数理解析研究所講究録
第2011巻 2016年 154-159

DC 最適化問題における Lagrange 型双対定理の制約想定に関する一考察

島根大学大学院総合理工学研究科　原田涼平
Harada Ryohei, Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University

島根大学大学院総合理工学研究科　黒岩大史
Daishi Kuroiwa, Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1 導入

本講究録では以下のような DC 最適化問題における Lagrange 型双対について考察する。

$$
\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) - g_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) - g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m \end{array}
$$

ただし、$f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸関数 $(i = 0, 1, \ldots, m)$ である。一般に凸関数同士の差で表すことができる関数を Difference of convex functions を省略して DC 関数と呼ぶ。一般に 2 回連続的微分可能な関数は DC 関数であることが知られている。詳しくは [3] を参照せよ。最適化問題の最適値を考える際、Lagrange 型双対問題を考えることが有用になる場合がある。ある条件を与えることで主問題の最適値と Lagrange 型双対問題の最適値が一致する。この条件を制約想定という。DC 最適化問題における Lagrange 型双対に関する制約想定が [8] において与えられている。また、問題 (P) は以下の問題 (P') と同値である。

$$
\text{(P')} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) - g_0(x) \\ \text{subject to} & \max\limits_{i=1,\ldots,m} \{f_i(x) - g_i(x)\} \leq 0 \end{array}
$$

本講究録では問題 (P') において Lagrange 型双対問題を考えたとき、[8] における制約想定とどのような差が生まれるかを考察する。

2 準備

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において、$x = (x_1, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n$ と $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ の内積を $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ で定義する。集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ の凸包、錐包をそれぞれ $\operatorname{co} A$、$\operatorname{cone} A$ と表記する。拡張実数値関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が凸関数であるとは、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$、$\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$
f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y)
$$

が成り立つときをいう。

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$$
$$\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \leq r\}$$

をそれぞれ f の実効定義域、f のエピグラフという。関数 f が凸関数であることと $\operatorname{epi} f$ が凸集合であることは同値である。$\operatorname{dom} f$ が空でないとき、f は真関数であるという。$\operatorname{epi} f$ が閉集合であるとき、f は閉関数であるという。凸関数 f について、

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$$

で定義される関数 $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を f の共役関数という。f の $x \in \mathbb{R}^n$ における劣微分を

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, y - x \rangle + f(x) \leq f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

で定義する。集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \notin A \end{cases}$$

で定義される関数 $\delta_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を A の標示関数という。また、実数値凸関数 $f_i\,(i = 1, \ldots, m)$ に対して、

$$\operatorname{epi}(\max_{i=1,\cdots,m} f_i)^* = \operatorname{co}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{epi} f_i^*\Big) \tag{1}$$

が成立する。詳しくは [2] の Theorem 2.4.7 を参照せよ。

3 凸最適化問題における Lagrange 双対定理

まず初めに以下の凸最適化問題を考える。

$$(\mathrm{Q}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m \end{array}$$

ただし、$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(i = 0, 1, \ldots, m)$ は凸関数とする。さらに以下の Lagrange 双対問題を考える。

$$\max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)\}$$

ある条件をあたえると、主問題 (Q) の最適値と Lagrange 双対問題の最適値が一致する。この条件を制約想定という。制約想定としては Slater 制約想定が有名である。これまで多くの研究者によって制約想定の研究がされてきたが、凸最適化問題に対する必要十分な制約想定が [7] にて与えられた。

定理 1. (M. A. Goberna, V. Jeyakumar, M. A. Lopez, [7]) I を添え字集合、$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(i \in I)$ を閉真凸関数、C を閉凸集合、各 f_i は $A = \{x \in C \mid f_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ の少なくとも 1 点で連続とする。このとき以下は同値である。

(i) 以下の集合は閉集合である。

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i\in I}\operatorname{epi} f_i^* + \operatorname{epi}\delta_C^* \tag{2}$$

(ii) $A \cap \operatorname{dom} f_0 \neq \emptyset$ かつ $\operatorname{epi} f_0^* + \operatorname{epi}\delta_A^*$ が閉集合であるような任意の閉真凸関数 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して、

$$\inf_{x\in A} f_0(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x\in C}\left\{f_0(x) + \sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x)\right\}$$

(iii) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\inf_{x\in A}\langle v, x\rangle = \max_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x\in C}\left\{\langle v, x\rangle + \sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x)\right\}$$

ただし、$\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$ であるとは任意の $i \in I$ に対して $\lambda_i \geq 0$ かつ $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ が有限集合であるときをいう。

(2) が閉集合であるとき、$\{f_i(x) \leq 0, i \in I, x \in C\}$ は Farkas-Minkowski、省略して FM であるという。 定理 1 より、$\{f_i(x) \leq 0, i \in I, x \in C\}$ が FM であることが任意の目的関数に対して凸最適化問題における主問題の最適値と Lagrange 双対問題の最適値が一致するための必要十分な制約想定であることがわかる。さて、問題 (Q) は以下の問題と同値である。

$$\text{(Q')}\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & \displaystyle\max_{i=1,\ldots,m} f_i(x) \leq 0. \end{array}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\operatorname{cone}\operatorname{co}\operatorname{epi}\left(\max_{i=1,\ldots,m} f_i\right)^* + \{0\}\times[0,+\infty) &= \operatorname{cone}\operatorname{co}\operatorname{co}\bigcup_{i=1}^{m}\operatorname{epi} f_i^* + \{0\}\times[0,+\infty) \\ &= \operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i=1}^{m}\operatorname{epi} f_i^* + \{0\}\times[0,+\infty)\end{aligned}$$

であるから、$\{f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m, x \in \mathbb{R}^n\}$ が FM であることと $\{\max_{i=1,\cdots,m} f_i(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ が FM であることは同値である。したがって凸最適化問題における Lagrange 双対を考える際、制約関数の最大値を考えることは意味がない。

4 DC最適化問題におけるLagrange型双対定理と制約想定の観察

以下のDC最適化問題におけるLagrange型双対を考察する。

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) - g_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) - g_i(x) \leq 0,\, i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

ただし、$f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(i = 0, 1, \ldots, m)$ は凸関数とする。この問題におけるLagrange型双対性に関する十分条件として、以下の結果がある。

定理 2. (R. Harada, D. Kuroiwa, [8]) $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(i = 0, 1, \ldots, m)$ を凸関数、$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0\,(\forall i = 1, \ldots, m)\} \neq \emptyset$、$\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$、$\bigcup_{x \in S} \left(\prod_{i=1}^{m} \partial g_i(x) \right) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ とする。$S(y_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i) \leq 0, \forall i = 1, \cdots, m\} \neq \emptyset$ かつ

$$\text{cone}\,\text{co} \bigcup_{i=1}^{m} (\text{epi}\, f_i^* - (y_i, g_i^*(y_i))) + \{0\} \times [0, +\infty) \text{ が閉集合} \tag{3}$$

ならば、

$$\inf_{x \in S} \{f_0(x) - g_0(x)\} = \inf_{(y_0, (y_i)) \in D_0 \times D} \max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \begin{array}{l} f_0(x) - \langle x, y_0 \rangle + g_0^*(y_0) \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i)) \end{array} \right\}$$

凸最適化問題で考察したことと同様に、問題 (P) と次の問題 (P') は同値である。

$$\text{(P')} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) - g_0(x) \\ \text{subject to} & \max_{i=1,\ldots,m} \{f_i(x) - g_i(x)\} \leq 0 \end{array}$$

問題 (P') は制約関数が以下のような変形ができるため、DC最適化問題である。

$$\max_{i=1,\ldots,m} \{f_i - g_i\} = \max_{i=1,\ldots,m} \left\{ f_i + \sum_{j \neq i} g_j - \sum_{i=1}^{m} g_i \right\} = \max_{i=1,\ldots,m} \left\{ f_i + \sum_{j \neq i} g_j \right\} - \sum_{i=1}^{m} g_i$$

そこで、$F = \max_{i=1,\ldots,m} \{f_i + \sum_{j \neq i} g_j\}$, $G = \sum_{i=1}^{m} g_i$ として、F, G を定理2に適用した際に、制約想定に差が生まれるかを考察する。その結果、以下の結果が得られる。詳細は [9] を参照せよ。

定理 3. $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(i = 0, 1, \ldots, m)$ を凸関数、$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \ldots, m\}$, $F = \max_{i=1,\ldots,m} \{f_i + \sum_{j \neq i}^{m} g_j\}$, $G = \sum_{i=1}^{m} g_i$, $\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0$

かつ $\bigcup_{x\in S}\partial G(x)=D$ とする。 任意の $(y_i)\in\bigcup_{x\in S}\prod_{i=1}^{m}\partial g_i(x)$ に対して

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\left(\operatorname{epi}f_i^*+\sum_{j\neq i}\operatorname{epi}g_j^*\right)-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i,g_i^*(y_i)\right)\right)+\{0\}\times[0,+\infty)\ \text{が閉集合} \tag{4}$$

ならば、

$$\inf_{x\in S}\{f_0(x)-g_0(x)\}=\inf_{(y_0,\hat{y})\in D_0\times D}\max_{\lambda\geq 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\begin{array}{l}f_0(x)-\langle x,y_0\rangle+g_0^*(y_0)\\+\lambda(F(x)-\langle x,\hat{y}\rangle+G^*(\hat{y}))\end{array}\right\}$$

ここで、条件 (3) と (4) の関係について考察するが、実際は (4) と (3) に強弱関係はない。本講究録においては (4) ならば (3) の反例を与える。$f_1,f_2,g_1,g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2-x+1 & \text{if } x\geq 2,\\ 0 & (-2<x<2)\\ \frac{1}{4}x^2+x+1 & \text{その他},\end{cases}\qquad f_2(x)=\frac{1}{25}x^2-\frac{1}{4},$$

$$g_1(x)=\frac{1}{5}x^2,\quad g_2(x)=\left[\frac{x+1}{2}\right]x-\left[\frac{x+1}{2}\right]^2\quad (x\in\mathbb{R})$$

で定めると、

$$f_1^*(y)=\begin{cases}y^2+2y & (y\geq 0)\\ y^2-2y & \text{その他},\end{cases}\qquad f_2^*(y)=5y^2+\frac{1}{4},$$

$$g_1^*(y)=\frac{5}{4}y^2,\quad g_2^*(y)=(2[y]+1)y-[y]^2-[y]\quad (y\in\mathbb{R})$$

となる。したがって任意の $(y_1,y_2)\in\bigcup_{x\in S}(\partial g_1(x)\times\partial g_2(x))$ に対して $\operatorname{cone}\operatorname{co}((\operatorname{epi}f_1^*+\operatorname{epi}g_2^*)\cup(\operatorname{epi}f_2^*+\operatorname{epi}g_1^*)-(y_1+y_2,g_1^*(y_1)+g_2^*(y_2)))+\{0\}\times[0,+\infty)$ は閉集合である。一方、

$$\begin{aligned}&\operatorname{cone}\operatorname{co}((\operatorname{epi}f_1^*-(0,g_1^*(0)))\cup(\operatorname{epi}f_2^*-(0,g_2^*(0))))+\{0\}\times[0,+\infty)\\&=\{(x,\alpha)\mid 2|x|<\alpha\}\cup\{(0,0)\}\end{aligned}$$

であるから、この集合は閉集合ではない。したがって (4) ならば (3) は一般には成り立たない。

最後に、問題 (P) と問題

$$\text{(P")}\quad\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x)-g_0(x)\\ \text{subject to} & \max_{i\in I}\{f_i(x)-g_i(x)\}\leq 0,\\ & f_i(x)-g_i(x)\leq 0,\ \forall i\notin I,\end{array}$$

が同値であることから、この問題を定理 3 と同様にして Lagrange 型双対性を考察すると、定理 2 と 3 の制約を包括するような定理が得られる。詳細は [9] を参照せよ。

参考文献

[1] J. Hiriart-Urruty, J. Baptiste, Lemarechal, Claude, *Convex analysis and minimization algorithms I. Advanced theory and bundle methods. Grundlehren der mathematischen wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin. (1993)

[2] J. Hiriart-Urruty, J. Baptiste, Lemarechal, Claude, *Convex analysis and minimization algorithms II. Advanced theory and bundle methods. Grundlehren der mathematischen wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin. (1993)

[3] Horst, R.,Pardalos, P. M., and Thoai, N. V., *Introduction to global optimization*, Kluwer academic publishers, Dordrecht, Holland, 1995.

[4] R. Horst, N.V. Thoai, *DC programming: overview*, J. Optim. Theory Appl. 103 (1999) 1-43.

[5] J.-E. Martínez-Legaz, M. Volle, *Duality in DC programming: the case of several DC constraints*, J. Math. Anal. Appl. 237 (1999) 657-671.

[6] V. Jeyakumar, N. Dinh, G.M. Lee, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization* , Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathematics, University of New South Wales (2004)

[7] M.A. Gberna, V. Jeyakumar, M.A. López, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 1184-1194.

[8] R. Harada, D. Kuroiwa, *Lagrange-type duality in DC programming*, J. Math. Anal. Appl. 418(2014) 415-424.

[9] R. Harada, D. Kuroiwa, *Lagrange-type duality in DC programming problem for some equivalent DC constraint*, submitted.