Computer algebra and Bruce-Roberts Milnor number

伊澤毅*

IZAWA, Takeshi

北海道科学大学工学部情報工学科

Department of computer science, Hokkaido university of science

鍋島克輔†

NABESHIMA, Katsusuke

徳島大学大学院理工学研究部

Graduate School of Science and Technology, Tokushima University

田島慎一‡

TAJIMA, Shinichi

筑波大学大学院数理物質系数学域

Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba

Abstract

Bruce-Roberts Milnor number is a generarization of the Milnor number, a multiplicity of an isolated critical point of a holomorphic function germ. This number is defined for a critical point of a holomorphic function on a singular variety. In the hypersurface isolated singularity case, Bruce-Roberts Milnor numbers can be considerd in the context of symbolic computation, or computer algebra. In this note we report on some computational experiments for Bruce-Roberts Milnor numbers of polynomial functions on semi-quasi homogenous singularities.

1 Bruce Roberts Milnor number

正則関数の孤立臨界点における重複度である Milnor 数は，Milnor 自身によって定義された “homological multiplicity” を始めとして，同値である様々な定式化が可能である ([O])．さらに正則関数 $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ の source space が特異多様体 X である場合の射に対して同様の重複度を定義する試みがなされている（[GSV], [BR], [IS], [L], etc).

$\mathcal{O}$ を原点における正則関数の芽のなす局所環，J_f を原点における正則関数 f の Jacobi イデアルとする．Bruce と Roberts は代数的重複度

$$\mu_{alg} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/J_f$$

*t-izawa@hus.ac.jp

†nabeshima@tokushima-u.ac.jp

‡tajima@math.tsukuba.ac.jp

の観点を拡張し，特異多様体に沿う対数ベクトル場を用いて特異多様体上の関数の重複度を定義した ([BR])．以下本稿ではこの重複度を Bruce-Roberts の Milnor 数と呼ぶことにする．この特異多様体に対する関数の重複度の定義は自然であり，また近年では Euler obstruction など幾何学的に重要な量との関連も調べられている．しかし，対数ベクトル場を求めることは，擬斉次多項式を定義関数とする超曲面の孤立特異点の場合などを除くと，一般には非常に困難である．したがって Bruce-Roberts Milnors 数の値についても計算実例が乏しいのが現状である．

しかし近年，第二著者と第三著者により孤立特異点を持つ超曲面に対し，パラメータ付きで対数ベクトル場を具体的に求めるアルゴリズムが開発され ([NaT1], [NaT2])，数式処理システム Risa/Asir [No] に実装された ([TN])．これにより，擬斉次多項式定義関数ではない定義多項式を持つ孤立超曲面特異点に関する Bruce-Roberts Milnor 数が計算可能となり，パラメータ依存性を含むその挙動に関する計算実例を得ることが可能となった．本稿ではこのアルゴリズムを用いた計算実験の結果をいくつか紹介し，観測されたその特徴について述べる．

1.1 Definition

本稿を通じて以下，特異多様体として，原点で孤立特異点を持つ特異超曲面 X を考える．$X = \{\varphi = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ に対し，

$$\mathcal{D}er_0(-\log X) = \{v \in \mathcal{D}er_0(\mathbb{C}^n) \,|\, v(\varphi) = h\varphi,\, h \in \mathcal{O}_n\}$$

とし，その元を X の 対数ベクトル場と呼ぶ．f を X の近傍で定義された正則関数とし，対数ベクトル場による微分のなすイデアルを

$$I_{BR}(f, X) = \{v(f) \,|\, v \in \mathcal{D}er_0(-\log X)\}$$

として，

$$\mu_{BR}(f, X) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_n / I_{BR}(f, X))$$

を，f の X に関する Bruce-Roberts Milnor 数（または BR-Milnor 数）と呼ぶ．

2 Quasihomogeneous case

超曲面の定義方程式が擬斉次多項式 (weighted homogeneous polynomial function) で与えられている場合は，超曲面に沿う対数的ベクトル場を Euler ベクトル場と自明なベクトル場を用いて書き下すことができるため，これらを用いて BR-Milnor 数を扱うことが比較的容易な数少ないケースである．古典的 Milnor 数の計算公式を recall すると共に，現在知られている結果について簡単にまとめる．

2.1 Milnor-Orik formula

擬斉次多項式が孤立特異点を定めている場合は，古典的な Milnor 数が計算可能である．これについては Milnor-Orlik による次の結果が有名である：

定理 2.1. $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ は擬斉次多項式関数，*weight vector* は $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$，その *generalized degree* は d とする．すなわち；

$$f(l^{w_1}x_1, l^{w_2}x_2, \ldots, l^{w_n}x_n) = l^d \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

を満たす．このとき，

$$\mu(f,0)=\frac{1}{w_1w_2\cdots w_n}\left(d-w_1\right)\left(d-w_2\right)\cdots\left(d-w_n\right).$$

2.2 BOT formula

上の公式は，孤立特異点を持つ超曲面の定義方程式および，関数の芽が，共に同じ weight vector を持つ擬斉次多項式の場合，次の形で BR-Milnor 数 $\mu_{BR}(f,X)$ に拡張される．

定理 2.2. *(J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice, J. N. Tomazella)*
$X=\varphi^{-1}(0)$ は，擬斉次超曲面の孤立特異点であり，*type*：$(w_1,\ldots,w_n:d_\varphi)$．また，関数 $f:(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{C},0)$ も擬斉次で $\mathcal{R}_X$*-finitly determined* であり，*type*： $(w_1,\ldots,w_n:d_f)$ とする，このとき，

$$\begin{aligned}&\mu_{BR}(f,X)\\&=\frac{d_f}{w_1\cdots w_n}\sum_{j=1}^{n}(d_f-w_1)\cdots(d_f-w_{j-1})(d_\varphi-w_{j+1})\cdots(d_\varphi-w_n).\end{aligned}$$

この結果は Milnor-Orlik による Milnor 数の計算公式の自然な一般化であると考えられが，関数と定義方程式の重みが同じであるという非常に特別なケースとなっている．しかし，現在のところこの公式より他に BR-Milnor 数 のまとまった計算方法が知られているケースは無いようである．

3 計算が困難な BR-Milnor 数

上で述べたように，BR-Milnor 数は概念として自然であるが，variety の対数的ベクトル場を求めることが一般には困難であることから，BR-Milnor 数の値を実際に計算することは超曲面の孤立特異点の場合であっても非常に難しく，計算実例が乏しい．鍋島-田島により，数式処理システム Risa/Asir[No] に今回実装された関数 brm() は，擬斉次超曲面に限定されず，一般の孤立特異点を持つ超曲面と一般の多項式関数に関する BR-Milnor 数を変形パラメータを含めて計算可能である．これにより，擬斉次な場合からの変形による BR-Milnor 数の変化など，いままでほどんと知られていなかった BR-Milnor 数について，多くの計算実験を行うことができる．これにより本質的な理解を深めることが期待できる．

3.1 Risa/Asir brm() 関数：使用例

- $f(x,y,z)=x$
- $\varphi(x,y,z)=x^2+y^3+z^5+pxy+qxy^2$

```
[437] brm(x, x^2+y^3+z^5+p*x*y+q*x*y^2, [x,y,z], [p,q],1);
NON-Singular Condition
[]

[[0],[-q^4*p^4+7*q^3*p^3-12*q^2*p^2+6*q*p]]
[1,y,z,z*y,z^2,z^2*y,z^3,z^3*y]
No. of element is 8
```

```
[[q^2*p^2-6*q*p+6],[1]]
[1,y,z,z*y,z^2,z^2*y,z^3,z^3*y]
No. of element is 8

[[q*p-1],[1]]
[1,y,z,z*y,z^2,z^2*y,z^3,z^3*y]
No. of element is 8

NOT zero-dime
[[[p],[-q,p]]]

NOT zero-dime
[[[q],[q,-p]]]

[[q,p],[1]]
[1,y,z,z*y,z^2,z^2*y,z^3,z^3*y]
No. of element is 8
```

4 計算実験

以下では超曲面 X の定義方程式 $X = \{\varphi = 0\}$ を用いて，簡単のために $\mu_{BR}(f, X)$ を $\mu_{BR}(f, \varphi)$ と書く事にする．計算実験を始めるにあたり，まずは BOT の公式における仮定，すなわち関数及び定義関数が共通の weight vector を持つ場合からの変形として，次のような状況を設定してみた：

4.1 計算実験 1

関数 f と定義方程式 $\varphi = 0$ の主要部は共通（E-型の正規型）で，upper monomial による変形の組み合わせ：

- $\varphi = \varphi_0 + u$
- $f = \varphi_0 + \tilde{u}$

について，$\mu_{BR}(f, \varphi)$ の計算実験を行う．

ここで正規型擬斉次多項式 φ_0 の “upper monomial” とは，φ_0 の Jacobi ideal J_{φ_0} 上の剰余環 $\mathcal{O}/J_{\varphi_0}$ の生成元であり，かつ φ_0 より高次のものをいう．このような項を付け加えた擬斉次多項式からの変形をここでは半擬斉次多項式 (semi-weighted homogenous polynomial) と呼ぶことにする．一般にこの変形は正規型からの varsal deformation となり，φ_0 自身の次に考察すべき基本的対象と考えられる．実験対象としては，[YS] に従い， inner modality が 4 以下の擬斉次多項式の正規型と，その upper monomial による変形を選んだ．以下に計算結果のいくつかを与える．

4.1.1 Some examples on Type E

Type: E_{24}

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^3 + y^{13} \quad (\frac{1}{3}, \frac{1}{13}),\ d = 1$
Upper monomial: $xy^9,\ xy^{10},\ xy^{11}$

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f,\varphi)$
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{11}$	$f(x,y) = \varphi_0$	70
	$f(x,y) = \varphi_0 + 2\cdot xy^{11}$	70
	$f(x,y) = \varphi_0 + xy^{10}$	67
	$f(x,y) = \varphi_0 + xy^9$	64
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{10}$	φ_0	68
	$\varphi_0 + xy^{11}$	68
	$\varphi_0 + 2\cdot xy^{10}$	68
	$\varphi_0 + xy^9$	65
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^9$	φ_0	66
	$\varphi_0 + 2\cdot xy^{11}$	66
	$\varphi_0 + xy^{10}$	66
	$\varphi_0 + xy^9$	66

Type: E_{25}

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^3 + xy^9 \quad (\frac{1}{3}, \frac{2}{27}),\ d = 1$
Upper monomial: $y^{14},\ y^{15},\ y^{16}$

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f,\varphi)$
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{16}$	φ_0	73
	$\varphi_0 + 2\cdot y^{16}$	73
	$\varphi_0 + y^{15}$	70
	$\varphi_0 + y^{14}$	67
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{15}$	φ_0	71
	$\varphi_0 + y^{16}$	71
	$\varphi_0 + 2\cdot y^{15}$	71
	$\varphi_0 + y^{14}$	68
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{14}$	φ_0	69
	$\varphi_0 + y^{16}$	69
	$\varphi_0 + y^{15}$	69
	$\varphi_0 + 2\cdot y^{14}$	69

Type : E_{26}

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^3 + y^{14} \quad (\frac{1}{3}, \frac{1}{14})$, $d = 1$
Upper monomial: xy^{10}, xy^{11}, xy^{12}

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f,\varphi)$
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{12}$	φ_0	76
	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{12}$	76
	$\varphi_0 + xy^{11}$	73
	$\varphi_0 + xy^{10}$	70
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{11}$	φ_0	74
	$\varphi_0 + xy^{12}$	74
	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{11}$	74
	$\varphi_0 + xy^{10}$	71
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{10}$	φ_0	72
	$\varphi_0 + xy^{12}$	72
	$\varphi_0 + xy^{11}$	72
	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{10}$	72

Type : E_{30}

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^3 + y^{16}$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{16})$, $d = 1$

Upper monomial: xy^{11}, xy^{12}, xy^{13}, xy^{14}

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f, \varphi)$
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{14}$	φ_0	88
	$\varphi_0 + xy^{14}$	88
	$\varphi_0 + xy^{13}$	85
	$\varphi_0 + xy^{12}$	82
	$\varphi_0 + xy^{11}$	79
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{13}$	φ_0	86
	$\varphi_0 + xy^{14}$	86
	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{13}$	86
	$\varphi_0 + xy^{12}$	83
	$\varphi_0 + xy^{11}$	80
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{12}$	φ_0	84
	$\varphi_0 + xy^{14}$	84
	$\varphi_0 + xy^{13}$	84
	$\varphi_0 + xy^{12}$	84
	$\varphi_0 + xy^{11}$	81
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{11}$	φ_0	82
	$\varphi_0 + xy^{14}$	82
	$\varphi_0 + xy^{13}$	82
	$\varphi_0 + xy^{12}$	82
	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{11}$	82

Type : E_{31}

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^3 + xy^{11} \quad (\frac{1}{3}, \frac{2}{33}),\ d = 1$
Upper monomial: y^{17}, y^{18}, y^{19}, y^{20}

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f,\varphi)$
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{20}$	φ_0	91
	$\varphi_0 + 2 \cdot y^{20}$	91
	$\varphi_0 + y^{19}$	88
	$\varphi_0 + y^{18}$	85
	$\varphi_0 + y^{17}$	82
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{19}$	φ_0	89
	$\varphi_0 + y^{20}$	89
	$\varphi_0 + 2 \cdot y^{19}$	89
	$\varphi_0 + y^{18}$	86
	$\varphi_0 + y^{17}$	83
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{18}$	φ_0	87
	$\varphi_0 + y^{20}$	87
	$\varphi_0 + y^{19}$	87
	$\varphi_0 + 2 \cdot y^{18}$	87
	$\varphi_0 + y^{17}$	84
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{17}$	φ_0	85
	$\varphi_0 + y^{20}$	85
	$\varphi_0 + y^{19}$	85
	$\varphi_0 + y^{18}$	85
	$\varphi_0 + 2 \cdot y^{17}$	85

Type : E_{32}

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^3 + y^{17} \quad (\frac{1}{3}, \frac{1}{17}),\ d = 1$
Upper monomial: $xy^{12},\ xy^{13},\ xy^{14},\ xy^{15}$

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f,\varphi)$
	φ_0	94
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{15}$	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{15}$	94
	$\varphi_0 + xy^{14}$	91
	$\varphi_0 + xy^{13}$	88
	$\varphi_0 + xy^{12}$	85
	φ_0	92
	$\varphi_0 + xy^{15}$	92
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{14}$	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{14}$	92
	$\varphi_0 + xy^{13}$	89
	$\varphi_0 + xy^{12}$	86
	φ_0	90
	$\varphi_0 + xy^{15}$	90
	$\varphi_0 + xy^{14}$	90
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{13}$	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{13}$	90
	$\varphi_0 + xy^{12}$	87
	φ_0	88
	$\varphi_0 + xy^{15}$	88
	$\varphi_0 + xy^{14}$	88
	$\varphi_0 + xy^{13}$	88
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^{12}$	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^{12}$	88

4.1.2 E 型以外の場合の計算結果例

Type : W_{24}

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^4 + y^9 \quad (\frac{1}{4}, \frac{1}{9}),\ d = 1$

Upper monomial: $xy^7,\ x^2y^5,\ x^2y^6,\ x^2y^7$

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f,\varphi)$
	φ_0	70
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + x^2y^7$	$\varphi_0 + 2 \cdot x^2y^7$	70
	$\varphi_0 + x^2y^6$	66
	$\varphi_0 + x^2y^5$	62
	$\varphi_0 + xy^7$	61
	φ_0	67
	$\varphi_0 + x^2y^7$	67
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + x^2y^6$	$\varphi_0 + 2 \cdot x^2y^6$	67
	$\varphi_0 + x^2y^5$	63
	$\varphi_0 + xy^7$	62
	φ_0	64
	$\varphi_0 + x^2y^7$	64
	$\varphi_0 + x^2y^6$	64
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + x^2y^5$	$\varphi_0 + 2 \cdot x^2y^5$	64
	$\varphi_0 + xy^7$	63
	φ_0	63
	$\varphi_0 + x^2y^7$	63
	$\varphi_0 + x^2y^6$	63
	$\varphi_0 + x^2y^5$	63
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + xy^7$	$\varphi_0 + 2 \cdot xy^7$	63

Type :W_{25}

Normal form: $\varphi(x,y) = x^4 + xy^7 \quad (\frac{1}{3}, \frac{2}{27}),\ d = 1$

Upper monomial: x^2y^5, y^{10}, y^{11}, y^{12}

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f,\varphi)$
$x^4 + xy^7 + y^{12}$	φ	73
	$\varphi + 2 \cdot y^{12}$	73
	$\varphi + y^{11}$	69
	$\varphi + y^{10}$	65
	$\varphi + x^2y^5$	66
$x^4 + xy^7 + y^{11}$	φ	70
	$\varphi + y^{12}$	70
	$\varphi + 2 \cdot y^{11}$	70
	$\varphi + y^{10}$	71
	$\varphi + x^2y^5$	66
$x^4 + xy^7 + y^{10}$	φ	67
	$\varphi + y^{12}$	67
	$\varphi + y^{11}$	67
	$\varphi + 2 \cdot y^{10}$	67
	$\varphi + x^2y^5$	66
$x^4 + xy^7 + x^2y^5$	φ	$(*1)$
	$\varphi + y^{12}$	68
	$\varphi + y^{11}$	67
	$\varphi + y^{10}$	66
	$\varphi + 2 \cdot x^2y^5$	$(*2)$

$(*1)$ の場合，イデアル $I_{BR}(\varphi, x^4 + xy^7 + x^2y^5)$ は，原点に孤立した共通ゼロ点を持たない．同様に，$(*2)$ の場合，イデアル $I_{BR}(\varphi + 2x^2y^5, x^4 + xy^7 + x^2y^5)$ は，原点に孤立した共通ゼロ点を持たない．

Type: N_{24}^1

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^5 + y^7 \quad (\frac{1}{5}, \frac{1}{7}),\ d = 1$
Upper monomial: $x^3y^3,\ x^2y^5,\ x^3y^4,\ x^3y^5$

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f,\varphi)$
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + x^3y^3$	φ_0	70
	$\varphi_0 + x^3y^5$	70
	$\varphi_0 + x^3y^4$	65
	$\varphi_0 + x^2y^5$	63
	$\varphi_0 + 2 \cdot x^3y^3$	60
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + x^2y^5$	φ_0	66
	$\varphi_0 + x^3y^5$	66
	$\varphi_0 + x^3y^4$	66
	$\varphi_0 + 2 \cdot x^2y^5$	64
	$\varphi_0 + x^3y^3$	61
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + x^3y^4$	φ_0	64
	$\varphi_0 + x^3y^5$	64
	$\varphi_0 + 2 \cdot x^3y^4$	64
	$\varphi_0 + x^2y^5$	64
	$\varphi_0 + x^3y^3$	61
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + x^3y^5$	φ_0	62
	$\varphi_0 + 2 \cdot x^3y^5$	62
	$\varphi_0 + x^3y^4$	62
	$\varphi_0 + x^2y^5$	62
	$\varphi_0 + x^3y^3$	62

Type : J_{28}

Normal form: $\varphi_0(x,y) = x^3 + tx^2y^5 + y^{15} \quad (\frac{1}{3}, \frac{1}{15}),\ d = 1$
Upper monomial: $y^{13},\ y^{14}$

Local defining function	Functions	$\mu_{BR}(f, \varphi)$
	φ_0	82
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{18}$	$\varphi_0 + 2 \cdot y^{18}$	82
	$\varphi_0 + y^{17}$	89
	$\varphi_0 + y^{16}$	76
	φ_0	80
	$\varphi_0 + y^{18}$	80
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{17}$	$\varphi_0 + 2 \cdot y^{17}$	80
	$\varphi_0 + y^{16}$	77
	φ_0	78
	$\varphi_0 + y^{18}$	78
	$\varphi_0 + y^{17}$	78
$\varphi(x,y) = \varphi_0 + y^{16}$	$\varphi_0 + 2 \cdot y^{16}$	78

4.1.3 計算実験 1 のまとめ

関数と定義関数，それぞれの変形項において次数に関して，多くの場合に明らかな規則性を見て取る事ができる．具体的には，関数，定義関数両者の主要部である擬斉次多項式を φ_0 として，二つの upper monomial u_1, u_2 が $\deg(u_1) \leq \deg(u_2)$ を満たすならば，

$$\mu_{BR}(\varphi_0 + u_2,\ \varphi_0 + u_1) = \mu_{BR}(\varphi_0,\ \varphi_0 + u_1)$$

が多くの例で成立している．原因の推測として，より高い次数による変形については，その変形が解析的な構造の本質的な変化を与えなくなり，$f = \varphi_o$ の計算結果に収斂しているのではないかということ考えられる．

この計算実験の状況設定は，関数と定義関数の主要部が共通であるという特別なものである．この $\mathbb{C}^*$ 作用が関数と超曲面で共通であるという仮定は，変形を考える場合，実は関数と超曲面の組合せとしては不安定でデリケートな側面もあるようである．そこで，特異多様体の定義関数に対し “generic” に関数を選んだ場合の BR-Milnor 数について計算実験を行うことにした．これが次の実験である．

4.2 計算実験 2

計算実験 1 の状況設定では，関数と定義関数の主要部が共通であったそこで，むしろ関数を定義関数に対しランダムかつ “generic” に選択した場合の変化がどうなるのかについて計算実験を行った．

孤立特異点を持つ超曲面の擬斉次定義関数 φ_0 及び，それに upper monomial u を加えた変形 $\varphi_0 + u$ を考える．それに対し関数のほうは，多項式関数 f を高次から低次までかなり適当に選び，それらの組み合わせに対する BR-Milnor 数

$$\mu_{BR}(f,\ \varphi_0), \qquad \mu_{BR}(f,\ \varphi_0 + u)$$

の計算結果を比較してみた．ここでは以下にあげる超曲面の upper monomial による変形例：

超曲面の変形

$$\varphi_0 = x^4 + y^9 \quad \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_0 + xy^7 \\ \varphi_0 + x^2y^5 \\ \varphi_0 + x^2y^6 \\ \varphi_0 + x^2y^7 \end{cases}$$

に対し，二つの多項式関数 f_1, f_2 を適当に選び，変形前後の BR-Milnor 数の値と変化を計算してみた．

Example 1: $\quad f_1 = x^5 + x^3y^4 + y^{12}$

upper monomial u	$\mu_{BR}(f_1, \varphi_0 + u)$	$\mu_{BR}(f_1, \varphi_0)$	difference
xy^7	85	82	3
x^2y^5	85		3
x^2y^6	84		2
x^2y^7	83		1

Example 2: $\quad f_2 = x^3 + x^4y^2 + xy^8 + y^9$

upper monomial u	$\mu_{BR}(f_2, \varphi_0 + u)$	$\mu_{BR}(f_2, \varphi_0)$	difference
xy^7	45	42	3
x^2y^5	45		3
x^2y^6	44		2
x^2y^7	43		1

上の二例における関数 f は無作為の選んだものであり，両者の間に特別な関係が設定されているわけではない．しかし，変形前後の μ_{BR} の差 (3, 3, 2, 1) が関数 f によらず，φ_0 と変形項 u のみで決まっているように推測される．実際，変形前後の μ_{BR} の差は変形前後の定義関数の Tjurina 数の差（の -1 倍）に一致している．

変形：$\varphi_0 = x^4 + y^9 \Longrightarrow \varphi_0 + u$ における Tjurina 数の変化

upper monomial u	$\tau(\varphi_0 + u)$	$\tau(\varphi_0)$	difference
xy^7	21	24	-3
x^2y^5	21		-3
x^2y^6	22		-2
x^2y^7	23		-1

4.2.1　推測

実は 2 次元と 3 次元の場合において，定義関数の変形 $\varphi_0 \to \varphi_0 + u$ と多項式関数 f の対を無作為に選び，同様の計算実験をおこなってみたところ，実験した約 100 例ほどの全ての場合に同様の現象が確認できた．まとめると，

・φ_0: weighted homogeneous,
・u: upper monomial,
・f: φ_0 に対し「適当な generic condition」を満たす.

この状況のもとで，

$$\frac{\mu_{BR}(f,\, \varphi_0 + u) - \mu_{BR}(f,\, \varphi_0)}{\tau(\varphi_0 + u) - \tau(\varphi_0)} = -1.$$

が成り立つ可能性が推測される．

4.2.2　補足

ここで実験的に $I_{BRM}(f, \varphi)$ に関数 f 自身を加えたイデアル：

$$I_{BRT}(f, \varphi) = I_{BRM} + (f)$$

を考え，BR-Tjurina 数を

$$\tau_{BR}(f, \varphi) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / I_{BRT}$$

で導入してみる．するとこれについてもいくつかの実例計算実験において同様の関係が成り立つことが確認できた．

$$\frac{\tau_{BR}(f,\, \varphi_0 + u) - \tau_{BR}(f,\, \varphi_0)}{\tau(\varphi_0 + u) - \tau(\varphi_0)} = -1$$

これについては，現在まだ検証例が不足している．今後の課題である．

謝辞

本研究において第二著者は科学研究費補助金 (課題番号:No. 15K17513), 第三著者は科学研究費補助金 (課題番号:No. 15K04891) の助成を受けている。

参　考　文　献

[BR]　J. W. Bruce and R. M. Roberts, *Critical points of functions on singular varieties,* Topology, **27**(1988), 57–90.

[GSV]　X. Gómez-Mont, J Seade, and A. Verjovsky, *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity,* Math. Ann. **291**(1991), 737–751.

[IS] T. Izawa and T. Suwa, *Multiplicity of functions on singular varieties,* Internat. J. Math **14**, No.1 (2003), 541-558.

[L] D.-Y. Lẽ, *Le concept de singularité isolée de function analitique*, in Complex Analytic Singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics 8, Kinokuniya Co and North Holland, (1986), 215–227.

[NaT1] 鍋島克輔, 田島慎一, **パラメータ付き対数ベクトル場と局所コホモロジーについて**, RIMS 講究録 **1927**, (2014), 55–65.

[NaT2] K. Nabeshima and S. Tajima, *Computing Logarithmic Vector Fields associtated with Parametric semi-quasihomogeneous Hypersurface isolated Sinngularities*, Proc. ISSAC, (2015), ACM, 291–298.

[NaT3] K. Nabeshima and S. Tajima, *Computing Tjurina stratification of μ-constant deformations via paramertic local cohomology systems*, AAECC, **27**, (2016), 450–466.

[No] M. Noro and T. Takeshima, *Risa/Asir- A computer algebra system*, Proc. ISSAC'92, (1992), ACM, 387-396. `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir-ja.html`

[NOT] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice and J. N. Tomazella, *The Bruce-Roberts number of a function on a weighted homogeneous hypersurface*, Quart. J. Math. **64**(2013), 269–280.

[O] P. Orlik, *The multiplicity of a holomorphic map at an isolated critical point*, Real and Complex Singularities, Oslo, 1979 (Edited by P. Holm), Sitjhoff and Nordhoff, (1977).

[TN] 田島慎一, 鍋島克輔, *Bruce-Roberts* **ミルナー数の計算アルゴリズム**, RIMS 講究録 **1976**, (2015), 91–99.

[YS] E. Yoshinaga and M. Suzuki, *Normal forms of nondegenerate quasihomogeneous functions with inner modality* ≤ 4 , Invent. Math. **55**(1979), No. 2, 185–206.