数理解析研究所講究録
第2016巻 2017年 217-225

ポリアの定理について

福井大学医学部　藤田亮介 (Ryousuke Fujita)
Faculty of Medical Sciences, University of Fukui

1　はじめに

離散構造を探求する上で“ポリアの定理”は有用である．有限群が有限集合に作用する状況を考えたとき，「Burnside の定理」はその根幹をなすものであり，ここから様々な応用へとつながっていく．例えば，次のような場合の数を求める問題

「白玉 1 個，赤玉 2 個，青玉 3 個があるとき，これらを円形に並べる方法は何通りあるか?」

を考えると，答えは 10 通りである．この問題を白玉 2 個，赤玉 2 個，青玉 2 個にした場合はどうなるのであろうか? いわゆる“重複円順列”に対するアルゴリズムは存在するのだろうか? これらに答えるのが「ポリアの定理」である．本稿ではポリアの定理を変換群論の立場から詳細に解説したい．

2　ポリアの定理 1

記号　以下，有限集合 X に対して，$|X|$ でその元の個数を表し，$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とする．また $[n]$ を n 以下の自然数の集合とする．すなわち，$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ である．

Burnside の定理　有限群 G と有限 G 集合 X が与えられたとき，次が成り立つ:

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

ここで，$X/G=\{G(x)\,|\,x\in X\}$(=G 軌道の集合) を表し，$X^g=\{x\in X\,|\,gx=x\}$ である．

Proof. $|X/G|=r$ とする．$G\times X\supset A=\{(g,x)\,|\,gx=x\}$ をとる．集合 A の元の個数を観察すると

$$\sum_{g\in G}\left(\sum_{x\in X}|A|\right)=\sum_{x\in X}\left(\sum_{g\in G}|A|\right)$$

が成り立つ．両辺の括弧の中はそれぞれ $|X^g|$, $|G_x|$ に一致するから

$$\sum_{g\in G}|X^g|=\sum_{x\in X}|G_x|$$

ここで，X の軌道分解を $X=\coprod_{i=1}^{r}G(x_i)$ とする．各 $|G(x_i)|=k_i$ $(i=1,\cdots,r)$ とおくと，

$$\sum_{x\in X}|G_x|=\sum_{x\in\coprod_{i=1}^{r}G(x_i)}|G_x|=\sum_{i=1}^{r}k_i|G_{x_i}|=\sum_{i=1}^{r}k_i\frac{|G|}{|G(x_i)|}=r|G|$$

したがって,

$$\sum_{g\in G}|X^g| = r|G|$$

両辺を $|G|$ で割ることにより, 所望の結果を得る. $\square$

一般に, 置換群 $\Gamma \subset \mathfrak{S}_n$ は $[n]$ へ "自然に" 作用する. さらに $\mathcal{R}$ を任意の有限集合とするとき, $[n]$ から $\mathcal{R}$ への写像の集合 $\mathcal{M} = \{f \mid f : [n] \to \mathcal{R}\}$ に対して, $(\gamma\cdot f)(x) := f(\gamma^{-1}x)$ $(x \in [n],\ \gamma \in \Gamma,\ f \in \mathcal{M})$ により Γ 作用を定義する.

記号 $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $\sigma_j(\gamma)$ を γ が含む長さ j の巡回置換の個数とする.

この記号の下で, 次の命題が成り立つ.

命題 2.1 $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ に対して,
(1) $\sigma_1(\gamma) + 2\sigma_2(\gamma) + \cdots + n\sigma_n(\gamma) = n$
(2) $\sigma_1(\gamma) + \sigma_2(\gamma) + \cdots + \sigma_n(\gamma)$ は, $\langle\gamma\rangle$ の $[n]$ への作用の軌道の個数に一致する.

Proof. (1) 「任意の置換は互いに素な巡回置換の積に順序を除き一意に分解される」より直ちに出る. ただし, 長さ 1 の巡回置換も考える. (2) $H = \langle\gamma\rangle$ とおくと, $i \in [n]$ での H 軌道 $H(i)$ は「i を含む, γ に含まれる巡回置換をなす元の集合」に一致する. したがって, $|[n]/H| = |\{H(i) \mid i \in [n]\}| = \sigma_1(\gamma) + \sigma_2(\gamma) + \cdots + \sigma_n(\gamma)$ である. $\square$

補題 2.2 $H = \langle\gamma\rangle$ とおく. $f \in \mathcal{M}^\gamma$ であるための必要十分条件は f が H 軌道上で定値となることである. ここで, H 軌道とは H の $[n]$ への作用による軌道のことである.

Proof. 任意の $x \in [n]$ に対して, 定義より「$f \in \mathcal{M}^\gamma \iff (\gamma\cdot f)(x) = f(x) \iff f(\gamma^{-1}(x)) = f(x)$」である. (必要性) $f(x) = f(\gamma^{-1}(\gamma(x))) = (\gamma\cdot f)(\gamma(x)) = f(\gamma(x))$ である. よって, $f(H(x)) =$ 一定である. (十分性) $(\gamma\cdot f)(x) = f(\gamma^{-1}(x)) = f(\gamma(\gamma^{-1}(x))) = f(x)$ だから $f \in \mathcal{M}^\gamma$ である. $\square$

定義 2.3 置換群 $\Gamma \subset \mathfrak{S}_n$ の巡回指数 (cycle index) とは, $\mathbb{Q}$ 上の n 変数多項式

$$P_\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} x_1^{\sigma_1(\gamma)} x_2^{\sigma_2(\gamma)} \cdots x_n^{\sigma_n(\gamma)} \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

のことをいう. つまり, 各元 $\gamma \in \Gamma$ に対し, 単項式 $x_1^{\sigma_1(\gamma)} x_2^{\sigma_2(\gamma)} \cdots x_n^{\sigma_n(\gamma)}$ を対応させて, Γ すべての元についての単項式の和を $|\Gamma|$ で割ったものである.

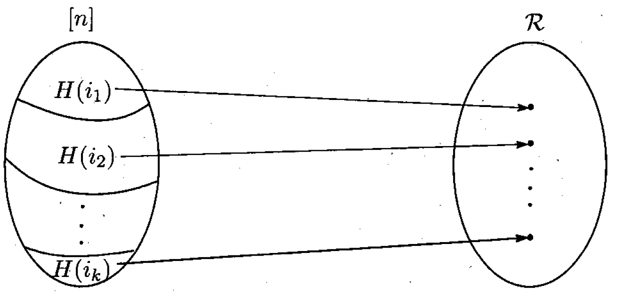
定理 2.4 (ポリアの定理 1) Γ の $\mathcal{M}$ への作用の軌道の個数は, $\Gamma \subset \mathfrak{S}_n$ の巡回指数のすべての変数に $|\mathcal{R}|$ を代入して得られる.

Proof. Burnside の定理より,

$$|\mathcal{M}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\mathcal{M}^\gamma|$$

さらに, 補題2.2より $|\mathcal{M}^\gamma| = |\mathcal{R}|^{\sigma_1(\gamma)+\sigma_2(\gamma)+\cdots+\sigma_n(\gamma)} = |\mathcal{R}|^{\sigma_1(\gamma)}|\mathcal{R}|^{\sigma_2(\gamma)}\cdots|\mathcal{R}|^{\sigma_n(\gamma)}$ であるから,

$$|\mathcal{M}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\mathcal{R}|^{\sigma_1(\gamma)}|\mathcal{R}|^{\sigma_2(\gamma)}\cdots|\mathcal{R}|^{\sigma_n(\gamma)} = P_\Gamma(|\mathcal{R}|,|\mathcal{R}|,\cdots,|\mathcal{R}|)$$



上図において, $H = \langle\gamma\rangle$ で, $H(i_j)$ は各軌道. 命題2.1(2) より, $k = \sigma_1(\gamma) + \sigma_2(\gamma) + \cdots + \sigma_n(\gamma)$ である. □

ポリアの定理1の応用
$[n]$ を図形の頂点 (あるいは面) の集合, $\mathcal{R}$ をいくつかの色の集合とすれば, $f \in \mathcal{M}$ は各頂点 (各面) に色を付けることを意味する. そのとき f を, **色の割り当て** (または**カラーリング**) という.

応用例 立方体の6面を2色で彩色するときの場合の数を考えよう. ただし, 空間の回転でうつりあう塗り方は同一視する. 立方体 $abcd - efgh$ の6つの面に対して, 面 $abcd$ を1, 面 $abef$ を2, 面 $bcfg$ を3, 面 $adeh$ を4, 面 $cdhg$ を5, 面 $efgh$ を6と番号付けする. このとき, 立方体には空間の回転が導く正6面体群 $\Gamma(\cong \mathfrak{S}_4)$ が作用しているが, これは " 自然に " $\mathfrak{S}_6$ の部分群である. 求める場合の数は, Γ のカラーリングの集合 $\mathcal{M}$ への作用による軌道の個数, すなわち $|\mathcal{M}/\Gamma|$ である. $|\Gamma| = |\mathfrak{S}_4| = 24$, また

$$P_{\mathfrak{S}_4}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$$

となるから $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 2$ を代入して, $P_{\mathfrak{S}_4}(2,2,2,2,2,2) = 10$ を得る. これが求める場合の数である.

3 ポリアの定理2

同値類 (= 軌道) の数を数えるだけではなく, 同値類の中の配置の性質を知りたい. そこで写像の " 重み " という概念を導入する.

定義3.1 $\Omega_x = \{1, x, x^2, \cdots, x^k, \cdots\}$ とおく. そのとき, 写像 $u : \mathcal{R} \to \Omega_x$ を $\mathcal{R}$ 上の**重み関数**という. $u(r) = x^k$ となるとき, x^k を r の**重み**, k を r の**重み指数**という. 重み指数 k をもつ $\mathcal{R}$ の元の個数を $\mathfrak{f}_k$ とかく. すなわち, $\mathfrak{f}_k = |u^{-1}(x^k)|$ である. 重み指数に従って, $\mathcal{R}$ の元を数え上げる級数

$$\mathfrak{f}(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{f}_k x^k$$

を図形数え上げ級数という．特に $\mathfrak{f}(1) = |\mathcal{R}|$ である．

<u>**命題 3.2**</u>　$\mathcal{R}$ 上の重み関数 $u : \mathcal{R} \to \Omega_x$ に対して，

$$w : \mathcal{M} \to \Omega_x\,;\ f \mapsto \prod_{y\in[n]} u(f(y))$$

と定義すれば，これは well-defined であり，軌道上では定値である．

Proof. 右辺は，次の図式

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "u\circ f"] & \\
\mathcal{R} \arrow[r, "u"'] & \Omega_x
\end{tikzcd}$$

より $u(f(y)) \in \Omega_x$ であり，また Ω_x が積に関して閉じているから，w は well-defined である．$\gamma \in \Gamma$ に対し，

$$w(\gamma\cdot f) = \prod_{y\in[n]} u((\gamma\cdot f)(y)) = \prod_{y\in[n]} u(f(\gamma^{-1}y)) = \prod_{y\in[n]} u(f(y))$$

最後の等号は，対応 $y \mapsto \gamma^{-1}y$ が全単射であることによる．よって，$w(\gamma\cdot f) = w(f)$ が成り立ち，軌道上では定値である．□

さらに，軌道集合 $\mathcal{M}/\Gamma$ 上でも“重み指数”や“重み”を定義しよう．

<u>**定義 3.3**</u>　命題3.2の写像 $w : \mathcal{M} \to \Omega_x$ を $\mathcal{M}$ 上の**重み関数**という．$w(f) = x^k$ となるとき，x^k を f の**重み**，k を f の**重み指数**という．重み関数 w は写像 $\tilde{w} : \mathcal{M}/\Gamma \to \Omega_x\,;\ \alpha \mapsto w(f)$ $(\alpha \in \mathcal{M}/\Gamma,\ f \in \alpha)$ を誘導する．このとき，次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[d] \arrow[dr, "w"] & \\
\mathcal{M}/\Gamma \arrow[r, "\tilde{w}"'] & \Omega_x
\end{tikzcd}$$

$\tilde{w}(\alpha)$ を軌道 α の**重み**という．α の重みが x^k のとき，つまり $\tilde{w}(\alpha) = w(f) = x^k$ のとき，k を α の**重み指数**という．すなわち，軌道の重み指数とはそれに属する代表元 f の重み指数のことである．

<u>**注意**</u>　“重み関数”，“重み”，“重み指数”の定義を見てわかるように，これらの値は写像 u 毎に変わる．したがって，正確にはこれらの用語の前に“u での”といった修飾語をつけるべきである．

<u>**定義 3.4**</u>　重み指数 k をもつ Γ 軌道の個数を $\mathfrak{F}_k$ とし，これを x^k の係数とする級数

$$\mathfrak{F}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{F}_k x^k$$

を $\mathcal{M}$ の Γ による**配置数え上げ級数**という．特に $\mathfrak{F}(1)$ は Γ 軌道の総数を意味する．

指定された重みをもつ軌道の個数を係数にする配置数え上げ級数の書き下しを，巡回指数により表現したものが「ポリアの定理 2」である．

重み関数 $u:\mathcal{R}\to\Omega_x$ が1つ与えられた下で,

<u>**定理 3.5**</u> **(ポリアの定理 2)** 配置数え上げ級数 $\mathfrak{F}(x)$ は

$$\mathfrak{F}(x)=P_\Gamma(\mathfrak{f}(x),\mathfrak{f}(x^2),\cdots,\mathfrak{f}(x^n))$$

で与えられる. ここで, $\mathfrak{f}(x)$ は図形数え上げ級数である.

Proof. 重み指数 k をもつ $f\in\mathcal{M}$ の集合を $\mathcal{M}_k$ とおく. すなわち,

$$\mathcal{M}_k=\{f\in\mathcal{M}\,|\,w:\mathcal{M}\to\Omega_x \text{ s.t. } w(f)=x^k\}$$

命題 3.2 より $\mathcal{M}_k$ は Γ 不変集合である. 定義より $\mathfrak{F}_k=|\mathcal{M}_k/\Gamma|$ である. Burnside の定理より,

$$\mathfrak{F}_k=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\mathcal{M}_k^\gamma|$$

ここで, $\mathcal{M}_k^\gamma=\{f\in\mathcal{M}_k\,|\,\gamma\cdot f=f\}(=\mathcal{M}_k$ の $\gamma\in\Gamma$ による不動点集合) である. したがって, 「配置数え上げ級数」は

$$\mathfrak{F}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\mathcal{M}_k^\gamma|x^k=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{k=0}^{\infty}|\mathcal{M}_k^\gamma|x^k$$

以下, $\sum_{k=0}^{\infty}|\mathcal{M}_k^\gamma|x^k$ を計算して, 最終的に「図形数え上げ級数」$\mathfrak{f}(x)$ で書き下す.

<u>**Claim**</u> $\gamma\in\Gamma$ の巡回置換分解を $\gamma=\sigma_1\cdots\sigma_\lambda$ とする (長さ1の巡回置換も含む). そのとき, 任意の $f\in\mathcal{M}_k^\gamma$ は各巡回置換 σ_i $(1\le i\le\lambda)$ 上で定値となる. 逆に $f\in\mathcal{M}_k$ が各 σ_i $(1\le i\le\lambda)$ 上で定値ならば, $f\in\mathcal{M}_k^\gamma$ である.

Proof. 補題 2.2 から導出されるが, 念のため証明しておく. σ_i が長さ r とすれば, 適当な $i_1\in[n]$ が存在して $\sigma_i=(i_1\ \gamma(i_1)\ \cdots\ \gamma^{r-1}(i_1))$ と書ける. $f(\gamma(i_1))=(\gamma\cdot f)(\gamma(i_1))=f(\gamma^{-1}(\gamma(i_1)))=f(i_1)$ である. さらに $f(\gamma^2(i_1))=(\gamma\cdot f)(\gamma^2(i_1))=f(\gamma^{-1}(\gamma^2(i_1)))=f(\gamma(i_1))$ である. この操作を続行することにより, 結局

$$f(\gamma^{r-1}(i_1))=\cdots=f(\gamma^2(i_1))=f(\gamma(i_1))=f(i_1)$$

となる. よって, f は各巡回置換 σ_i $(1\le i\le\lambda)$ 上で定値である. 逆に $f\in\mathcal{M}_k$ が各 σ_i $(1\le i\le\lambda)$ 上で定値であるとする. 任意の $x\in[n]$ に対して, x を含む巡回置換因子は唯一つ存在し, それを σ_j $(1\le\exists j\le\lambda)$ とする. $\sigma_j^{-1}(x)$ は σ_j をなす元の1つだから,

$$\gamma f(x)=f(\gamma^{-1}x)=f(\sigma_j^{-1}(x))=f(x)$$

したがって, $f\in\mathcal{M}_k^\gamma$ である. □

Claim より, $f\in\mathcal{M}_k^\gamma$ は $\gamma\in\Gamma$ の各巡回分解因子 σ_i 上で一定値 $f_i\in\mathcal{R}$ をとる. $|\sigma_i|$ を σ_i の長さとすると,

$$w(f)=\prod_{y\in[n]}u(f(y))=\prod_{j=1}^{\lambda}(u(f_j))^{|\sigma_j|}$$

$u(f_j) = x^{k_j}$ とおけば, $w(f) = x^k$ であるから

$$k = \sum_{i=1}^{\lambda} k_i|\sigma_i| \qquad \cdots\cdots \quad (*)$$

が成り立つ. $|\{f \in \mathcal{M}_k^\gamma \,|\, u(f_i) = x^{k_i},\ i = 1, 2, \cdots, \lambda\}|$ を考えよう. これを見易くするため, $p(\gamma; k_1, k_2, \cdots, k_\lambda)$ と書く. $u(f_i) = x^{k_i}$ を満たす $f \in \mathcal{M}_k^\gamma$ について, f_i は $\mathfrak{f}_{k_i} = |u^{-1}(x^{k_i})|$ 通りの値をもつから,

$$p(\gamma; k_1, k_2, \cdots, k_\lambda) = \mathfrak{f}_{k_1}\mathfrak{f}_{k_2}\cdots\mathfrak{f}_{k_\lambda}$$

と書ける. さらに

$$|\mathcal{M}_k^\gamma| = \sum_{(k_1, \cdots, k_\lambda)} p(\gamma; k_1, k_2, \cdots, k_\lambda)$$

と書ける. ここで, $\sum\limits_{(k_1, \cdots, k_\lambda)}$ は $(*)$ を満たす非負整数の組 $(k_1, \cdots, k_\lambda)$ についての和を表す. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\mathcal{M}_k^\gamma|x^k$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{M}_k^\gamma|x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(k_1, \cdots, k_\lambda)} p(\gamma; k_1, k_2, \cdots, k_\lambda)x^k \\
&= \sum_{k_1 \geq 0, \cdots, k_\lambda \geq 0} \mathfrak{f}_{k_1}x^{k_1|\sigma_1|}\mathfrak{f}_{k_2}x^{k_2|\sigma_2|}\cdots\mathfrak{f}_{k_\lambda}x^{k_\lambda|\sigma_\lambda|} \\
&= \prod_{i=1}^{\lambda}\left(\sum_{k_i=0}^{\infty} \mathfrak{f}_{k_i}x^{k_i|\sigma_i|}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{\lambda} \mathfrak{f}(x^{|\sigma_i|})
\end{aligned}$$

最後の式 $\prod\limits_{i=1}^{\lambda} \mathfrak{f}(x^{|\sigma_i|}) = \mathfrak{f}(x^{|\sigma_1|})\mathfrak{f}(x^{|\sigma_2|})\cdots\mathfrak{f}(x^{|\sigma_\lambda|})$ を, 記号 $\sigma_j(\gamma)$($= \gamma$ が含む長さ j の巡回置換の個数) を用いて記述すると, $\mathfrak{f}(x^1)^{\sigma_1(\gamma)}\mathfrak{f}(x^2)^{\sigma_2(\gamma)}\cdots\mathfrak{f}(x^n)^{\sigma_n(\gamma)}$ と書ける. すなわち,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{M}_k^\gamma|x^k = \prod_{r=1}^{n}(\mathfrak{f}(x^r))^{\sigma_r(\gamma)}$$

と書け, 結局

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma \in \Gamma}\prod_{r=1}^{n}(\mathfrak{f}(x^r))^{\sigma_r(\gamma)} = P_\Gamma(\mathfrak{f}(x), \mathfrak{f}(x^2), \cdots, \mathfrak{f}(x^n))$$

となることがわかる. □

<u>注意 1</u>　「ポリアの定理」といえば, 上の定理 2 を指すことが多い. 上の式で, $x = 1$ を代入すれば, $\mathfrak{f}(1) = |\mathcal{R}|$ より

$$\mathfrak{F}(1) = P_\Gamma(|\mathcal{R}|, |\mathcal{R}|, \cdots, |\mathcal{R}|)$$

これは「ポリアの定理 1」に他ならない.

<u>**注意 2**</u> 文献によっては,「配置数え上げ級数」を「同値類目録表」(英訳では“Pattern Inventory”) ともいう. 有限個に限定して数えているという気持ちからだと思われる.

<u>**ポリアの定理 2 の応用**</u>

応用例 1. グラフの同型類の個数

$V = [p]$, $B = \{\{i, j\} \mid i, j \in V,\ 1 \leq i \neq j \leq p\}$ を考える. 写像 $f : B \to \mathcal{R} = \{0, 1\}$ に対して, $E = \{\{i, j\} \in B \mid f(\{i, j\}) = 1\}$ とおく. このとき, (V, E) はグラフになる. 逆にグラフ (V, E) に対して, $|V| = p$ のとき, 各頂点を番号付けすることにより $V = [p]$ と見なすことができる.

$$f : B \to \mathcal{R} = \{0, 1\}\,;\ \{i, j\} \mapsto \begin{cases} 1 & (\{i, j\} \in E) \\ 0 & (\{i, j\} \notin E) \end{cases}$$

と定義すれば, この写像は well-defined である. 結局,

$$\text{グラフ } (V, E) \quad \overset{1\,対\,1}{\Longleftrightarrow} \quad \text{写像 } f$$

となる. 置換群 $\Gamma \subset \mathfrak{S}_p$ は $V = [p]$ への作用が B への作用を誘導する. 実際, その作用は

$$\Phi : \Gamma \times B \to B\ ;\ (\gamma, \{i, j\}) \mapsto \{\gamma(i), \gamma(j)\}$$

である. したがって, $\mathcal{N} = \{f \mid f : B \to \mathcal{R}\}$ とおくと $\mathcal{N}$ も Γ 作用をもつ. 一方, B には対称群 $S(B)(\cong \mathfrak{S}_{\frac{p(p-1)}{2}})$ が自然に作用しているから, 上の作用群 Γ は $\mathfrak{S}_{\frac{p(p-1)}{2}}$ の部分群と見なすことができる. ただし, $p \geq 3$ である. 以下, 位数 p のグラフの同型類の個数を数えるために $\Gamma = \mathfrak{S}_p$ ととる. そのとき, グラフ (V, E) の同型類の個数は写像 f の軌道の個数に一致する. つまり, 求める同型類の個数は $|\mathcal{N}/\mathfrak{S}_p|$ である. 「ポリアの定理 1」より巡回指数を用いると,

$$P_{\mathfrak{S}_p}\overbrace{(2, 2, \cdots, 2)}^{\frac{p(p-1)}{2}\text{個}}$$

であることがわかる. $|\mathcal{R}| = 2$ を代入していることに注意せよ. 次に位数が p, サイズが q であるグラフの同型類の個数を数え上げよう. そのために重み関数

$$u : \mathcal{R} = \{0, 1\} \to \Omega_x = \{1, x, x^2, \cdots, x^k, \cdots\} \quad ; 0 \mapsto 1 \text{ かつ } 1 \mapsto x$$

を考える. このとき, 「図形数え上げ級数」$\mathfrak{f}(x) = 1 + x$ である. また

$$w(f) = \prod_{\{i, j\} \in B} u(f(\{i, j\})) = x^q$$

となるから「重み指数が q である軌道の個数」は「位数が p, サイズが q であるグラフの同型類の個数」に一致する. 「ポリアの定理 2」より, 求める個数は「配置数え上げ級数」

$$\mathfrak{F}(x) = P_{\mathfrak{S}_p}(1 + x, 1 + x^2, \cdots, 1 + x^{\frac{p(p-1)}{2}})$$

の x^q の係数 $\mathfrak{F}_q$ で与えられる.

<u>**注意**</u> 位数が p, サイズが q であるグラフの同型類の個数を数え上げるための重み関数 $u : \mathcal{R} = \{0, 1\} \to \Omega_x = \{1, x, x^2, \cdots, x^k, \cdots\}$ の選び方は 1 通りではない. 例えば, u として「$0 \mapsto x$ かつ $1 \mapsto x^{\frac{p(p-1)}{2}+1} = x^{\frac{p^2-p+2}{2}}$」と対応させれば, 「図形数え上げ級数」$\mathfrak{f}(x) = x + x^{\frac{p^2-p+2}{2}}$ で,

$$w(f) = \prod_{\{i, j\} \in B} u(f(\{i, j\})) = x^{\frac{p(p-1)}{2}-q} x^{\frac{(p^2-p+2)q}{2}} = x^{\frac{p(p-1)(1+q)}{2}}$$

となる．この場合の求める個数は「配置数え上げ級数」

$$\mathfrak{F}(x)=P_{\mathfrak{S}_p}(x+x^{\frac{p^2-p+2}{2}},x^2+x^{p^2-p+2},\cdots,x^{\frac{p(p-1)}{2}}+x^{\frac{p(p-1)(p^2-p+2)}{4}})$$

の $x^{\frac{p(p-1)(1+q)}{2}}$ の係数 $\mathfrak{F}_{\frac{p(p-1)(1+q)}{2}}$ で与えられる．

実際に $p=3$ の場合を計算してみよう．3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の巡回指数は

$$P_{\mathfrak{S}_3}(x_1,\,x_2,\,x_3)=\frac{1}{6}(x_1^3+3x_1x_2+2x_3)$$

だから，「配置数え上げ級数」は

$$\mathfrak{F}(x)=P_{\mathfrak{S}_3}(1+x,1+x^2,1+x^3)=\frac{1}{6}\{(1+x)^3+3(1+x)(1+x^2)+2(1+x^3)\}=1+x+x^2+x^3$$

で与えられる．これを上の注意で書いた方でやってみよう．この場合の「配置数え上げ級数」は

$$\mathfrak{F}(x)=P_{\mathfrak{S}_3}(x+x^4,x^2+x^8,x^3+x^{12})=\frac{1}{6}\{(x+x^4)^3+3(x+x^4)(x^2+x^8)+2(x^3+x^{12})\}=x^3+x^6+x^9+x^{12}$$

で与えられる．以上の結果から，$(p,q)=(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)$ に対するグラフの同型類の個数はそれぞれ 1 であることがわかる．

応用例 2. 正 6 角形の彩色の場合の数

正 6 角形の頂点 (または辺) を 3 色 a,b,c で塗り分ける場合の数を数え上げたい．ただし，回転して同じ色の塗り方は同一であるとする．カラーリング $f:[6]\to\mathcal{R}=\{a,\,b,\,c\}$ を考える．

$$\Gamma=\{(1)(2)(3)(4)(5)(6),\ (14)(25)(36),\ (135)(246),\ (153)(264),\ (123456),\ (654321)\}\subset\mathfrak{S}_6$$

が [6] および $\mathcal{M}=\{f\,|\,f:[6]\to\mathcal{R}\}$ に作用している．Γ は 2 面体群 D_6 の正規部分群で，位数 6 の巡回群 C_6 と同型である．巡回指数は

$$P_\Gamma(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=\frac{1}{6}(x_1^6+x_2^3+2x_3^2+2x_6)$$

であるから，「ポリアの定理 1」より求める場合の数は $\frac{1}{6}\times(3^6+3^3+2\cdot3^2+2\cdot3)=130$ となる．さらに各色を 2 色ずつ使う場合を考えよう．そのために重み関数

$$u:\mathcal{R}=\{a,\,b,\,c\}\to\Omega_x=\{1,\,x,\,x^2,\,\cdots,\,x^k,\,\cdots\}\quad;\,a\mapsto1\text{ かつ }b\mapsto x\text{ かつ }c\mapsto x^7$$

を考える．このとき，「図形数え上げ級数」$\mathfrak{f}(x)=1+x+x^7$ である．また

$$w(f)=\prod_{i\in[6]}u(f(i))=x^{16}$$

となるから「重み指数が 16 である軌道の個数」は「各色を 2 色ずつ使う場合の数」に一致する．「ポリアの定理 2」より，求める場合の数は「配置数え上げ級数」

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x)&=P_\Gamma(1+x+x^7,\,1+x^2+x^{14},\cdots,\,1+x^6+x^{42})\\&=\frac{1}{6}\{(1+x+x^7)^6+(1+x^2+x^{14})^3+2(1+x^3+x^{21})^2+2(1+x^6+x^{42})\}\\&=x^{42}+x^{36}+x^{35}+3x^{30}+5x^{29}+3x^{28}+4x^{24}+10x^{23}+10x^{22}\\&\qquad+4x^{21}+3x^{18}+10x^{17}+16x^{16}+10x^{15}+3x^{14}+x^{12}+5x^{11}\\&\qquad\quad+10x^{10}+10x^9+5x^8+x^7+x^6+x^5+3x^4+4x^3+3x^2+x+1\end{aligned}$$

より x^{16} の係数 $\mathfrak{F}_{16} = 16$ で与えられる．また各項の係数を全部足すと確かに 130 になっている．

<u>注意</u>　各色を 2 色ずつ使う場合の重み関数を

$$u : \mathcal{R} = \{a, b, c\} \to \Omega_x = \{1, x^2, x^3, \cdots, x^k, \cdots\} \quad ; a \mapsto 1 \text{ かつ } b \mapsto x^2 \text{ かつ } c \mapsto x^9$$

ととるならば,「図形数え上げ級数」は $\mathfrak{f}(x) = 1 + x^2 + x^9$ となる．さらに

$$w(f) = \prod_{i \in [6]} u(f(i)) = x^{22}$$

より, 求める場合の数は「配置数え上げ級数」

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(x) &= P_\Gamma(1 + x^2 + x^9, 1 + x^4 + x^{18}, \cdots, 1 + x^{12} + x^{54}) \\
&= \frac{1}{6}\{(1 + x^2 + x^9)^6 + (1 + x^4 + x^{18})^3 + 2(1 + x^6 + x^{27})^2 + 2(1 + x^{12} + x^{54})\} \\
&= x^{54} + x^{47} + x^{45} + 3x^{40} + 5x^{38} + 3x^{36} + 4x^{33} + 10x^{31} \\
&\qquad + 10x^{29} + 4x^{27} + 3x^{26} + 10x^{24} + 16x^{22} + 10x^{20} + x^{19} + 3x^{18} + 5x^{17} \\
&\qquad + 10x^{15} + 10x^{13} + x^{12} + 5x^{11} + x^{10} + x^9 + 3x^8 + 4x^6 + 3x^4 + x^2 + 1
\end{aligned}$$

の x^{22} の係数 $\mathfrak{F}_{22} = 16$ で与えられる．この場合も各項の係数を全部足すと確かに 130 になっている．

参考文献

[1] 生田雅範., *Polya* の定理と *Pattern Inventory* , http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/ wakui/ 2010 sotsuron.pdf.

[2] 小島定吉.,「離散構造」, 朝倉書店, 2013.

[3] 田島新成.,「グラフの数え上げ　母関数を礎にして」, 共立出版, 2014.

[4] 仁平政一, 西尾義典.,「グラフ理論序説 改訂版」, プレアデス出版, 2010.