

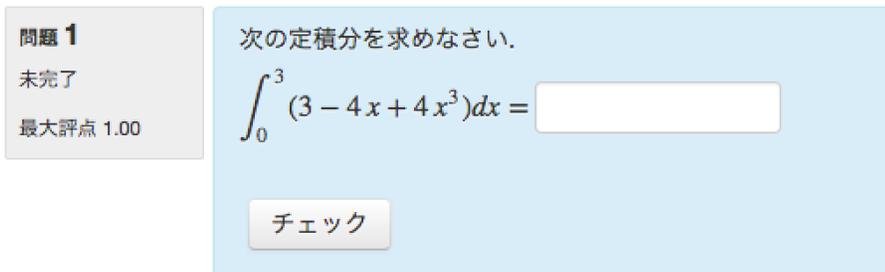
STACK 利用の実践報告

東京工業高等専門学校・一般教育科 市川 裕子 (Yuko Ichikawa)
General Education Department,
National Institute of Technology, Tokyo College

1 はじめに

数学を学んでいく上で、計算スキルは思考力と同様に重要であり、新しいことを学ぶときに既習事項の計算スキルは体得していることが望ましい。計算スキルは各個人が、繰り返し演習問題を解くことでしか得ることができないため、教員は演習問題を宿題として課すのであるが、中には問題集の答や友人の解いたものを写して提出する学生もおり、演習が十分になされていない状況はしばしば見られる。

数学の eラーニングシステムでは数式処理システム (以下 CAS) が用いられておりユーザごとに同じ問題を異なる数値で出題できる。たとえば、図 1 のような問題では、被積分関数の係 n 数やべきの数をユーザごとに異なる数値にできるのである。このシステムを用いれば各学生がそれぞれ問題を解く必要があり、各学生に確実に演習問題を解かせることができるのではないかと期待のもと導入することにした。



問題 1
未完了
最大評点 1.00

次の定積分を求めなさい。

$$\int_0^3 (3 - 4x + 4x^3) dx =$$

チェック

[図 1] 定積分の計算問題

まず、Mathemtical Association of America の提供する、Web work [2] を考えたが、個人で契約するには高価であることと、サービス提供の時期等がアメリカのセメスタに合わせてあるなどから、日本の学校で使うのは現実的でない。次に Moodle 上で動作する STACK [1] を調べたところ試用させてもらえることになった。本稿はその実践の報告である。

2 実施内容

2016年度の東京工業高等専門学校以下のクラスに対して、STACKの小テストを課題として課した。通年科目、後期科目は現在も実施中である。

- 微分積分学 I (第2学年, 前期) 極限の計算, 微分
- 微分積分学 II (第2学年, 後期) 微分の応用, 積分
- 線形代数学 I (第2学年) 平面, 空間のベクトル, 行列と連立一次方程式
- 線形代数学 II (第3学年) 行列式, 線形変換, 対角化
- 解析学 B (第3学年, 前期) 積分の応用, 面積, 体積, 曲線の長さ, 異常積分

1つの概念を学んだ段階で、小テストを課した。半期15回の中に5,6回であった。問題数は5問から15問程度で、30分から1時間程度で解ける分量である。定期試験の日を締め切りとし、時間制限なし、1問ごとに正解か不正解かをチェックできるアダプティブモードとし何回でも受け直し可能の設定にした。

3 準備

システムを利用して小テストを受けさせるためにはまず問題の準備が必要である。問題は Maxima (STACK 上で動作している CAS) [3] に準じたコードで記述されるが、これは一種のプログラミングであり、設計・コーディング・デバッグという一連の作業が必要である。定積分の計算をさせるなどの単純な計算問題(図1)の作成は容易であるが、思考過程を問うような問題(図2, 図3, 図4)は次のような内容の検討が必要となる。

- どのように誘導し、正解に導くか
- 思考過程の中で何を答えさせるか
- 誤解がないような問いになっているか
- 計算量が適当なパラメータになっているか

ここでは特に e ラーニングに特有な(4)について問題例を挙げながら触れる。

3.1 問題設計

3.1.1 例:放物線の接線

図3に示したのは、放物線の外点から引いた接線を求める問題である。

$y = ax^2 + bx + c$ の外側の点から引いた接線で、点 (p, q) を通るものを求めよ。

ここで、 a, b, c, p, q をパラメータとして設定するのであるが、その際、接点や求める直線の係数が整数になるようにしたい。さて、接点を $(t, at^2 + bt + c)$ とすると接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (at^2 + bt + c) &= (2at + b)(x - t) \\ y &= (2at + b)x - at^2 + c \end{aligned}$$

この接線が (p, q) を通ることから、

$$\begin{aligned} q &= (2at + b)p - at^2 + c \\ at^2 - 2apt + q - bp - c &= 0 \\ D/4 &= a^2p^2 - a(p - bp - c) = n^2 \\ q &= ap^2 + bp + c - n^2/a \end{aligned}$$

という計算から、整数の範囲で計算できるように問題を設定するには、 $a = 1, q = p^2 + bp + c - n^2$ とすれば良いことがわかる。実際は、 $1 \leq a \leq 3$ として出題し、正解には簡単な分数も含まれる程度とした。

問題 1

未完了

最大評点 1.00

曲線 $y = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1$ の接線で、点 $A : [-1 \quad -5]$ を通るものを求めたい。 小問 | 問題のテ...

接点が見つからないので、接点を $(t, \text{[入力欄]})$ と置くと

この接線は、傾きは [入力欄] と表される。

したがって接線の方程式は、

$y = \text{[入力欄]}$ となる。

この直線が点 P を通ることから t を求めると、

$t_1 = \text{[入力欄]}, t_2 = \text{[入力欄]}$ となる。

ただし $t_1 \leq t_2$ とする。

これより求める接線の方程式は、

$t = t_1$ の時 $y = \text{[入力欄]}$

$t = t_2$ の時 $y = \text{[入力欄]}$

[図 2] 接線を求める問題

3.1.2 例:関数の増減

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の増減表を完成し、極値を求めよ。

図3の問題は、3次関数の増減を調べて極値を求める問題である。この問題は、導関数の零点が整数になるように、整数で因数分解されている2次関数をMaximaで積分して作成している。通常増減表に書き入れる $\nearrow, +, -$ などを入力させる手段が見つからず、出題のような形式とした。

問題 1
未完了
最大評点 1.00

関数 $y=x^3 - 12 \cdot x^2 + 21 \cdot x + 1$ の増減表を完成し、極値を求めよ。 小問 | 問題のテストとデプロイ
但し、増減表の中の矢印、+- は、U: \nearrow , D: \searrow P:+ M:- より選び、その文字UDPMを入力せよ。

$\alpha =$, $\beta =$ とすると、

x	$x < \alpha$	α	$\alpha < x < \beta$	β	$\beta < x$
y'	<input type="text"/>				
y	<input type="text"/>				

表より、
 $x =$ で、極大値 $y =$
 $x =$ で、極小値 $y =$

[図3] 3次関数の増減

3.1.3 例:対称行列の対角化

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & p & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しよう。

固有値が整数になるように問題を作成した手順である。まず、 $p = \frac{a+b}{2}$ とすると A の固有方程式は

$$|A - \lambda E| = (p - \lambda) \{ \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - 2c^2 \}$$

となる。2次式の部分の判別式は

$$D = (a + b)^2 - 4(ab - 2c^2) = (a - b)^2 + 8c^2$$

となるので、 $a - b = \pm c$ とすれば、 $D = 9c^2$ となり、固有値は $a \pm c, a \pm \frac{c}{2}, a \mp c$ となる。固有ベクトルはそれぞれ、 $(1, \pm 2, 2), (-2, \mp 1, 1), (2, \mp 2, 1)$ である。以上より、 a はランダム、 c は偶数に、 $b = a \pm c$ とすれば、整数固有値を持つ実対称行列を得る。

問題 1

未完了

最大評点 1.00

小問 | 問題のテストとデプロ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

は対称行列なので、直交行列で T で対角化可能である。この直交行列を求めよう。

固有値を求めると、

$$\lambda_1 = \text{[入力欄]}$$

[図 4] 対称行列の対角化 (一部)

3.2 デバッグ

問題に記述上の文法の間違いや、正解が設定していないなどの間違いは STACK がチェックしてくれる。また問題の体裁の変更は容易であり数式は TEX で記述できるので数式の表示の自由度は高い。それ以外に学生の誤答に対する振る舞いを決めるポテンシャルレスポンスツリー (以下 PRT) を設定できるのが STACK の特徴であるが、この PRT の設定が正しいかのチェックが必要である。

1. 正解に対して正しく動作するか
2. 誤答に対して期待したコメントを出力するか
3. 合計得点と部分点は正しく設定されているか
4. コメントの内容は適切であるか。

正解を設定する欄とは別に、システムが PRT でも正解のチェックをしているため、問題の変更などを行った際には注意が必要となる。また、設定した部分点の合計が満点に達していないと、全部が正解でも「惜しい！部分的に正解です。」というコメントが出る仕様である。

4 学生アンケートの結果および考察

半期 15 回の授業で、各 5 6 回の STACK による小テストを実施し、前期が終わった段階で、学生にアンケートを実施した。ここではその一部を紹介する。括弧内の数字は、回答のパーセントを表す。

1. Web 小テストをきちんとやっていましたか？
 - 毎回きちんとやっていた。(45.7%)
 - 半分以上はきちんとやっていた(8.7%)
 - テスト前にまとめて全部やった(28.9%)

- テスト前に少しだけやった (11.6%)
 - テスト後に初めて手をつけた (5.2%)
 - 全くやっていない (0.0%)
2. 問題の難易度は適当でしたか？
- 難しい問題ばかりだった (17.3%)
 - たまに難しい問題があった (60.1%)
 - 適当である (19.1%)
 - たまに易しい問題があった (1.2%)
 - 易しすぎる問題ばかりだった (0.6%)
3. 数式の入力について
- 煩雑でよく分からない. (27.2%)
 - 最初はよく分からなかったが、少し分かってきた (43.4%)
 - 最初はよく分からなかったが、だいぶ分かってきた (24.9%)
 - 最初から問題なく入力できた (4.6%)
4. 入力方法がよく分からなかった、あるいは、よく間違えた数式を選んでください。(複数選択可)
- $\sqrt{2}$ など根号の入力 (22.2%)
 - $\sin x$ など、関数の入力 (12.8%)
 - $2x$ を $2 * x$ と入力するなど、掛け算を省略できないための * の入力 (22.0%)
 - $11 + x$ を $1/(x + 1)$ と入力するなど、分数の入力 (13.2%)
 - π, e, ∞ など特殊な数値の入力 (26.0%)
 - その他 (3.8%) 累乗の入力、 $\pi/3$ を 60° と表すことが出来ない、等
5. 前問 (6) で「その他」を選んだ人は、具体的にその内容を書いてください
6. Web 小テストで良いと思った点を選んでください (複数選択可)
- いつでも受験できる (45.1%)
 - どこでも受験できる (35.3%)
 - 繰り返し受験できる (48.6%)
 - すぐに採点される (50.9%)
 - 適切なコメントが得られた (2.3%)
 - 強制的に勉強させられた (23.7%)
 - その他 (6.9%) 複数回受験した際、毎回異なった問題を受けられた、等
7. 前問 (8) で「その他」を選んだ学生は、具体的な内容を書いてください。
8. Web 小テストの課題をどう思いますか？
- やめてもらいたい (35.8%)

- 続けても構わない (50.3%)
 - 続けてもらいたい (13.9%)
9. 「やめてもらいたい」と答えた学生へ、理由を選んでください。(複数選択可)
- ログインが、面倒臭い (17.3%)
 - 入力が面倒臭い (28.9%)
 - 出題ミスが多い (24.9%)
 - 「チェック」が出ないなどの不具合が多い (25.4%)
 - そもそも課題をやりたくない (5.8%)
 - その他 (4.0%) 常にネット環境が使える状態でないから。プリントの方がやりやすい。答えは出て、正解なのに、入力のところで間違えて、点引かれて萎える。等
10. 今後も Web 小テストを実施する場合、Web 小テストに対する要望を選んでください。(複数選択可)
- 数式の入力をやりやすくして欲しい (77.5%)
 - モバイル端末でも見やすい画面にして欲しい (32.9%)
 - 問題数を増やして欲しい (3.5%)
 - 問題数を減らして欲しい (34.7%)
 - 小テストの回数を増やして欲しい (2.9%)
 - 小テストの回数を減らして欲しい (20.2%)
 - その他 (14.5%) 解き方がよくわからない問題があったので不正解の時に具体的なヒントが欲しいです、このままで良い。等
11. Web 小テストについて、意見、感想などなんでも書いてください。
- できれば、問題を間違えたときなど、最終的に途中式等を見られるようにしてほしい
 - 問題の数字を乱数にすると計算力は高まるかもしれない。でも計算ミスした時が大変なのでなるべくきれいな数字にしてくれるとありがたいです
 - 大変そうだけど頑張ります
 - 多くの不平が飛び交ったが、結果としてレポート提出という形式よりは有意義であると感じた。前述のようにできるなら、続けて欲しい制度だ。
 - 問題が乱数で生成されているとのだと思うが、最終的な解が非常に複雑な問題が多々あったので、解は出来るだけ単純であってほしい。また、レビューで、使う公式と問題の計算式があれば、かなり理解が深まると思った。数学の問題の解き方を理解する為には web 小テストは悪くない方法だと思うので、この今回の問題点を改善して、継続して貰いたい。
 - 勉強した内容の復習ができるので助かります。
 - 問題ミスなどがなければ、いいシステムだと思う。

学生は筆者の想像より web サイトへのログインなどを煩わしいと感じているようで、導入当初は「めんどくさい」「紙で提出したい」などの不平も出たが、アンケートを行う頃には学生は概ねシステムを受け入れシステムのメリットを理解している。設問1からは、

半数以上の学生が日頃から前向きに取り組んだことがうかがえる。際立っているのは、設問 10 の入力 of 煩雑さに対する意見である。多数の学生が入力を煩雑だと感じており、これを楽しめるシステムの開発を望んでいる。画面が小さいスマートフォンでアクセスする学生からは思考過程を問う問題は見づらいという意見が見られた。また不備のある問題 (PRT の動作チェックが十分でない, コメントが適切でない, 計算量が多すぎるパラメータが設定されていた, など) を出題してしまい, それに対する苦情が多かった。しかしながら, 設問 6 「Web 小テストで良いと思った点」で, 「強制的に勉強させられた」を選んだ学生の多くは, 通常数学の学習をあまりやっていない学生であり, e ラーニングシステム導入時の期待どおりの結果が得られた。

5 今後の課題

計算力は, 繰り返し問題を解くことにより得られるものである。しかも数学の問題は紙と鉛筆で解くのが基本である。端末に入力するという作業が加わると思考が分断されるし, 思考を誘導する穴埋め問題は, 自由な発想ってしまう場合もある, など数学は e ラーニングに向かない面も多々ある。しかしながら, 定式化された問題にはスタンダードな思考順序が存在し, 穴埋め問題で思考を誘導することで, 学生にきちんとした手順を覚えさせ, 理解に導くことが可能である。学生の誤った「自己流」を正すことができる。また e ラーニングシステムを用いることで問題を解かせる強制力が強くなり, 個々の学生を問題に向かわせることができる。さらに教員は学生の取り組み状況を把握し管理することが容易である, などメリットが大きい。今回は一度に 4 科目に Web 小テストを導入したことから, 問題の準備に膨大な時間と労力を必要とした。各問題に十分なチェックがなされておらず, 不備のある問題を出題してしまったこともしばしばあった。今後継続していくために, 各問題のデバッグを行い, さらに問題を増やしていく必要がある。問題の蓄積は個人では限界があり協力して行っているサイト [4] もある。ここに掲載されている問題も今回実施した小テストに利用させてもらった。筆者が作成した問題もバグがないことを確認した上で投稿する予定である。さらに 3.1 の問題例に挙げたような, 問題作成のノウハウの蓄積と公開, 実施を継続しシステム導入による教育効果の調査と利用の拡大を目指していきたいと考えている。

参考文献

- [1] 中村泰之, 「数学 e ラーニング」, 東京電機大学出版局, 2010,
- [2] “Mathematical Association of America” <http://www.maa.org/>
- [3] 「Maxima 日本語ドキュメント」 <https://osdn.net/projects/maxima/>
- [4] Ja STACK.org <https://ja-stack.org/>