

有限単純グラフに伴うトーリック Fano 多様体

大阪市立大学大学院理学研究科 須山 雄介*

Yusuke Suyama

Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka City University

有限単純グラフ G から非特異で射影的なトーリック多様体 $X(G)$ が定まる。本稿では、 $X(G)$ が (弱) Fano となるようなグラフ G を決定する。また、ルート系 Φ からトーリック多様体 $X(\Phi)$ が定まるが、これが (弱) Fano となるための必要十分条件についても述べる。

1 有限単純グラフに伴うトーリック多様体

有限単純グラフ G からトーリック多様体 $X(G)$ を構成する方法を解説する。 G から graph associahedron とよばれる多面体を構成し、その normal fan として扇を得る方法もあるが、ここでは G から直接扇を構成する。

G の頂点集合、辺集合をそれぞれ $V(G), E(G)$ で表す。 $I \subset V(G)$ に対し、 $G|_I$ で誘導部分グラフを表す。 $B(G) = \{I \subset V(G) \mid G|_I \text{ は連結で, } I \neq \emptyset\}$ を G の **graphical building set** とよぶ。

まず、 G が連結である場合を考える。次の条件を満たす $N \subset B(G)$ を **nested set** とよぶ。

1. $I, J \in N$ ならば、 $I \subset J, J \subset I, I \cap J = \emptyset$ のいずれかが成り立つ。
2. $I, J \in N, I \cap J = \emptyset$ ならば、 $I \cup J \notin B(G)$ が成り立つ。
3. $V(G) \in N$ である。

注意 1.1. 上の定義は、一般の building set に対する nested set の定義とは異なるが、連結な有限単純グラフの graphical building set の場合は同値である。

$B(G)$ の nested sets 全体 $\mathcal{N}(B(G))$ を **nested complex** とよぶ。

$V(G) = \{1, \dots, n+1\}$ とする。 e_1, \dots, e_n を \mathbb{R}^n の標準基底とし、 $e_{n+1} = -e_1 - \dots - e_n$ とおく。 $I \subset V(G)$ に対し $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ とおき、 $N \in \mathcal{N}(B(G))$ に対し $\mathbb{R}_{\geq 0}N = \sum_{I \in N} \mathbb{R}_{\geq 0}e_I$

*本研究は科研費 (課題番号:15J01000) の助成を受けたものである。

とおく. $V(G) \in N$ かつ $e_{V(G)} = 0$ より, $\mathbb{R}_{\geq 0}N$ は $|N| - 1$ 次元の有理強凸多面錐となる. $\Delta(G) = \{\mathbb{R}_{\geq 0}N \mid N \in \mathcal{N}(B(G))\}$ は \mathbb{R}^n の扇であり, 包含関係に関する順序集合として $\mathcal{N}(B(G))$ と同型である. 伴う複素 n 次元のトーリック多様体 $X(\Delta(G))$ は非特異で射影的となり, これを $X(G)$ とおく.

G が連結でない場合, G_1, \dots, G_m を G の連結成分全体として, $X(G) = X(\Delta(G_1)) \times \dots \times X(\Delta(G_m))$ と定義する.

2 トーリック (弱) Fano 多様体

非特異射影代数多様体 X が **Fano** であるとは, 反標準因子 $-K_X$ が豊富であることをいい, **弱 Fano** であるとは, $-K_X$ がネフかつ巨大であることをいう.

トーリック多様体の反標準因子とトーラス不変曲線の交点数について復習する. 詳しくは, たとえば [3] を参照されたい. 階数 n の格子 N における非特異で完備な扇 Δ と $0 \leq r \leq n$ に対し, Δ の r 次元多面錐全体を $\Delta(r)$ で表す. $\tau \in \Delta(n-1)$ に対し, 反標準因子 $-K_{X(\Delta)}$ と, τ に対応するトーラス不変曲線 $V(\tau)$ の交点数は次のように計算できる.

命題 2.1. $X(\Delta)$ を複素 n 次元の非特異完備トーリック多様体とする. $v_1, \dots, v_{n-1} \in N$ を primitive なベクトルで $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_{n-1} \in \Delta(n-1)$ となるものとし, $v, v' \in N$ を相異なる primitive なベクトルで $\tau + \mathbb{R}_{\geq 0}v, \tau + \mathbb{R}_{\geq 0}v' \in \Delta(n)$ となるものとする.

1. 整数 a_1, \dots, a_{n-1} で, $v + v' + a_1v_1 + \dots + a_{n-1}v_{n-1} = 0$ を満たすものが一意的に存在する.
2. 交点数 $(-K_{X(\Delta)} \cdot V(\tau))$ は $a_1 + \dots + a_{n-1} + 2$ に一致する.

トーリック多様体に対しては, (弱) Fano であるかどうかはトーラス不変曲線との交点数のみチェックすれば十分である.

命題 2.2. $X(\Delta)$ を複素 n 次元の非特異で射影的なトーリック多様体とする.

1. $X(\Delta)$ が Fano であるための必要十分条件は, すべての $\tau \in \Delta(n-1)$ に対し $(-K_{X(\Delta)} \cdot V(\tau)) > 0$ となることである.
2. $X(\Delta)$ が弱 Fano であるための必要十分条件は, すべての $\tau \in \Delta(n-1)$ に対し $(-K_{X(\Delta)} \cdot V(\tau)) \geq 0$ となることである [4, Proposition 6.17].

命題 2.3. $X(\Delta), X(\Delta')$ を非特異で射影的なトーリック多様体とする. このとき, $X(\Delta) \times X(\Delta')$ が Fano (resp. 弱 Fano) であるための必要十分条件は, $X(\Delta), X(\Delta')$ がともに Fano (resp. 弱 Fano) であることである.

3 主結果

証明の鍵となるのは次の命題である.

命題 3.1. G を頂点集合が $V(G) = \{1, \dots, n+1\}$ である連結な有限単純グラフとし, $N \in \mathcal{N}(B(G)), |N| = n$ とする. このとき, 次が成り立つ.

1. 相異なる $J, J' \in B(G) \setminus N$ で, $N \cup \{J\}, N \cup \{J'\} \in \mathcal{N}(B(G))$ かつ $J \cup J' \in N$ となるものが存在する [6, Corollary 7.5].
2. $G|_{I_1}, \dots, G|_{I_m}$ を $G|_{J \cap J'}$ の連結成分全体とすると, $I_1, \dots, I_m \in N$ かつ $e_J + e_{J'} - e_{I_1} - \dots - e_{I_m} - e_{J \cup J'} = 0$ となる [6, Proposition 4.5 and Corollary 7.6].

命題 3.1 より次の補題が従う. これにより交点数をグラフの言葉で記述でき, 主結果の証明をグラフ理論の議論に持ち込むことができる.

補題 3.2. G を連結な有限単純グラフとし, $N \in \mathcal{N}(B(G)), |N| = |V(G)| - 1$ とする. このとき,

$$(-K_{X(G)} \cdot V(\mathbb{R}_{\geq 0}N)) = \begin{cases} 2 - m & (J \cup J' = V(G)), \\ 1 - m & (J \cup J' \subsetneq V(G)) \end{cases}$$

が成り立つ. ここで $J, J' \in B(G) \setminus N$ は命題 3.1.1 のもので, m は $G|_{J \cap J'}$ の連結成分の個数である.

$X(G)$ が Fano になるための必要十分条件は次の通りである.

定理 3.3 ([5]). G を有限単純グラフとする. このとき, 伴うトーリック多様体 $X(G)$ が Fano であるための必要十分条件は, G の各連結成分がたかだか 3 頂点からなることである.

証明のスケッチ. 命題 2.3 より, G が連結な場合に, $X(G)$ が Fano であるための必要十分条件が $|V(G)| \leq 3$ であることを示せばよい. 必要性は, $|V(G)| \geq 4$ を仮定して, $(-K_{X(G)} \cdot V(\mathbb{R}_{\geq 0}N)) = 0$ となる $N \in \mathcal{N}(B(G))$ を具体的に構成することで示せるが, トーリック Fano 多様体の Picard 数の上限を考えることでも示せる. 十分性は, 3 頂点以下の連結グラフが 4 種類しかなく, それらに伴うトーリック多様体がすべて Fano であることから従う. \square

$X(G)$ が弱 Fano になるための必要十分条件はもう少し複雑である. 図 1 のようなグラフをダイヤモンドグラフとよぶ.

定理 3.4 ([5]). G を有限単純グラフとする. このとき, 伴うトーリック多様体 $X(G)$ が弱 Fano であるための必要十分条件は, G の任意の連結成分 G' と, 任意の $I \subsetneq V(G')$ に対し, $G'|_I$ が長さ 4 以上の閉路グラフにもダイヤモンドグラフにもならないことである.

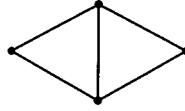


図 1: ダイヤモンドグラフ.

- 例 3.5. 1. G 本体が閉路グラフまたはダイヤモンドグラフならば, $X(G)$ は弱 Fano である.
2. 木または完全グラフに伴うトーリック多様体は弱 Fano である.
3. 図 2 の左のグラフに伴うトーリック多様体は弱 Fano である. 一方, 右のグラフは長さ 4 の閉路グラフを真の誘導部分グラフとしてもつので, 伴うトーリック多様体は弱 Fano ではない.



図 2: 伴うトーリック多様体が弱 Fano になる例と, そうでない例.

証明のスケッチ. やはり命題 2.3 より, G が連結な場合に, $X(G)$ が弱 Fano であるための必要十分条件が, 任意の $I \subsetneq V(G)$ に対し, $G|_I$ が長さ 4 以上の閉路グラフにもダイヤモンドグラフにもならないことであることを示せばよい. 必要性は, $I \subsetneq V(G)$ で $G|_I$ が長さ 4 以上の閉路グラフまたはダイヤモンドグラフになるものが存在したと仮定して, $(-K_{X(G)}.V(\mathbb{R}_{\geq 0}N)) = -1$ となる $N \in \mathcal{N}(B(G))$ を構成することで示される. 十分性の証明は少し長くなるが, $X(G)$ が弱 Fano でない, すなわち $(-K_{X(G)}.V(\mathbb{R}_{\geq 0}N)) \leq -1$ となる $N \in \mathcal{N}(B(G))$ が存在したとすると, そこから $I \subsetneq V(G)$ で $G|_I$ が長さ 4 以上の閉路グラフまたはダイヤモンドグラフになるものが得られる. \square

4 ルート系に伴うトーリック (弱) Fano 多様体

$n+1$ 頂点完全グラフ K_{n+1} に伴うトーリック多様体 $X(K_{n+1})$ は, A_n 型のルート系に伴うトーリック多様体 $X(A_n)$ と同型である. $X(A_n)$ は弱 Fano であることが知られており ([1], [2]), 例 3.5.2 はこの結果に一致する. ルート系に伴うトーリック多様体で, グラフにも伴うものは $X(A_n)$ の直積のみである. そこで, ルート系に伴うトーリック多様体が (弱) Fano になるための必要十分条件も求めた.

Φ をユークリッド空間 V におけるルート系とする. $M(\Phi)$ をルート格子 $\sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z}\alpha$, $N(\Phi)$ をその双対格子 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(\Phi), \mathbb{Z})$ とし, $N(\Phi)_{\mathbb{R}} = N(\Phi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおく. 単純ルートの集合 $S \subset \Phi$ に対し, 有理強凸多面錐 $\sigma_S = \{v \in N(\Phi)_{\mathbb{R}} \mid \langle v, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in S\}$ を定めると, すべての σ_S およびその面からなる集合 $\Delta(\Phi)$ は $N(\Phi)$ の扇を定め, 伴うトーリック多様体 $X(\Phi) = X(\Delta(\Phi))$ は非特異で射影的となる.

次の命題より, $X(\Phi)$ の反標準因子とトーラス不変曲線の交点数は, Cartan 行列のある列の成分の和に一致する.

命題 4.1. $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$ を単純ルートの集合, $\omega_1, \dots, \omega_n$ を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の双対基底とし, $a_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)$ とおく. このとき, 任意の $j = 1, \dots, n$ に対し

$$(-K_{X(\Phi)} \cdot V(\sum_{i \neq j} \mathbb{R}_{\geq 0} \omega_i)) = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

が成り立つ.

証明のスケッチ. $\alpha \in \Phi$ に直交する超平面に関する鏡映を $s_{\alpha} : V \rightarrow V$ で表す. 各 $j = 1, \dots, n$ に対し, 単純ルートの集合 $s_{\alpha_j} S = \{s_{\alpha_j}(\alpha_1), \dots, s_{\alpha_j}(\alpha_n)\}$ を考えると,

$$\sigma_{s_{\alpha_j} S} = \sum_{k=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0} \omega_k s_{\alpha_j} = \sum_{i \neq j} \mathbb{R}_{\geq 0} \omega_i + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\omega_j - \sum_{i \neq j} a_{ij} \omega_i)$$

であることがわかり,

$$\sigma_S \cap \sigma_{s_{\alpha_j} S} = \sum_{i \neq j} \mathbb{R}_{\geq 0} \omega_i$$

となる.

$$\omega_j + (-\omega_j - \sum_{i \neq j} a_{ij} \omega_i) + \sum_{i \neq j} a_{ij} \omega_i = 0$$

だから, 命題 2.1.2 より

$$(-K_{X(\Phi)} \cdot V(\sum_{i \neq j} \mathbb{R}_{\geq 0} \omega_i)) = \sum_{i \neq j} a_{ij} + 2 = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

を得る. □

よって, 命題 2.2 より次の定理が従う.

定理 4.2. Φ をルート系とし, $X(\Phi)$ をそれに伴うトーリック多様体とする.

1. $X(\Phi)$ が Fano であるための必要十分条件は, Φ の各既約成分が A_1 型か A_2 型であることである.
2. $X(\Phi)$ が弱 Fano であるための必要十分条件は, Φ の各既約成分が A 型か B 型であることである.

参考文献

- [1] V. Batyrev and M. Blume, *The functor for toric varieties associated with Weyl chambers and Losev-Manin moduli spaces*, *Tohoku Math. J.* 63 (2011), no. 4, 581–604.
- [2] J. Huh, *Rota's conjecture and positivity of algebraic cycles in permutohedral varieties*, University of Michigan, Thesis, 2014, available at <http://www-personal.umich.edu/~junehuh/thesis.pdf>.
- [3] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3) 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [4] H. Sato, *Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties*, *Tohoku Math. J.* 52 (2000), no. 3, 383–413.
- [5] Y. Suyama, *Toric Fano varieties associated to finite simple graphs*, arXiv:1604.08440.
- [6] A. Zelevinsky, *Nested complexes and their polyhedral realizations*, *Pure Appl. Math. Q.* 2 (2006), no. 3, 655–671.