最も simple な iteration は何かという疑問が自然に浮かび上がる. また, この問題に関連して, Suzuki は興味深い論文 [20] を 2005 年に提出している.

Theorem 6. *Let* $\{a_n\}$ *be a sequence in* $[0,1]$ *such that*

$$0 < \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n < 1.$$

Let C *be a compact and convex subset of a Banach space* E. *Let* S *and* T *be nonexpansive self-mappings on* C *with* $ST = TS$. *Let* $x_1 \in C$ *and define a sequence* $\{x_n\}$ *in* C *by*

$$x_{n+1} = \frac{a_n}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} S^i T^j x_n + (1-a_n)x_n \qquad \text{for} \quad n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to a common fixed point* z *of* S *and* T.

Ishikawa と Suzuki の論文のいくつかは, 一見複雑に見えるが, 考え方と議論が自然であり, ひとたび理解すれば明快に感じられる. 定理 6 の証明もこの 1 つである.

2. 簡単な考察と結果

定理 4,5,6 を簡単に考察し最近得た結果を提示する. まず, 定理 4,5,6 の iteration に使用された 3 つの写像の形に注目する:

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} S^i T^j, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} S^i T^j.$$

3 つの写像は, i, j が 0 [1] から $n-1$ [n] までの値をとり, S^iT^j が項であれば S^jT^i も項になるという意味で, i, j について対称な形をしている. 3 つの論文を読むと, このことが少なからず証明に利いていることがわかる. 次の 2 点を注意しておく. S と T の可換性は要で使用されるが頻繁ではない. 計算量に関係する項の数は n^2 のオーダーである.

定理 6 を検討し次の結果を得た. Iteration に使う写像の項数は n のオーダーである.

Theorem 7. *Let* $\{a_n\}$ *be a sequence in* $[0,1]$ *such that*

$$0 < \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n < 1.$$

Let C *be a compact and convex subset of a Banach space* E. *Let* S *and* T *be nonexpansive self-mappings on* C *with* $ST = TS$. *Let* $x_1 \in C$ *and define a sequence* $\{x_n\}$ *in* C *by*

$$x_{n+1} = \frac{a_n}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} S^i T^i + \sum_{i=1}^{n} S^i T^{i+1}\right) x_n + (1-a_n)x_n \qquad \text{for } n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to some common fixed point* z *of* S *and* T.

定理 6 で, $\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ をとり収束先を $z \in C$ とする. 議論の要は

$$N_n^2 = \{(i,j) \in N^2 : i, j \geq n\}$$

として, 次の関係を示すことである:

$$d = \lim_n \sup\{\|S^i T^j z - z\| : (i,j) \in N_n^2\} = 0.$$

同様に, 定理 7 の議論の要は, $\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ の収束先を $z' \in C$,

$$K_n^2 = \{(i,j) \in N^2 : i \geq n, \quad j \in \{i, i+1\}\}$$

として, 次の関係を示すことである:

$$d' = \lim_n \sup\{\|S^i T^j z' - z'\| : (i,j) \in K_n^2\} = 0.$$

これ以外に, 証明に本質的な差異はない. 具体的に異なるのは, $i \geq i_0$, $j \geq j_0$ とすると

$$\|S^i T^j z - S^{i_{n_0}} T^{j_{n_0}} z\| \leq \|S^{i-i_{n_0}} T^{j-j_{n_0}} - z\|$$

となるが, $j - j_{n_0} = i - i_{n_0}$ または $j - j_{n_0} = i - i_{n_0} + 1$ となる保証がないことである. 定理 7 の証明は, Suzuki の議論から, この点をどのように避けるかということが問題となる. 議論の本質は変わらないが, 結論が得られてしまえば, iteration scheme が単純になった分だけ, 証明の全容が単純になり見やすくなる.

定理 5 を検討し次の結果を得た. Iteration に使う写像の項数は n のオーダーである.

Theorem 8. *Let $a, b \in (0,1)$ with $a \le b$ and $\{a_n\}$ be a sequence in $[a,b]$. Let E be a uniformly convex Banach space whose dual E^* has the Kadec–Klee property. Let C be a closed and convex subset of E. Let S and T be nonexpansive self-mappings on C with $ST = TS$ and $F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$. Let $x_1 \in C$ and define a sequence $\{x_n\}$ in C by*

$$x_{n+1} = \tfrac{a_n}{2n}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} S^i T^i + \sum_{i=0}^{n-1} S^i T^{i+1}\right)x_n + (1-a_n)x_n \qquad \text{for } n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ converges weakly to some common fixed point z of S and T.

簡潔に議論するため, 次の記号を使用しよう:

$$K(n) = \tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j, \qquad M(n) = \tfrac{1}{2n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} S^i T^i + \sum_{i=0}^{n-1} S^i T^{i+1}\right).$$

定理 5 の仮定の下で, $\{\|x_n - u\|\}$ が収束し, $\lim_n \|K(n)x_n - x_n\| = 0$ となることが容易に得られる. ただし, $u \in F(T) \cap F(S)$ とする.

$\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ をとり収束先を $z \in C$ とする. 議論の要は

$$\lim_k \|TK(n_k)x_{n_k} - K(n_k)x_{n_k}\| = 0,$$
$$\lim_k \|SK(n_k)x_{n_k} - K(n_k)x_{n_k}\| = 0.$$

を示すことである. Atsushiba–Takahashi の発想は, 著者には到底思いつかないものであり, $K(n)$ の対称性が証明に本質的に利いているように思える. しかしながら, i, j の対称性なしに, この証明手法から定理 8 を得ることは難しいと考えた.

このため, 素朴で素直な方法を試みることにした. 定理 8 でも, $u \in F(T) \cap F(S)$ とすれば, $\{\|x_n - u\|\}$ が収束し, $\lim_n \|M(n)x_n - x_n\| = 0$ となることが容易に得られる.

$\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ の収束先を $z \in C$ とする. 議論の要はほぼ同様であるが,

$$\text{(i)} \qquad \lim_k \|STM(n_k)x_{n_k} - M(n_k)x_{n_k}\| = 0.$$

が, 良く知られた次の 2 つの補題から, ほとんど議論なしに得られる.

Lemma 9. *Let C be a bounded closed and convex subset of a uniformly convex Banach space E. Let T be a nonexpansive self-mapping on C. Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that, for any $c \in [0,1]$,*

$$\|T(cx + (1-c)y) - (cx + (1-c)y)\| < \varepsilon$$

if $x, y \in C$ satisfy $\|Tx - x\| < \delta$ and $\|Ty - y\| < \delta$.

Lemma 10. *Let C be a bounded closed and convex subset of a uniformly convex Banach space E. Let $N(C)$ be the set of all nonexpansive self-mappings on C. Then,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in C,\ T \in N(C)} \left\{ \left\| T\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} T^i x\right) - \tfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x \right\| \right\} = 0.$$

補題 10 は Bruck [3] による著名な補題である. 次の補題は Zalinescu [24] に由来し, これもよく知られている (Xu [23] も参照). 通常は, g を凸関数にとれることにも言及するが, 近似手続きに利用する際には必要ない. 簡明な証明は Prus [15] または [8] を見よ.

Lemma 11. *Let E be a uniformly convex Banach space. Then, for $r > 0$, there exists a strictly increasing function g of $[0, 2r]$ into $[0, \infty)$ with $g(0) = 0$ satisfying the following: For all $x, y \in rB$, $t \in [0, 2r]$ with $t \le \|x - y\|$ and $a \in [0,1]$,*

$$\|ax + (1-a)y\|^2 \le a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 - a(1-a)g(t).$$

Since $\|x - y\| \le \|x - y\|$ for $x, y \in rB$, we can replace $g(t)$ by $g(\|x - y\|)$.

このままでは使い勝手が悪いので, 簡単に導かれる次の補題を使用する.

Lemma 12. *Let C be a subset of a uniformly convex Banach space E. Assume that $C \subset rB$. Then, there exists a strictly increasing function f of $[0, 2r]$ into $[0, \infty)$ with $f(0) = 0$ satisfying the following: For any quasi-nonexpansive mapping T of C into rB, $a, b \in [0, 1]$, $x \in C$, $w = aTx + (1-a)x$ and $v \in F(T)$,*

$$\|w - v\| \leq \|x - v\| - a(1-a)f(t)$$

holds if $t \leq \|Tx - x\|$ for some $t \in [0, 2r]$. We note that, in this inequality, we can replace $f(t)$ by $f(\|Tx - x\|)$ since $\|Tx - x\| \leq \|Tx - x\|$ for $x \in C$.

多少の工夫は必要であるが, この補題を定理 8 の iteration に適用すると,

(ii) $\lim_n \|S^{i_n}T^{i_n}x_n - x_n\| = 0, \qquad \lim_n \|T(S^{i_n}T^{i_n}x_n) - S^{i_n}T^{i_n}x_n\| = 0.$

を満たす数列 $\{i_n\} \subset N$ の存在を証明できる.

(i) と (ii) を示してしまえば, 定理 8 を得ることは容易である. ただし, 常套的に使用される, 次の重要な 2 つの補題が必要である. 補題 13 は the Browder demiclosed principle と呼ばれる. 補題 14 は Reich の補題 [16] の拡張である.

Lemma 13. *Let C be a bounded, closed and convex subset of a uniformly convex Banach space E. Let T be a nonexpansive self-mapping on C. Suppose $\{u_n\}$ is a sequence in C which converges weakly to u and $\lim_n \|Tu_n - u_n\| = 0$. Then, $u \in F(T)$.*

Lemma 14. *Let E be a uniformly convex Banach space such that E^* has the Kadec–Klee property. Let C be a convex subset of E. Let $\{T_n\}$ be a sequence of nonexpansive self-mappings on C with $\cap_n F(T_n) \neq \phi$. Let $u_1 \in C$ and $\{u_n\}$ be a sequence defined by*

$$u_{n+1} = T_n u_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1 u_1 \qquad \text{for} \quad n \in N.$$

Let $\{u_{n_i}\}$ and $\{u_{n_j}\}$ be subsequences of $\{u_n\}$ which converge weakly to $v, w \in \cap_n F(T_n)$, respectively. Then $v = w$.

ここに提示したいくつかの補題の証明については, 例えば [8] を参照されたい.

3. APPENDIX

補題 12 は補題 11 から簡単に導かれ有用と思われるが, 著者はこれを見たことがない. 非拡大写像を対象として, この応用例を 1 つあげておこう.

For reference. *Let E be a uniformly convex Banach space whose dual E^* has the Kadec–Klee property. Let C be a bounded closed and convex subset of E. Let $\{T_i\}_{i=1}^k$ be a finite family of nonexpansive self-mappings on C with a common fixed point. Let $u_1 \in C$ and define a sequence $\{u_n\}$ in C by*

$$u_{n+1} = \tfrac{1}{2k} \textstyle\sum_{i=1}^k T_i u_n + \tfrac{1}{2} u_n \qquad \text{for} \quad n \in N.$$

Then, $\{u_n\}$ converges weakly to a common fixed point of $\{T_i\}_{i=1}^k$.

$n \in N$ ごとに, S を次の様に定義する.

$$Sx = \tfrac{1}{2k} \textstyle\sum_{i=1}^k T_i x + \tfrac{1}{2} x \qquad \text{for} \quad x \in C.$$

このとき, $\cap_{i=1}^k F(T_i) = F(S)$ と $u_{n+1} = S^n u_1$ は自明である. $v \in \cap_{i=1}^k F(T_i)$ とし補題 12 の f を使って次の関係が容易にわかる.

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - v\| &\leq \tfrac{1}{k} \textstyle\sum_{i=1}^k \|\tfrac{1}{2}(T_i u_n - v) + \tfrac{1}{2}(u_n - v)\| \\ &\leq \|u_n - v\| - \tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{i=1}^k f(\|T_i u_n - u_n\|) \qquad \text{for} \quad n \in N. \end{aligned}$$

従って, $\{\|u_n - v\|\}$ は収束し, 次の関係も成立することが分かる.

$$\tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{i=1}^k f(\|T_i u_n - u_n\|) \leq \|u_n - v\| - \|u_{n+1} - v\| \qquad \text{for} \quad n \in N.$$

この式と f の性質から, i ごとに, $\lim_n \|T_i u_n - u_n\| = 0$ を得る.

$\{u_n\}$ は有界であるから弱収束する部分列を持つ. $\{u_{n_j}\}$ をある $z \in C$ に弱収束する部分列とする. このとき, $\lim_n \|T_i u_n - u_n\| = 0$ と Browder の補題 13 によって, $z \in \cap_{i=1}^{k} F(T_i)$ が分かる. 従って, 任意の弱収束する部分列は弱極限を $\cap_{i=1}^{k} F(T_i) = F(S)$ の中に持つ. 拡張した Reich の補題 14 によって, これらの弱極限は 1 点となる.

ここまでの議論によって, $\{u_n\}$ 自身が $z \in \cap_{i=1}^{k} F(T_i)$ に弱収束することが分かる. 枝葉の議論を避けるために, 不要ではあるが, C に有界性を仮定した.

References

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications*, Indian J. Math., **41** (1999), 435–453.

[2] R. E. Bruck Jr., *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **53** (1974), 59-71.

[3] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **38** (1981), 304–314.

[4] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J. Math. **13** (1963), 1139–1141.

[5] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), no.1, 65–71.

[6] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.

[7] M. A. Krasnoselskii, *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspehi Mat. Nauk **10** (1955), 123–127 (Russian).

[8] R. Kubota, W. Takahashi, and Y. Takaeuchi, *Extensions of Browder's demiclosed principle and Reich's lemma and their applications*, to appear.

[9] R. Kubota and Y. Takaeuchi, *On Ishikawa's strong convergence theorem*, Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012, Kitakyushu, Japan, (Editors M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki), Yokohama Publishers 2014, 377–389.

[10] R. Kubota and Y. Takeuchi, *Strong convergence theorems for finite families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of the 3th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Matsue, Japan, 2012.

[11] P. K. F. Kuhfittig, *Common fixed points of nonexpansive mappings by iteration*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 97, no. 1 (1981), 137–139.

[12] J. Linhart, *Beiträge zur Fixpunkttheorie nichtexpandierender Operatoren*, Monatsh. Math. **76** (1972), 239–249 (German).

[13] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[14] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[15] S. Prus, *Geometrical background of metric fixed point theory* in Handbook of metric fixed point theory (W. A. Kirk and B. Sims Eds.), 2001, pp. 93–132, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[16] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[17] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71-83.

[18] K. Shimoji and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications*, Taiwanese Journal of Mathematics, vol. 5, no. 2 (2001), 387–404.

[19] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.

[20] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications (2005), 103–123.

[21] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[22] W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japon. **48** (1998), 1–9.

[23] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.

[24] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.