

# 多変数留数の計算アルゴリズム (シェイプ基底を持つ場合)

小原功任\*

KATSUYOSHI OHARA

金沢大学理工研究域

FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS,

INSTITUTE OF SCIENCE AND ENGINEERING,

KANAZAWA UNIVERSITY

田島慎一†

SHINICHI TAJIMA

筑波大学数理物質系

INSTITUTE OF MATHEMATICS,

FACULTY OF PURE AND APPLIED SCIENCES,

UNIVERSITY OF TSUKUBA

## 1 はじめに

本稿では、ある条件のもとで多変数留数を exact に計算するアルゴリズムを与える。まず、Griffiths-Harris [1] に基づいて、多変数留数の定義を述べよう。

**定義 1.** 領域  $U \subset \mathbb{C}^n$  上の正則関数の組  $F = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  が完全交叉であり、また、 $U$  における  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  の共通零点は一点  $\beta \in U$  だけであるとす。このとき  $U$  上で正則な関数  $\varphi(x)$  に対し、積分

$$\text{Res}_\beta \left( \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_n} dx \right) = \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^n \int_{\Gamma(\beta)} \frac{\varphi(x)}{f_1(x) \cdots f_n(x)} dx$$

を**多変数留数** (Grothendieck local residue) という。ここで  $\Gamma(\beta) = \{x \in U \mid \|f_1(x)\| = \varepsilon, \dots, \|f_n(x)\| = \varepsilon\}$  は、十分小さな  $\varepsilon > 0$  で定まる実  $n$  次元サイクルである。

正則関数  $\varphi$  に、多変数留数を対応させる線形写像  $\varphi \mapsto \text{Res}_\beta \left( \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_n} dx \right)$  は、超関数とみなすことができる。この超関数は  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  から定まる偏微分作用素  $T_F = \sum_\alpha c_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$  により、 $\text{Res}_\beta \left( \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_n} dx \right) = (T_F \varphi)|_{x=\beta}$  と表すことができることが知られている。したがって、ネーター作用素  $T_F$  を求めることは多変数留数を求めることに等しい。

われわれの目標は、計算機に実装可能な、多変数留数の exact な計算アルゴリズムを与えることである。それはつまり、exact にネーター作用素を求めればよいということである。本稿では、次の条件のもとで、exact に  $T_F$  を構成するアルゴリズムについて考える。

**仮定**  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  は  $x = (x_1, \dots, x_n)$  の多項式で与えられているとし、 $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  の生成する  $\mathbb{C}[x]$ -イデアル  $I$  が、0 次元イデアルであって、その準素イデアル分解

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_N, \quad (\text{各 } \sqrt{Q_k} \text{ は素イデアル})$$

の各成分  $Q_k$  がシェイプ基底をもつと仮定する。つまり、準素イデアル  $Q_k$  は、適当に変数の番号を変えることで  $\{g_{k1}(x_1)^{m_k}, x_2 - g_{k2}(x_1), \dots, x_n - g_{kn}(x_1)\}$  で生成される。

\*ohara@se.kanazawa-u.ac.jp

†tajima@math.tsukuba.ac.jp

## 2 アルゴリズム

本節では、具体的なアルゴリズムを考えていくが、大きな方針として、計算量の観点からワイル代数  $D_n = \mathbf{C}\langle x, \partial \rangle$  におけるグレブナー基底を用いることを回避し、多項式環  $\mathbf{C}[x]$  における問題へと帰着させたい。

まず、 $V_{\mathbf{C}}(I)$  に台をもつ代数的局所コホモロジー類  $\sigma = [f_1, \dots, f_n]$  を考える。零点集合の既約分解  $V_{\mathbf{C}}(I) = Z_1 \cup \dots \cup Z_N$  に対応して、 $\sigma$  も既約成分  $Z_k = V_{\mathbf{C}}(Q_k)$  に台をもつコホモロジー類  $\sigma_k$  の和  $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_N$  に分解される。 $Z_k$  に台をもつデルタ関数を  $\delta_{Z_k}$  とする。このとき、 $\sigma_k = T_k \delta_{Z_k}$  となる微分作用素  $T_k \in D_n$  が存在し、これが既約成分ごとに定まるネーター作用素である。したがって、既約成分ごとにネーター作用素を求めることでわれわれの目的は達成される。

以下、具体的なアルゴリズムを述べよう。

### 2.1 零化イデアル

代数的局所コホモロジー類  $\sigma$  のみたす微分方程式系、つまり零化イデアル  $\text{Ann}_{D_n}(\sigma)$  を考える。零化イデアルの部分左イデアルで、高々1階の作用素で生成されるものを  $A$  とする。 $A$  を求めよう。

$\sigma$  の定義から、 $D_n I \subset \text{Ann}_{D_n}(\sigma)$  が分かる。つまり多項式イデアル  $I$  の生成系 (グレブナー基底) で、0階作用素は尽きている。次に1階作用素  $\ell = \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_i + c(x) \in D_n$  を決定しよう。任意の  $f_k \in F$  に対し、交換子  $\ell f_k - f_k \ell \in A$  は0階作用素であることから、 $\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \in I$  を満たす。つまり、

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} e_j \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(x) f_i(x) e_j = 0$$

を満たす多項式  $a_i(x), b_{ij}(x) \in \mathbf{C}[x]$  が存在する。ここで  $e_j$  は第  $j$  基本単位ベクトルである。この連立方程式は  $\mathbf{C}[x]$ -加群のシチジーの問題とみなすことができる。つまり解  $(a_i, b_{ij})$  がシチジー加群を生成するが、シチジー加群のグレブナー基底のうち、 $(a_i) \neq 0$  となるものが、1階作用素  $\ell$  を与える。シチジー加群のグレブナー基底は、Risa/Asir では、ライブラリ関数 `newsyz.module.syz` で計算可能である。よって、部分左イデアル  $A$  の生成系が得られた。

### 2.2 ネーター作用素

多項式イデアル  $I$  の準素イデアル分解を求めることと、零点集合の既約分解を求めることは同値である。Risa/Asir ではライブラリ関数 `noropd.syci.dec` により、準素イデアル分解を求めることができる。ここでは、既約成分ごとのネーター作用素、つまり  $\sigma_k = T_k \delta_{Z_k}$  となる微分作用素  $T_k \in D_n$  を求めよう。ヤコビ行列式  $J = \det \left( \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right)$  を用いると、 $J \sigma_k = m_k \delta_{Z_k}$  をみたすことに注意する ( $m_k$  は  $Q_k$  の重複度)。

仮定より、根基  $\sqrt{Q_k} = \{g_{k1}(x_1), x_2 - g_{k2}(x_1), \dots, x_n - g_{kn}(x_1)\}$  で生成される。変数変換  $(u_1, u_2, \dots, u_n) = (x_1, x_2 - g_{k2}(x_1), \dots, x_n - g_{kn}(x_1))$  を考えると、 $Q_k$  は、 $\{u_1^{m_k}, u_2, \dots, u_n\}$  で、根基は  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  で生成されていることから、ネーター作用素  $T_k$  は  $\{1, R_k, \dots, R_k^{m_k-1}\}$  の  $\mathbf{C}[x]$ -線形結合で表されることが分かる。ここで、 $R_k$  は重複方向を表す微分作用素であり、

$$R_k = -\frac{\partial}{\partial u_1} = -\partial_1 - \sum_{i=2}^n \partial_i \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_1} \in D_n$$

と与えられる。

$\text{Ann}_{D_n}(\sigma) \cdot T_k \delta_{Z_k} = 0$ であったから、まずは  $\text{Ann}_{D_n}(\sigma) \cdot S_k \delta_{Z_k} = 0$  をみたく微分作用素で、次の形となるものを決定したい (最高次の係数が 1) :

$$S_k = R_k^{m_k-1} + R_k^{m_k-2} s_{m_k-2}(x) + \cdots + R_k s_1(x) + s_0(x) \in D_n, \quad (s_i(x) \in \mathbf{C}[x])$$

デルタ関数の零化イデアルが  $\text{Ann}_{D_n}(\delta_{Z_k}) = D_n \sqrt{Q_k}$  であることに注意すると、 $AS_k \subset D_n \sqrt{Q_k}$  となるので、係数  $s_0(x), \dots, s_{m_k-2}(x)$  は  $\mathbf{C}[x]/\sqrt{Q_k}$  の元としてよい。仮定より、剰余環  $\mathbf{C}[x]/\sqrt{Q_k}$  は複素ベクトル空間として有限次元であるから、 $(m_k - 1) \times (\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x]/\sqrt{Q_k})$  個の未定係数を用いて各  $s_i(x)$  を表すことができる。条件  $AS_k \subset D_n \sqrt{Q_k}$  は、多項式イデアル  $\sqrt{Q_k}$  に対するイデアルメンバーシップ問題に他ならない。シェイプ基底はグレブナー基底の一種であるので、イデアルメンバーシップ問題は除算を用いて容易に解くことができる。正規形が 0 となる条件を未定係数の連立方程式とみなすことで、未定係数の値が定まる。 $S_k$  の最高次の係数を 1 としているので、連立方程式の解は一意となる。したがって、多項式  $s_0(x), \dots, s_{m_k-2}(x)$  が求まり、 $S_k$  も決まる。

次にネーター作用素の最高次の係数、すなわち  $T_k = S_k h_k(x)$  となる多項式  $h_k(x)$  を求めたい。このとき、 $JS_k = m_k \delta_{Z_k}$  および  $\sigma_k = T_k \delta_{Z_k}$  に注意すると、 $JS_k h_k(x) \delta_{Z_k} = m_k \delta_{Z_k}$  であるから、

$$JS_k h_k(x) - m_k \in \text{Ann}_{D_n}(\delta_{Z_k}) = D_n \sqrt{Q_k}$$

でなければならない。やはり  $h_k(x) \in \mathbf{C}[x]/\sqrt{Q_k}$  とみなしてもよいので、同様に未定係数法を用いて  $h_k(x)$  を決定できる。よって、 $Z_k$  におけるネーター作用素  $T_k = S_k h_k(x)$  が定まる。

すべての既約成分に対して、この手順を繰り返すことで、既約成分ごとに分解されたネーター作用素の組  $\{T_1, \dots, T_N\}$  が得られる。

以上より、多項式集合  $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  の生成するイデアルがシェイプ基底をもつ準素イデアルで表される場合に適用可能な、多変数留数の計算アルゴリズムが与えられた。われわれはまた、この計算アルゴリズムを計算機代数システム Risa/Asir に実装した。

## 参 考 文 献

- [1] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.
- [2] 田島慎一, Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録 **1431**(2005), 123–136.