数理解析研究所講究録
第2016巻 2017年 168-174

曲面上の正則閉曲線の回転数について
On Rotation Numbers of Regular Closed Curves on Surfaces

岡山理科大学・理学部 山崎 正之
Masayuki Yamasaki
Faculty of Science, Okayama University of Science

1. 序

論文 [7] および関連研究の紹介を行う．平面の正則閉曲線の正則ホモトピーによる分類が「回転数」でなされることはよく知られている (Whitney-Graustein の定理 [6])．その結果を一般の曲面上の正則閉曲線の場合に拡張したい．

この論文中では常に M を "よい" リーマン計量を持つ曲面とする．M 上の正則閉曲線 γ に対してその**回転数** (**rotation number** もしくは **winding number** もしくは **Whitney index**) $W(\gamma)$ を導入したい:

$$W(\gamma) \in \begin{cases} \mathbb{Z} & \widetilde{M} \neq S^2, \gamma \text{ は 向きを保つ} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{上以外} \end{cases}$$

ただし, "よい" リーマン計量をもつ曲面とは, ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ 以外に例えば以下のようものを考えている: (開) アニュラス $A = [0,1] \times (-1/2, 1/2)/(0,y) \sim (1,y)$, シリンダー $C = [0,1] \times \mathbb{R}/(0,y) \sim (1,y)$, (開) メビウスの帯 $MB = [0,1] \times (-1/2,1/2)/(0,y) \sim (1,-y)$, ねじれシリンダー $TC = [0,1] \times \mathbb{R}/(0,y) \sim (1,-y)$, 2 次元トーラス T, クラインの壺 KB, 双曲閉曲面, 完備双曲曲面, 2 次元球面 S^2, 2 次元射影平面 P. アニュラスおよびメビウスの帯を「開」にしているのは本質的な制限ではない．これらの曲面の普遍被覆 (もとの曲面のリーマン計量の誘導するリーマン計量を与えておく) は以下のようなユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ への等角写像 ($\subset^\star$, $=^\star$, $\to^\star$) **conformally euclidean structure** をもっている:

- ユークリッド的曲面
  - $\widetilde{A} = \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset^\star \mathbb{E}^2$, $\widetilde{C} =^\star \mathbb{E}^2$
  - $\widetilde{MB} = \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset^\star \mathbb{E}^2$, $\widetilde{TC} =^\star \mathbb{E}^2$
  - $\widetilde{T} =^\star \mathbb{E}^2$
  - $\widetilde{KB} =^\star \mathbb{E}^2$
- 双曲閉曲面、完備双曲曲面
  - $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times (0, \infty) \subset^\star \mathbb{E}^2$ (上半平面モデル)
  - $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2 = \mathring{D}^2 \subset^\star \mathbb{E}^2$ (Poincaré モデル)

- 球面的曲面 ($* \in S^2$: 南極)
  - $\widetilde{S}^2 = \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{S}^2 - * \to^* \mathbb{E}^2$ (南極からの立体射影)
  - $\widetilde{P}^2 = \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{S}^2 - * \to^* \mathbb{E}^2$ (南極からの立体射影)

次のような結果を得たい:

希望的目標 1.1. 次は同値:
(1) γ_1 と γ_2 は正則ホモトピック.
(2) γ_1 と γ_2 はホモトピック、かつ $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$.

M が向き付け可能な場合などでは望む結果が得られた．しかし, M が向き付け不可能で, γ が向きを保ち, かつ "non-reversible" の場合には, $W(\gamma)$ を定義するために, γ と自由にホモトピックな正則曲線の中からひとつ γ_0 を選ぶ必要がある．異なるものを選んだ場合, 回転数の符号が逆になる可能性がある（絶対値は不変）．詳しくは 3A を見てほしい.

曲面上の正則閉曲線の回転数の定義に関しては B. L. Reinhart [3] や D. R. J. Chillingworth [1] によるものがあるが, 一般には上のような定理を得ることはできない.

なお, 平成 27 年度のゼミ生が卒業論文でアニュラス, メビウスの帯, トーラス, クラインの壺, 球面, 射影平面上の正則閉曲線の回転数について詳しく調べてくれている ([5]). そちらも見て頂ければ幸いである.

2. ユークリッド平面上の正則曲線の回転数

ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ 上の必ずしも閉ではない正則曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{E}^2$ の 2 種類の回転数 (i **指数**, j **指数**) を定義する．各点における γ の**向き** $e_\gamma(u) = \frac{d\gamma}{du} \Big/ \left|\frac{d\gamma}{du}\right|$ は**角度関数** $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ を用いて $e_\gamma(u) = (\cos\theta(u), \sin\theta(u))$ と表すことができる．角度関数は 2π の整数倍だけの自由度を持つ.

定義 2.1. (回転数 - i **指数**, j **指数**) $i_\gamma = \dfrac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{R}, \quad j_\gamma = \dfrac{\theta(b) + \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{R}$

注意. (1) i 指数は角度関数の取り方によらない.
(2) i 指数は, $e_\gamma(a)$ と $e_\gamma(b)$ が同じ向きなら (特に正則閉曲線なら), 整数値をとる.
(3) j 指数は角度関数を取り替えても mod 2 で値が不変である.
(4) $\theta(a) = 0$ ならば $i_\gamma = j_\gamma$ が成り立つ.

次の定理は Whitney-Graustein の定理の自然な拡張であり, Smale-Hirsch の immersion theory [2] [4] から直ちに導かれる．また, elementary な証明を与えることもできる [7].

定理 2.2. 端点および端点における向きが一致する正則平面曲線 γ_1, γ_2 に対して次は同値：

- γ_1 と γ_2 は端点と端点における向きをとめて正則ホモトピック
- $i_{\gamma_1} = i_{\gamma_2} \in \mathbb{R}$

3. 曲面上の正則閉曲線の回転数

この節では, 序で述べたような幾何をもつ曲面 M を考え, M 上の正則閉曲線 $\gamma : [a,b] \to M$ の回転数を導入する. $p_M : \widetilde{M} \to M$ を M の普遍被覆とし, $\widetilde{M}$ には M の計量の誘導する計量を与えておく. その一方で conformally eudlidean structure により $\widetilde{M}$ (もしくは $S^2 - *$) を $\mathbb{E}^2$ の部分集合とも考えることができる.

さて, 正則ホモトピーを以下の 3 つのレベルで考える.
(0) 基点と基点における向きを止めた正則ホモトピー
(1) 基点を止めた正則ホモトピー
(2) フリーな正則ホモトピー

(0) のレベルの正則ホモトピーによる分類は, 上の 2.2 により与えられる. M の基点を p とし, p の $\widetilde{M}$ への持ち上げ $\widetilde{p}$ を固定しておく. γ は p を始点とするものとし, $\widetilde{p}$ を始点とする $\widetilde{M}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ を conformally euclidean structure により $\mathbb{E}^2$ 上の正則曲線と見なして, その i 指数 $i_{\widetilde{\gamma}}$ を考えれば, これが (0) のレベルでの分類を与える. ただし, 球面幾何をもつ場合は除外点である南極を通過する正則ホモトピーにより i 指数が 2 だけ変わってしまうので値を mod 2 で考える必要がある. 以下, 非球面的な曲面の場合と球面的な曲面の場合に分けて議論する.

A. 非球面的な曲面の場合

まず, (1) のタイプの分類を与える回転数に関して議論する. $\gamma : [a,b] \to M$ を p を始点とする正則閉曲線, $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to \widetilde{M}$ を $\widetilde{p}$ を始点とする持ち上げとする. $\widetilde{\gamma}(a)$ と $\widetilde{\gamma}(a)$ を $\widetilde{M}$ の最短測地線 $\widetilde{\gamma}$ で結ぶことができる (考えている例ではいつも可能). ここでは $\mathbb{E}^2$ の計量で考えているのではないことに注意する. M の正則曲線 $\delta = p_M \circ \widetilde{\delta}$ は p を基点とし, 基点をとめて γ とホモトピックな測地線である. 閉曲線ではあるが, 基点 p が「角」になっている可能性がある. しかし, p における「内角」は 0 ではないし,「外角」は $\pm\pi$ ではない. ここで,「外角」の意味をはっきりさせておく. $\widetilde{\gamma}(b)$ を始点とする δ の持ち上げを $\widehat{\delta}$ とする.

定義 3.1. δ の p における外角 $\chi_{\delta,\widetilde{p}}$ $(-\pi < \chi_{\delta,\widetilde{p}} < \pi)$ を, ベクトル $e_{\widetilde{\delta}}(b)$ を $\chi_{\delta,\widetilde{p}}$ だけ回転するとベクトル $e_{\widehat{\delta}}(b)$ が得られる角度として定義する.

注意. $\widetilde{M}$ の計量と $\mathbb{E}^2$ の計量とどちらで角度を計算しても同じである.

定義 3.2. γ が**向きを保つ**/**向きを逆にする**とは $\widetilde{\gamma}$ に対応する p_M の被覆変換が向きを保つ/向きを逆にすることをいう. また, M の点 p の $\widetilde{M}$ へのふたつの持ち上げ $\widetilde{p}$ と $\widehat{p}$ が**同じ向き**/**逆の向き**であるとは, $\widetilde{p}$ を $\widehat{p}$ に移す被覆変換が向きを保つ/逆にすることをいう.

定義 3.3. γ の**回転数** $w_{\widetilde{p}}(\gamma)$ を次のように定義する:

- $[\gamma] = 1 \in \pi_1(M,p)$ のときは, $w_{\widetilde{p}}(\gamma) = i_{\widetilde{\gamma}} \in \mathbb{Z}$.
- $[\gamma] \neq 1 \in \pi_1(M,p)$ のとき

$$w_{\widetilde{p}}(\gamma) = \begin{cases} i_{\widetilde{\gamma}} - \left(i_{\widetilde{\delta}} + \dfrac{\chi_{\delta,\widetilde{p}}}{2\pi} \right) \in \mathbb{Z} & \gamma \text{ が向きを保つとき}, \\ \\ j_{\widetilde{\gamma}} - \left(j_{\widetilde{\delta}} + \dfrac{\chi_{\delta,\widetilde{p}}}{2\pi} \right) \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \gamma \text{ が向きを逆にするとき}. \end{cases}$$

この回転数がきちんと $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に定義されることさえ証明できれば, 次の定理はほとんど自明である.

定理 3.4. ([7]) M は非球面的でよい幾何構造をもつ曲面であり, γ_1, γ_2 はともに基点を p とする M の正則閉曲線で, $\widetilde{p}$ は p の $\widetilde{M}$ への持ち上げとする. このとき, 次は同値：

- γ_1 と γ_2 は基点を止めて正則ホモトピック
- $[\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(M,p)$ かつ $w_{\widetilde{p}}(\gamma_1) = w_{\widetilde{p}}(\gamma_2)$

$w_{\widetilde{p}}(\gamma)$ が $\widetilde{p}$ の取り方による可能性があるのは, 値が整数の場合, つまり M が向き付け不可能で γ が向きを保つときだけであることが次の定理よりわかる:

定理 3.5. ([7]) γ は p を基点とする M の正則閉曲線とし, $\widetilde{p}, \widehat{p}$ は $p \in M$ の $\widetilde{M}$ への持ち上げとする. このとき, 次が成り立つ:

$$w_{\widetilde{p}}(\gamma) = \begin{cases} w_{\widehat{p}}(\gamma) & \widetilde{p} \text{ と } \widehat{p} \text{ は同じ向き} \\ -w_{\widehat{p}}(\gamma) & \widetilde{p} \text{ と } \widehat{p} \text{ は逆の向き} \end{cases}$$

次に (2) のレベル, すなわちフリーな正則ホモトピーによる分類のための回転数を定義する.

p_1 を基点とする γ_1 を (free な) 正則ホモトピーで p_2 を基点とする γ_2 に変形したとする. そのホモトピーは持ち上げ $\widetilde{\gamma}_1$ の正則ホモトピーに持ち上がる. その他端を $\widetilde{\gamma}_2$ とすると次を得る：

$$w_{\widetilde{p}_1}(\gamma_1) = w_{\widetilde{p}_2}(\gamma_2) .$$

ただし, $\widetilde{p}_j$ は $\widetilde{\gamma}_j$ の始点 $(j = 1, 2)$ である.

したがって、M が向き付け可能な場合、および M が向き付け不可能で γ が向きを逆にする場合、$W(\gamma)$ を $w_{\widetilde{p}}(\gamma)$ で定めれば, これは正則ホモトピーについての不変量となる.

そこで, M が向き付け不可能で γ が向きを保つ場合が問題となる. このとき, γ の持ち上げは 2 種類に分かれ, $w_{\widetilde{p}}(\gamma)(\in \mathbb{Z})$ の符号が逆になっている. そこで次のような概念を導入する:

定義 3.6. γ が **reversible** とは, 向きを逆にするようなある元 $[\xi] \in \pi_1(M,p)$ で, $[\xi\gamma\bar{\xi}] = [\gamma] \in \pi_1(M,p)$ をみたすものが存在することをいう.

注意. (1) reversibility は (正則) ホモトピーで不変である.
(2) reversible な γ を上のような ξ に沿って finger move を行ったものを γ' とすると、$w_{\widetilde{p}}(\gamma') = -w_{\widetilde{p}}(\gamma)$ が成り立つ.

例. メビウスの帯を本質的に偶数周するような正則閉曲線は reversible である. 実際, 帯の中心に沿って 1 周させると戻ってきたとき「上下」が逆転してしまい, 見かけの回転数の符号が逆になる.

定義 3.7. (フリーな回転数 $W(\gamma)$ の定義) あらかじめ M 上の基準となる正則閉曲線 γ_0 およびその $\widetilde{M}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma}_0$ を固定しておく. γ を γ_0 とホモトピックな正則閉曲線とし, p をその始点とする.
(1) M が向き付け可能な場合は, γ_0, $\widetilde{\gamma}_0$ とは無関係に $W_{\widetilde{\gamma}_0}(\gamma) = w_{\widetilde{p}}(\gamma) \in \mathbb{Z}$ と定める. ただし, $\widetilde{p}$ は p の $\widetilde{M}$ への任意の持ち上げとする.
(2) M が向き付け不可能で, γ が向きを逆にする場合は, γ_0, $\widetilde{\gamma}_0$ とは無関係に $W_{\widetilde{\gamma}_0}(\gamma) = w_{\widetilde{p}}(\gamma) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と定める. ただし, $\widetilde{p}$ は p の $\widetilde{M}$ への任意の持ち上げとする.
(3) M が向き付け不可能で γ が向きを保ち reversible な場合は, γ_0, $\widetilde{\gamma}_0$ とは無関係に $W_{\widetilde{\gamma}_0}(\gamma) = |w_{\widetilde{p}}(\gamma)| \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ として定める. ただし, $\widetilde{p}$ は p の $\widetilde{M}$ への任意の持ち上げとする.
(4) M が向き付け不可能で γ が向きを保ち non-reversible な場合は, $W_{\widetilde{\gamma}_0}(\gamma) = w_{\widetilde{p}}(\gamma) \in \mathbb{Z}$ と定める. ただし, $\widetilde{p}$ は, γ_0 と γ の間のホモトピーの持ち上げが $\widetilde{\gamma}_0$ と $\widetilde{\gamma}$ の間のホモトピーを与えるような γ の持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ の始点とする.

注意. (1), (2), (3) の場合の回転数は γ_0 に無関係に定まるので $W(\gamma)$ と書いてもよい.

定理 3.8. ([7]) M が非球面的でよい幾何構造を持つ曲面であり, γ_0 は M 上の任意の正則閉曲線, γ_1, γ_2 が γ_0 とホモトピックな M 上の正則閉曲線とする. このとき次は同値である:

(1) γ_1 と γ_2 は正則ホモトピック.

(2) $W_{\gamma_0}(\gamma_1) = W_{\gamma_0}(\gamma_2)$

B. 球面的な曲面の場合

$M = S^2, P^2$ の場合を考える．この場合, 普遍被覆 $\widetilde{M}$ は球面 S^2 である．M 上の正則閉曲線 γ を考え, その $\widetilde{M}$ への持ち上げを $\widetilde{\gamma}$ とする．$\widetilde{\gamma}$ が S^2 の南極 $(*)$ を通る場合は正則ホモトピーで変形し, $*$ を通過しないようにできる．すると, 立体射影 $S^2 - * \to \mathbb{E}^2$ を用いて $\widetilde{\gamma}$ を $\mathbb{E}^2$ の曲線と考えることができる．

定義 3.9. γ が null-homotopic な場合は回転数を以下のように定義する:

$$w(\gamma) = W(\gamma) = i_{\widetilde{\gamma}} \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

mod 2 の値をとっているのは正則ホモトピーが*を通過する際に $i_{\widetilde{\gamma}}$ の値が ± 2 だけ変化するためである．

残るのは $M = P^2$ で γ が null-homotopic でない場合である．このとき, $\widetilde{\gamma}$ は S^2 上の対蹠点を結ぶ曲線となる．その端点を結ぶ測地線 $\widetilde{\xi}$ を $\widetilde{\gamma}$ と端点での向きが一致するように選ぶ．

定義 3.10. $M = P^2$ で γ が null-homotopic でない場合は回転数を以下のように定義する:

$$w(\gamma) = W(\gamma) = i_{\widetilde{\gamma}} - i_{\widetilde{\xi}} \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

定理 3.11. $M = S^2, P^2$ とする．M 上の正則閉曲線 γ_1, γ_2 が共通の基点 p をもつとする．次は同値.

(1) γ_1, γ_2 は基点を固定して正則ホモトピック.

(2) $[\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(M, p)$ かつ $w(\gamma_1) = w(\gamma_2)$.

定理 3.12. $M = S^2, P^2$ とする．M 上の正則閉曲線 γ_1, γ_2 について, 次は同値.

(1) γ_1, γ_2 は正則ホモトピック.

(2) γ_1, γ_2 はホモトピックかつ $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$.

4. 最終コメント

A. 自由正則ホモトピー類の代表元

与えられた γ_0 と自由にホモトピックである正則閉曲線 γ の回転数 $W(\gamma)$ が $n \in \mathbb{Z}$ (もしくは $\overline{n} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $n = 0, 1$) であるとする。

(1) γ_0 がホモトピー的に自明な場合

(a) $n=0$ の場合

γ は小さな 8 の字曲線に正則ホモトピックである。

(b) $n\neq 0$ の場合

γ は小さな円周を n 周する正則曲線に正則ホモトピックである。

(2) γ_0 がホモトピー的に非自明な場合

(a) $n=0$ の場合

γ は γ_0 と自由にホモトピックで最短な閉測地線と正則ホモトピックである。

(b) $n\neq 0$ の場合

γ は γ_0 と自由にホモトピックで最短な閉測地線に n 個の kink を (適切に) つけたものと正則ホモトピックである。

B. 自己交叉と正則ホモトピー

Whitney は平面上の generic な正則閉曲線の回転数を自己交叉の符号付和と関係づける公式を見いだした [6]. 平面以外の曲面の場合でも $W(\gamma)$ が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元として定義できる場合 (つまり, M が向き付け不可能で γ も向きを逆にする場合や $M=S^2, P^2$ の場合) には, 単純に自己交叉の個数を mod 2 で考えた値と $W(\gamma)$ は一致することが確かめられる. それ以外の場合にも Whitney の公式を拡張できると嬉しい.

参考文献

1. D. R. J. Chillingworth, Winding numbers on surfaces, I., *Math. Ann.* **196** (1972) 218–249.
2. M. W. Hirsch, Immersions of manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959) 242–276.
3. B. L. Reinhart, The winding numbers on two manifolds, *Annales de l'institut Fourier* **10** (1960) 271–283.
4. S. Smale, Regular curves on riemannian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958) 492–512.
5. 上原翔太, 坂口翔悟, 寺岡拓馬, 花岡知歩, 八塚正義, 横田大河, 津路圭太, 球面的およびユークリッド的曲面における閉曲線の回転数 (Rotation numbers of closed curves on spherical and euclidean surfaces), 岡山理科大学理学部基礎理学科平成 *27* 年度卒業論文 (2016), available at `http://surgery.matrix.jp/math/ridai/2015b.pdf`.
6. H. Whitney, On regular closed curves in the plane, *Compositio Math.* **4** (1937) 276–284.
7. M. Yamasaki, *Winding numbers of regular closed curves on aspherical surfaces*, arXiv:1602.02464 [math.GT]