数理解析研究所講究録
第2015巻 2017年 156-161

Laurent series expansions of the Euler-Zagier multiple zeta-functions at integer points

名古屋大学　松本　耕二
豊田工業大学　小野塚　友一
成蹊大学　若林　功
Kohji Matsumoto, Nagoya University
Tomokazu Onozuka, Toyota Technological Institute
Isao Wakabayashi, Seikei University

1 イントロダクション

Euler-Zagier 型 r 重ゼータ関数を次の級数により定義する ([3], [10])。

$$\zeta_r(\mathbf{s})=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=1}^{\infty}n_1^{-s_1}(n_1+n_2)^{-s_2}\cdots(n_1+\cdots+n_r)^{-s_r} \tag{1.1}$$

上の級数は $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r$ が次の領域内にあるときに絶対収束することが知られている ([5, Theorem 3])。

$$\mathcal{D}_r=\{\mathbf{s}\in\mathbb{C}^r \mid \Re(s(j,r))>r-j+1\ (1\leq j\leq r)\} \tag{1.2}$$

ただし $s(j,r)=s_j+s_{j+1}+\cdots+s_r$ とした。(1.1) の特殊値 $\zeta_r(\mathbf{m})$ ($\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}^r\cap\mathcal{D}_r$) は多重ゼータ値 (MZV) と呼ばれ、近年盛んに研究されている。

(1.1) の級数は $\mathbb{C}^r$ 上有理型に接続されることが知られている (Akiyama, Egami and Tanigawa [1], Zhao [11])。そのため (1.1) の級数の収束領域外にある整数点 $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r\setminus\mathcal{D}_r$ での挙動も興味深い研究対象であり、実際、研究も行われている (Akiyama, Egami and Tanigawa [1], Akiyama and Tanigawa [2], Komori [4], Sasaki [8] [9], the second-named author [7])。

このような中、Euler-Zagier 型 r 重ゼータ関数の整数点における Laurent 級数展開についての研究を行った ([6])。まずは一番シンプルな $r=1$ の場合を見てみる。$r=1$ のとき 1 重ゼータ関数 $\zeta_1(s)$ は Riemann ゼータ関数となり、Riemann ゼータ関数は整数点 $m\in\mathbb{Z}$ において以下のように展開できることが知られている。

$$\zeta(s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^{(n)}(m)(s-m)^n & (m\neq 1)\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(s-1)^n & (m=1)\end{cases} \tag{1.3}$$

ここで γ_n は n 番目の Stieltjes 定数 (一般化された Euler 定数ともいう)[†]であり、$\zeta^{(n)}(s)$ は Riemann ゼータ関数の n 回微分を表している。この Riemann ゼータ関数の微分 $\zeta^{(n)}(m)$ は $m>1$ のときには $\sum_{k=1}^{\infty}(-\log k)^n/k^m$ という級数で表される。ここで $(-\log 1)^0=0^0=1$ とした。

2 主結果

主結果は多重ゼータ関数の Laurent 級数展開についてのものだが、それは上で見た $r=1$ の場合を一般化したようなものになっている。$r=1$ の場合には点 $m=1$ における Laurent 級数展開の係数を Stieltjes 定数とおいたが、一般の r の場合には点 $(s_1,\ldots,s_r)=(1,\ldots,1)$ における次の Laurent 級数展開により r 重 $(n_1,\ldots,n_r)$ 番目の Stieltjes 定数を定めることとする。

$$\zeta_r(s_1,\ldots,s_r)=\left(\prod_{k=2}^{r}\frac{1}{s_k+\cdots+s_r-(r-k+1)}\right)\left\{\frac{1}{s_1+\cdots+s_r-r}\right. \tag{2.1}$$
$$\left.+\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=0}^{\infty}\gamma_{(n_1,\ldots,n_r)}(s_1-1)^{n_1}\cdots(s_r-1)^{n_r}\right\}$$

Remark 2.1. ここで r 重ゼータ関数が上式のような形に $(1,\ldots,1)$ のまわりで Laurent 級数展開できるということが証明可能であることを注意しておく。また $r=1$ の場合には、上式の $\gamma_{(n)}$ は Stieltjes 定数 γ_n と一致することも注意しておく。またここでは “Laurent 級数展開” として上式のような形を扱う。つまり分母の因数と分子の因数が必ずしも一致しないが、ここではこれを “Laurent 級数展開” と呼ぶこととする。

まず初めに整数点 $\mathbf{m}$ が絶対収束領域 $\mathfrak{D}_r$ 内にあるとき、$\mathbf{m}$ での Taylor 展開についてみてみる。このときには $r=1$ の場合と同じように展開ができ、次のように表される。

$$\zeta_r(\mathbf{s})=\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=0}^{\infty}\frac{1}{n_1!\cdots n_r!}\zeta_r^{(n_1,\ldots,n_r)}(m_1,\ldots,m_r)(s_1-m_1)^{n_1}\cdots(s_r-m_r)^{n_r} \tag{2.2}$$

ただし $\zeta^{(n_1,\ldots,n_r)}(\mathbf{m})$ は偏微分 $(\partial^{n_1}/\partial s_1^{n_1})\cdots(\partial^{n_r}/\partial s_r^{n_r})\zeta(\mathbf{m})$ を表している。そしてこの偏微分も 1 変数の場合と同様に次のような級数で表される。

$$\sum_{l_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{l_r=1}^{\infty}\frac{(-\log l_1)^{n_1}(-\log(l_1+l_2))^{n_2}\cdots(-\log(l_1+\cdots+l_r))^{n_r}}{l_1^{m_1}(l_1+l_2)^{m_2}\cdots(l_1+\cdots+l_r)^{m_r}}$$

次に絶対収束領域の外の整数点での Laurent 級数展開を考えよう。この場合は次の 2 つに分けて考える。

[†] $(-1)^n n!\gamma_n$ のことを n 番目の Stieltjes 定数と呼ぶこともある。

(i) $m_1, \ldots, m_r \geq 1$ を満たす整数点 $\mathbf{m}$
(ii) それ以外の整数点 $\mathbf{m}$

(i) については次の定理が成り立つ。

Theorem 2.2. $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ は条件 (i) を満たすものとする。このとき $\zeta_r(\mathbf{s})$ の $\mathbf{s} = \mathbf{m}$ における Laurent 級数展開の係数は次のものと有理数を使って書き表すことができる。

- $\gamma_{(n_1,\ldots,n_k)}$
- $\zeta_k^{(l_1,\ldots,l_k)}(q_1, \ldots, q_k)$

ただし $1 \leq k \leq r$, $(n_1, \ldots, n_k), (l_1, \ldots, l_k) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$, $(q_1, \ldots, q_k) \in \mathcal{D}_k \cap (\mathbb{Z}_{\geq 1})^k$ とする。

この定理より $m_1, \ldots, m_r$ が全て正の整数の場合は Laurent 級数展開の係数はこれまでに出てきた係数を用いて表せる。更に次章の例にあるようにその係数は明示的に与えられる。

Remark 2.3. 定理 2.2 の "Laurent 級数展開" は Remark 2.1 の形のものである。つまり分母は $(s(k,r) - (r-k+1))$ の積の形をしており、分子は $(s_1 - m_1), \ldots, (s_r - m_r)$ の積の形となっている。

定理 2.2 では係数を表すために多重の Stieltjes 定数が必要だったが、Laurent 級数展開に少し条件を付けると多重 Stieltjes 定数が必要なくなる。

Definition 2.4. $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ は条件 (i) を満たすものとする。$m_j = 1$ なる m_j が h 個あるとし、それらを $m_{a_1}, \ldots, m_{a_h}$ とおく。このとき $\zeta_r(\mathbf{s})$ の $\mathbf{m}$ における Laurent 級数展開で $s_{a_1} = \cdots = s_{a_h} = s$ という条件を付けたものを制限付き Laurent 級数展開と呼ぶこととする。

制限付き Laurent 級数展開に対して次の結果が成り立つ。

Theorem 2.5. $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ は条件 (i) を満たすものとする。このとき $\zeta_r(\mathbf{s})$ の $\mathbf{s} = \mathbf{m}$ における制限付き Laurent 級数展開の係数は次のものと有理数を使って書き表すことができる。

- γ_n
- $\zeta_k^{(l_1,\ldots,l_k)}(q_1, \ldots, q_k)$

ただし $n \geq 0$, $1 \leq k \leq r$, $(l_1, \ldots, l_k) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$, $(q_1, \ldots, q_k) \in \mathcal{D}_k \cap (\mathbb{Z}_{\geq 1})^k$ とする。

このように制限がなければ多重 Stieltjes 定数が必要だったが、制限付きの場合には 1 変数の Stieltjes 定数のみで係数が書き表せる。

次に (ii) の場合について考えよう。(ii) の場合には (i) における証明方法が使えないため、(i) の定理ほどきれいな主張にならない。実際 (ii) の場合の主結果は次のようになる。

Theorem 2.6. $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ は条件 (ii) を満たすものとする。このとき $\zeta_r(\mathbf{s})$ の $\mathbf{s} = \mathbf{m}$ における Laurent 級数展開の係数は次のものと有理数を使って書き表すことができる。

- $\gamma_{(n_1,\ldots,n_k)}$
- $\zeta_k^{(l_1,\ldots,l_k)}(q_1, \ldots, q_k)$
- $\zeta^{(n)}(m)$
- $\int_{(M_l(\mathbf{k})+1-\eta)} F_{z_l}^{(n_1,\ldots,n_l)}(\mathbf{k})\Gamma(-z_l)\zeta(-z_l)dz_l$

ただし $1 \le k \le r$, $(n_1, \ldots, n_k), (l_1, \ldots, l_k) \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^k$, $(q_1, \ldots, q_k) \in \mathfrak{D}_k \cap (\mathbb{Z}_{\ge 1})^k$, $m \le 0, n \ge 0$, $2 \le l \le r$, $(n_1, \ldots, n_l) \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^l$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^l \setminus (\mathbb{Z}_{\ge 1})^l$, $0 < \eta < 1$ とし、最後の積分の積分路は $\Re z_l = M_l(\mathbf{k}) + 1 - \eta$ を満たす縦方向の積分を表すものとし

$$
\begin{aligned}
F_{z_l}(\mathbf{s}) &:= \frac{\Gamma(s_l + z_l)}{\Gamma(s_l)}\zeta_{l-1}(s_1, \ldots, s_{l-2}, s_{l-1} + s_l + z_l) \quad \text{for} \quad \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_l), \\
M_r(\mathbf{m}) &= M_r(m_1, \ldots, m_r) := \max\{r - j - (m_j + \cdots + m_r) \mid 1 \le j \le r\}
\end{aligned}
$$

とする。

この定理 2.6 では定理 2.2 の証明方法が使えないために係数を closed な形で書くことが難しく、係数を表すために必要なものが 2 種類増えている。特に定理 2.6 の最後に挙げられている積分は複雑で値を明示的に与えることは難しい。

なお $m_r \in \mathbb{Z}_{\le 0}$ の場合に限り Laurent 級数展開でなく漸近評価を考えるなら次のように積分を使わずに表せる。

$$
\begin{aligned}
&\zeta_r(s_1, \ldots, s_r) \\
&= \frac{1}{s_r - 1}\zeta_{r-1}(s_1, \ldots, s_{r-2}, s_{r-1} + s_r - 1) \\
&\quad + \sum_{k_r=0}^{M_r(\mathbf{m})} \binom{-s_r}{k_r}\zeta_{r-1}(s_1, \ldots, s_{r-2}, s_{r-1} + s_r + k_r)\zeta(-k_r) \\
&\quad + O(|s_r - m_r|)
\end{aligned}
$$

この漸近式は $\zeta_r(s_1, \ldots, s_r)$ の $\mathbf{s} = \mathbf{m}$ の近くでの振舞が ζ_{r-1} の振舞から得られるということを意味している。このとき ζ_{r-1} は正則とは限らず極になっていることもあり、ζ_r の極の情報が ζ_{r-1} の和の形で表れる。またこの式で積分を含む係数が主要項に表れない理由は、積分を含む係数が全て誤差項に吸収されてしまうからである。

3 例

最後に定理2.2の簡単な例を見てみることにする。3重ゼータ関数の$\mathbf{m} = (2,1,1)$での Laurent 級数展開がどう表されるか見る。そこでs_1が2の近くに、s_2, s_3が1の近くにあるものと仮定する。このとき調和積を用いることで

$$\begin{aligned}\zeta_3(s_1, s_2, s_3) = \zeta(s_1)\zeta_2(s_2, s_3) - \zeta_2(s_1 + s_2, s_3)\\ - \zeta_3(s_2, s_1, s_3) - \zeta_2(s_2, s_1 + s_3) - \zeta_3(s_2, s_3, s_1)\end{aligned} \tag{3.1}$$

が得られる。このときs_1が2に近いことと$s_1 + s_3$が3に近いことから (3.1) の最後の2項は絶対収束領域の中にあるため (2.2) により Taylor 展開できる。(3.1) の第3項についてはもう一度調和積を用いる。

$$\begin{aligned}\zeta_3(s_2, s_1, s_3) = \zeta_2(s_2, s_1)\zeta(s_3) - \zeta_2(s_2, s_1 + s_3)\\ - \zeta_3(s_2, s_3, s_1) - \zeta_2(s_2 + s_3, s_1) - \zeta_3(s_3, s_2, s_1)\end{aligned} \tag{3.2}$$

このとき (3.2) の初項以外の項は上と同様に絶対収束領域の中にあり (2.2) により Taylor 展開できる。(3.2) の初項については2重ゼータ関数とリーマンゼータ関数の積になっているが、2重ゼータ関数の方は絶対収束領域内にあるため (2.2) が使え、リーマンゼータ関数の方は (1.3) を使い Laurent 級数展開ができる。

(3.1) の第2項については調和積を用いて

$$\zeta_2(s_1 + s_2, s_3) = \zeta(s_1 + s_2)\zeta(s_3) - \zeta_2(s_3, s_1 + s_2) - \zeta(s_1 + s_2 + s_3)$$

が得られる。後ろの2項については絶対収束領域内にあるため (2.2) が使え、初項については (1.3) を用いることで Laurent 級数展開できる。

最後に (3.1) の初項について見てみる。(s_2, s_3)は$(1,1)$に近いため (2.1) を使うことができ Laurent 級数展開ができる。

このようにして調和積を何度も使うことにより係数を決定することができる。また最後の (2.1) を使う部分を工夫することで制限付き Laurent 級数展開の係数も見つけることができる。この場合には$s_2 = s_3 = s$となるが、このときには (2.1) を使えない代わりに次の調和積を考えればよい。

$$\zeta_2(s, s) = \frac{1}{2}\{\zeta(s)^2 - \zeta(2s)\}$$

この調和積を用いることで多重の Stieltjes 定数が必要なくなる。

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, Acta Arith. **98** (2001), 107-116.

[2] S. Akiyama and Y. Tanigawa, Multiple zeta values at non-positive integers, Ramanujan J. **5** (2001), 327-351.

[3] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math. **152** (1992), 275-290.

[4] Y. Komori, An integral representation of multiple Hurwitz-Lerch zeta functions and generalized multiple Bernoulli numbers, Quart. J. Math. (Oxford) **61** (2010), 437-496.

[5] K. Matsumoto, On the analytic continuation of various multiple zeta-functions, in "Number Theory for the Millennium II", Proc. Millennial Conf. on Number Theory, M. A. Bennett et al. (eds.), A K Peters, Natick, 2002, pp.417-440.

[6] K. Matsumoto, T. Onozuka and I. Wakabayashi, Laurent series expansions of multiple zeta-functions of Euler-Zagier type at integer points, arXiv:1601.05918.

[7] T. Onozuka, Analytic continuation of multiple zeta-functions and the asymptotic behavior at non-positive integers, Funct. Approx. Comment. Math. **49** (2013), 331-348.

[8] Y. Sasaki, Multiple zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers, Acta Arith. **136** (2009), 299-317.

[9] Y. Sasaki, Some formulas of multiple zeta values for coordinate-wise limits at non-positive integers, in "New Directions in Value-Distribution Theory of Zeta and L-Functions", Proc. Würzburg Conf., R.& J. Steuding (eds.), Shaker, Aachen, 2009, pp.317-325.

[10] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in "First European Congress of Mathematics", Vol. II, A. Joseph et al. (eds.), Progr. Math. **120**, Birkhäuser, Basel, 1994, pp.497-512.

[11] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta functions, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1275-1283.