数理解析研究所講究録
第2013巻 2016年 170-177

多重ゼータ関数の平均値と零点について

名古屋大学・多元数理科学研究科　松岡 謙晶
Kaneaki Matsuoka
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

名古屋大学・多元数理科学研究科　池田 創一
Soichi Ikeda
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1　はじめに

この文書ではとくに断らないかぎり、$s=\sigma+it, s_1=\sigma_1+it_1, \ldots, s_k=\sigma_k+it_k, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k, t, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}, T \geq 2$ とする。近年、様々な多重ゼータ関数が考案されているが、この文書では Euler-Zagier の多重ゼータ関数

$$\zeta_k(s_1, \ldots, s_k)=\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_2=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{n_2^{s_2}} \cdots \sum_{n_k=n_{k-1}+1}^{\infty} \frac{1}{n_k^{s_k}}$$

について述べることとする。なお、上記の右辺の和は $\sigma_k>1, \sigma_{k-1}+\sigma_k>2, \ldots, \sigma_1+\cdots+\sigma_k>k$ で絶対収束する。Euler-Zagier の多重ゼータ関数 $\zeta_k(s_1, \ldots, s_k)$ は $k=1$ の場合 (すなわちリーマンゼータ関数の場合) を除けば、昔は正の整数点での値のみに関心が持たれていたが、近年は解析的な挙動についても研究がなされている。この文書では解析的な挙動について述べるのだが、とくに平均値について重点的に述べることにする。

まず、リーマンゼータ関数の 2 乗平均について思い出しておこう。簡

単に述べれば

$$\int_2^T |\zeta(s)|^2 dt \sim \begin{cases} \zeta(2\sigma)T & (\sigma > 1/2) \\ T\log T & (\sigma = 1/2) \\ \frac{(2\pi)^{2\sigma-1}}{2-2\sigma}\zeta(2-2\sigma)T^{2-2\sigma} & (\sigma < 1/2) \end{cases} \tag{1}$$

が成り立つのだった。臨界線 $\sigma = 1/2$ のところで挙動が変化していることが見て取れる。臨界線は有名なリーマン予想に関わっているところであることを思い出せば、臨界線がリーマンゼータ関数にとって非常に特別な意味を持っているということが感じられるであろう。別な見方をすれば、上の式の右辺で $\sigma > 1/2$ のときの T の係数 $\zeta(2\sigma)$ が発散するところが $\sigma = 1/2$ である、とも言える。このことは後で重要になるので注意していただきたい。

2　2 重ゼータ関数の 2 乗平均

話を多重ゼータ関数に戻そう。前の章で $\zeta_k(s_1, \ldots, s_k)$ の解析的な性質について述べる、と書いたが、そもそも $\zeta_k(s_1, \ldots, s_k)$ はリーマンゼータ関数のように絶対収束領域の外に解析接続できるのか、という疑問が生じる。それは可能であり、いくつか方法が知られているようだが、この文書の主結果と最も関係が深いのは、秋山-江上-谷川 [1] の方法である。[1] では $\zeta_k(s_1, \ldots, s_k)$ が $\mathbb{C}^k$ 上の有理型関数として解析接続できることを証明している。また、$\zeta_k(s_1, \ldots, s_k)$ の特異点も求めている。

さて、解析接続ができることが分かれば、臨界線の類似物を考えたくなるのは自然なことであろう。この問題に 2 乗平均の観点から取り組んだ最初の研究は、松本-津村 [7] である。彼らの [7] は $\zeta_2(s_1, s_2)$ に対する 2 乗平均の研究としては最初のものである (注: もちろん多重ゼータ関数の 2 乗平均の研究としても最初のものである)。具体的には彼らは

$$\int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_2 \tag{2}$$

を研究した。そして大雑把にいうと、彼らは

$$\int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_2 \sim \zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma_2)T$$

を $\sigma_1, \sigma_2 > 1/2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 3/2$ のときに示した (注: 実際には誤差項も出ている)。ここで $\zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma_2)$ は $\sigma_2 > 1/2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 3/2$ のときに絶対収

束するある級数である。彼らはこれらのことと、(1) について上で注意したことから、

1. $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ で (2) の挙動が変化し、log 因子が現れること

2. $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ が $\zeta_2(s_1,s_2)$ の臨界線の類似物ではないかということ

を予想した。つまり、級数 $\zeta_2^{[2]}(s_1,2\sigma_2)$ の絶対収束性がおかしくなるところ、として $\zeta_2(s_1,s_2)$ の臨界線の類似物を予想したのである。のちに池田-松岡-永田 [3] で上記の予想 1 は肯定的に解決された。これは予想 2 を支持する結果でもある。また、[3] では新たに 2 乗平均

$$\int_2^T |\zeta_2(s_1,s_2)|^2 dt_1$$

も考察し、予想 1 に相当する結果を得ており、これもまた予想 2 を支持する結果と言える。

3 多重ゼータ関数の 2 乗平均

さて、前の章では 2 重ゼータ関数の 2 乗平均の研究について簡単に述べたが、一般の k 重ゼータ関数に対しては同様の研究はなされていなかった。しかし、2 重の場合を考慮すれば、2 乗平均

$$I_k^{[j]}(T;s_1,\ldots,\sigma_j,\ldots,s_k)=\int_2^T |\zeta_k(s_1,\ldots,s_k)|^2 dt_j \qquad (1\le j\le k) \quad (3)$$

を考えることは自然であるように思われる。この $I_k^{[j]}(T;s_1,\ldots,\sigma_j,\ldots,s_k)$ を一般の j,k について考察するのは難しいのだが、我々は [2] で以下の結果を得ることができた。

主結果 $s_1=\sigma_1+it_1,\ldots,s_k=\sigma_k+it_k\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$, $T\ge 2$ とする。また、t_1 が 2 から T を動くとき、点 $(s_1,\ldots,s_k)\in\mathbb{C}^k$ は $\zeta_k(s_1,\ldots,s_k)$ の特異点 (singularities) を通らないと仮定する。このとき、$\sigma_1+\cdots+\sigma_k>k$ なら

$$I_k^{[1]}(T;\sigma_1,s_2,\ldots,s_k)=\zeta_k^{[1]}(2\sigma_1,s_2,\ldots,s_k)T+O(1)$$

であり、$k-1/2<\sigma_1+\cdots+\sigma_k\le k$ なら

$$I_k^{[1]}(T;\sigma_1,s_2,\ldots,s_k)=\zeta_k^{[1]}(2\sigma_1,s_2,\ldots,s_k)T+$$
$$+\begin{cases}O(T^{2k-2(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)}) & (k-1/2<\sigma_1+\cdots+\sigma_k<k),\\ O((\log T)^2) & (\sigma_1+\cdots+\sigma_k=k).\end{cases}$$

であり、$\sigma_1+\cdots+\sigma_k=k-1/2$ なら

$$I_k^{[1]}(T;\sigma_1,s_2,\ldots,s_k)=|F_k(s_2,\ldots,s_k)|^2T\log T+O(T)$$

であり、$\sigma_1+\cdots+\sigma_k<k-1/2$ なら

$$I_k^{[1]}(T;\sigma_1,s_2,\ldots,s_k)\sim|F_k(s_2,\ldots,s_k)|^2\frac{(2\pi)^{2(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)-2k+1}}{2k-2(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)}$$
$$\times\zeta(2k-2(\sigma_1+\cdots+\sigma_k))T^{2k-2(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)}$$

である。ここで、$O-$ 定数は $\sigma_1,s_2,\ldots,s_k$ に依存する。また、$\zeta_k^{[1]}(2\sigma_1,s_2,\ldots,s_k)$ は $\sigma_1+\cdots+\sigma_k>k-1/2$ で絶対収束する級数で、

$$\zeta_k^{[1]}(\sigma_1,s_2,\ldots,s_k)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^{\sigma_1}}|Z_{k-1}(s_2,\ldots,s_k;n_1)|^2$$

と定義される。なお、関数 Z_k については後で定義を示す。それから、

$$F_k(s_2,\ldots,s_k)=\prod_{i=0}^{k-2}\left(\sum_{j=k-i}^{k}s_j-(i+1)\right)^{-1}$$

である。

主結果についての注意　以上の結果はリーマンゼータ関数について知られた結果 (1) によく似ているように見える。実際、この結果は k についての帰納法を用いて証明するため、リーマンゼータ関数の性質を引き継いでいると言える。そして、帰納法を使って解析接続や近似式を示す際に、[1] の議論とよく似た議論を行う。とくに、特異性を確定するときの議論は大変参考になった。これが、この文書と最も関係が深い解析接続の方法が [1] であると述べた理由である。より具体的には $k\in\mathbb{N}$, $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\sigma_k>1,\sigma_{k-1}+\sigma_k>2,\ldots,\sigma_1+\cdots+\sigma_k>k$ のとき

$$Z_k(s_1,\ldots,s_k;N)=\sum_{n_1=N+1}^{\infty}\frac{1}{n_1^{s_1}}\sum_{n_2=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{n_2^{s_2}}\cdots\sum_{n_k=n_{k-1}+1}^{\infty}\frac{1}{n_k^{s_k}}$$

とおくと、

$$
\begin{aligned}
&Z_{k+1}(s_1,\ldots,s_{k+1};N)\\
&=\frac{Z_k(s_1,\ldots,s_{k-1},s_k+s_{k+1}-1;N)}{s_{k+1}-1}-\frac{Z_k(s_1,\ldots,s_{k-1},s_k+s_{k+1};N)}{2}\\
&+\sum_{j=1}^{2l}\frac{B_{j+1}}{(j+1)!}(s_{k+1})_j Z_k(s_1,\ldots,s_{k-1},s_k+s_{k+1}+j;N)\\
&-\sum_{N<n_1<\cdots<n_k}\frac{\phi_l(n_k,s_{k+1})}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}}
\end{aligned}
$$

(注: ここで $l\in\mathbb{N}$, $\sigma_{k+1}+2l>0, \sigma_k+\sigma_{k+1}+2l>1,\ldots,\sigma_1+\cdots+\sigma_{k+1}+2l>k$ で

$$
\phi_l(m,s)=\frac{(s)_{2l+1}}{(2l+1)!}\int_m^\infty B_{2l+1}(x-[x])x^{-s-2l-1}dx
$$

である。) という漸化式のようなものが成り立つのだが、この式の導出およびその取扱いに [1] で行われている議論とよく似た議論をするのである。そして、この式は我々の結果を導くにあたり大変重要な役割を果たすのである。実際、この式を用いることで、平均値の計算を [3] と似た方法で行うことができるようになるのである。

さらに、2 重のときと同様の推論により、$\zeta_k(s_1,\ldots,s_k)$ に対する臨界線の類似物は $\sigma_1+\cdots+\sigma_k=k-1/2$ であると予想できる。これは前述の松本と津村の予想の一般化である (実際 $k=2$ のときは彼らの予想と一致する)。

それから、この結果を標語的に言うなら

「変数 t_1 についての 2 乗平均は何重ゼータ関数に対しても計算できる。」

ということになるわけだが、t_1 以外の変数についての平均値がどうなるのか、という疑問が生じる。これについて我々は

「(3) で j,k が大きくなればなるほど難しく (計算が大変に) なる。」

と考えている。とりわけ、(3) で j が大きい場合は難しいと思っている。これは 2 重の場合でもそうなっているためである。詳しいことは [3] を見ていただきたいのだが、大雑把に言えば、場合分けが増えるということになる。

4 残された問題達とこれからのこと

これまで多重ゼータ関数の平均値について述べてきたが、まだまだ未解決の問題は多い。まず、前の章でも述べたが一般の j,k について (3) を計算するという問題がある。これは、理屈の上では、[3] や [2] の方針を踏襲すれば計算できると考えている。しかし、[3] にあるのと同様の結果を出すのは、手計算では $k=3$ の場合が限界ではないかとも思う。$k=3$ の場合でも、t_3 についての平均値の計算は場合分けが多くなるのではないかと思っている。また、手計算で [2] のような結果 (この文書の主結果のような結果) を出すのは、$j=2$ (がんばって $j=3$) が限界ではないかと思う。もちろん、うまい一般論が作れれば別であろうが。要するに、従来通りの方法では現実的には難しい、ということである。

また、これまで述べたことにより、$\zeta_k(s_1,\ldots,s_k)$ に対する臨界線の類似物が確立されたと見る人もいるかもしれないが、実際にはそうとは言えない面もある。例えば、[3] では、二乗平均

$$\int_2^T |\zeta_2(\sigma_1+it,\sigma_2+it)|^2 dt \tag{4}$$

も考察しているのだが、この平均値に対して、これまでと同様の議論をすると、臨界線の類似物は $\sigma_1+\sigma_2=1$ ではないか、と予想できてしまうのである (注: つまり、(4) の漸近公式の主要項がある級数 $C(\sigma_1,\sigma_2)$ を用いて $C(\sigma_1,\sigma_2)T$ と書けることを示し、級数 $C(\sigma_1,\sigma_2)$ の収束と発散の状況から臨界線を予想する、ということ)。さらに、臨界線の類似物というからには、零点についてリーマン予想の類似が成り立って欲しいとも思うのだが、そうもいかないのである。そもそも、多変数の複素関数では、零点 (零集合) を数えるということ自体が困難である。その上、$\zeta_2(s,s)$ のように変数を揃えて 1 変数の複素関数としても、リーマン予想の単純な類似が成り立たないことが分かっている。これについては中村-Pańkowski [9] を見るとよい。なお、[9] では $\zeta_k(s,\ldots,s)$ の場合について論じられている。また、松本-東海林 [8] は $\zeta_2(s,s)$ の零点を数値計算しており、図もあるから分かりやすいかもしれない。ちなみに、[8] では数値計算の結果から、$\zeta_2(s,s)$ の零点の分布はフルフィッツゼータ関数のそれに似ているように見える、と述べている。そして、それについて我々はより理論的な観点から論じることができたので、その結果は近いうちに論文とする予定である。

それから、リーマンゼータ関数の場合、平均値はリーマンゼータ関数

の増大度を調べる問題と密接に関わりがある。そしてリーマンゼータ関数の増大度については、リンデレーフ予想

$$\zeta(1/2+it)=O(t^{\epsilon}) \qquad (\forall\epsilon>0)$$

という重要な予想もあるためよく調べられている。一方、多重ゼータ関数の増大度についてはそれほど多くのことは調べられていない。多重ゼータ関数の増大度についての研究としては、石川-松本による [4] や木内-谷川による [5], [6] などがあるが、どれもリーマンゼータ関数について知られている結果ほど精密であるとは言えないようである。また、我々の知る限り、多重ゼータ関数の平均値と多重ゼータ関数の増大度との関係も、リーマンゼータ関数におけるそれほどは明らかになっていないようである。

このように多重ゼータ関数の解析的な性質には分からないことがたくさんあるのである。その上、本質的に新しい手法 (例えば多変数複素関数論の方面とかで) が無くては解決できそうもないものを含んでいるように見える。そのことを考慮すれば、まだ我々は多重ゼータ関数の解析的な性質の研究の入り口近くに立っているのではないか、と思えてくるのである。今後の研究が待たれるところであろうか。

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, Acta Arith. **98** (2001), 107-116.

[2] S. Ikeda and K. Matsuoka, On certain mean values of multiple zeta-functions, to appear in Comment. Math. Univ. St. Pauli

[3] S. Ikeda, K. Matsuoka and Y. Nagata, On certain mean values of the double zeta-function, to appear in Nagoya Math. J.

[4] H. Ishikawa and K. Matsumoto, On the estimation of the order of Euler-Zagier multiple zeta-functions, Illinois J. Math. **47** (2003), 1151-1166.

[5] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, Bounds for double zeta-functions, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. Ser. V **5** (2006), 445-464.

[6] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, Bounds for triple zeta-functions, Indag. Math. (N.S.) **19** (2008), no. 1, 97-114.

[7] K. Matsumoto and H. Tsumura, Mean value theorems for double zeta-function, J. Math. Soc. Japan **67** (2015) 383-406.

[8] K. Matsumoto and M. Shōji, Numerical computations on the zeros of the Euler double zeta-function I, arXiv:1403.3765, to appear in Mosc. J. Comb. Number Theory.

[9] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions, arXiv:1212.5890.