数理解析研究所講究録
第2022巻 2017年 170-176

三角形の内心と傍心の軌跡について
軌跡の方程式の導出法と軌跡の存在領域

龍谷大学・理工学部　大西　俊弘 (Toshihiro Onishi)
四ツ谷　晶二 (Shoji Yotsutani)
山岸　義和 (Yoshikazu Yamagishi)
Faculty of Science and Technology,
Ryukoku University

1　はじめに

△ABC の 2 つの頂点 A,B を固定して，もう 1 つの頂点 C を定直線上（または定円上）で動かす場合について考える. このとき，三角形の重心・外心・垂心の軌跡の方程式は，比較的簡単に求めることができる. しかし，内心と傍心の軌跡は複雑な曲線となり，その方程式を求めることも困難である.

ところが，動的幾何ソフト GeoGebra で作図を行い，軌跡を表示させているうちに，点 C が A,B を焦点とする楕円上を動く場合には，内心と 3 つの傍心の軌跡が楕円や直線となることに気付いた. 調べてみると，このこと自体は既に知られている結果であったが，そのことを発展させる中で，内心と傍心の存在領域について新しい知見が得られたのでその概要について報告する.

2　楕円上を動く場合の内心と傍心の軌跡

2 点 $A(-1,0)$,$B(1,0)$ を焦点とする楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$$

と表すことができる.（但し，a は定数で $a>1$）この楕円上に点 $C(p,q)$ をとり，△ABC の内心と 3 つの傍心をそれぞれ I, I_A, I_B, I_C とする.（図 1 参照）

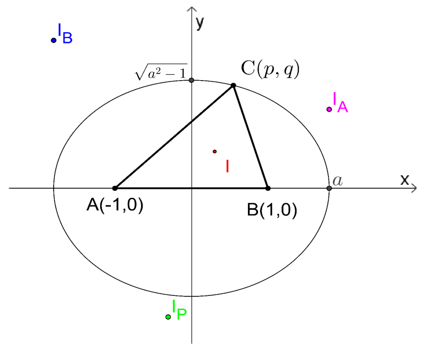

図 1: △ABC の内心 I と 3 つの傍心 I_A, I_B, I_C

GeoGebra で作図を行い，軌跡を表示させると次のようになった．（図 2 参照）
頂点 C が，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-1} = 1$ 上を動くとき，

- 内心 I は，楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{\dfrac{a-1}{a+1}} = 1$ 上を動く．
- 傍心 $\mathrm{I_C}$ は，楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{\dfrac{a+1}{a-1}} = 1$ 上を動く．
- 傍心 $\mathrm{I_A}$ は，直線 $x = a$ 上を動く．
- 傍心 $\mathrm{I_B}$ は，直線 $x = -a$ 上を動く．

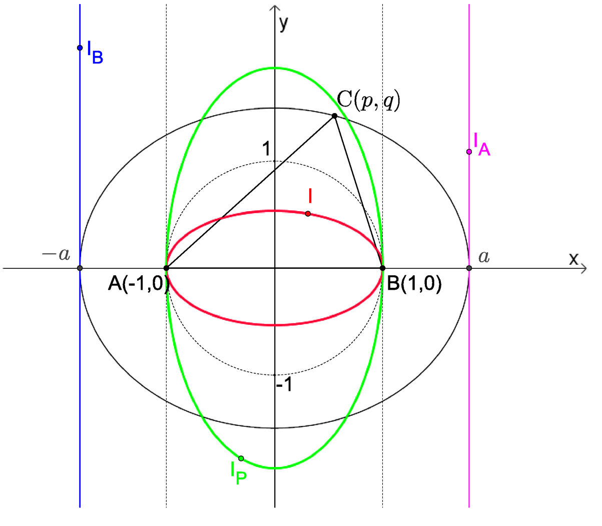

図 2: 内心 I と 3 つの傍心 $\mathrm{I_A}$，$\mathrm{I_B}$，$\mathrm{I_C}$ の軌跡

3　内心・傍心への座標変換

3.1　頂点から内心・傍心への座標変換

3 点 $\mathrm{A}(-1,0), \mathrm{B}(1,0), \mathrm{C}(p,q)$ があるとき，直線 AB の方程式は

$$y = 0$$

直線 BC の方程式は

$$qx - (p-1)y - q = 0$$

直線 CA の方程式は

$$qx - (p+1)y + q = 0$$

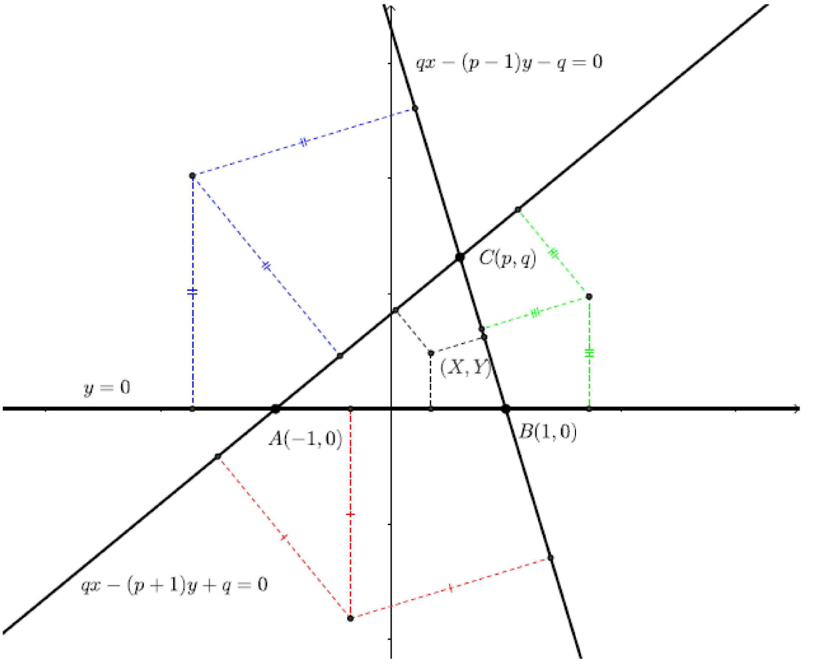

図 3: 3 つの頂点を通る直線から等距離にある点

点 (X, Y) が，3 直線 AB，BC，CA から等距離にあるとすると

$$\frac{|q\mathrm{X}-(p+1)\mathrm{Y}+q|}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}}=|\mathrm{Y}|$$

$$\frac{|q\mathrm{X}-(p-1)\mathrm{Y}-q|}{\sqrt{(p-1)^2+q^2}}=|\mathrm{Y}|$$

この 2 式を X, Y に関する連立方程式と考え，絶対値を外すことを考える．絶対値の外し方によって，正・負の符号の違いが生じ，4 種類の連立方程式が得られる．各連立方程式を解くことで，内心と 3 つの傍心の座標を求めることができる．

△ABC の内心を I， 3 つの傍心を $\mathrm{I_C}$ ， $\mathrm{I_A}$， $\mathrm{I_B}$ とする．

頂点 C(p,q) から，内心 I , 傍心 $\mathrm{I_C}$ ， $\mathrm{I_A}$， $\mathrm{I_B}$ への座標変換式は次のようになる．

点 C(p,q) → 内心 I(X, Y)

$$\mathrm{X}=\frac{2p}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

$$\mathrm{Y}=\frac{2q}{2+\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

点 C(p,q) → 傍心 $\mathrm{I_C}$(X, Y)

$$\mathrm{X} = \frac{-2p}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$
$$\mathrm{Y} = \frac{-2q}{-2+\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

点 C(p,q) → 傍心 $\mathrm{I_A}$(X, Y)

$$\mathrm{X} = \frac{2p}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}-\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$
$$\mathrm{Y} = \frac{2q}{2+\sqrt{(p+1)^2+q^2}-\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

点 C(p,q) → 傍心 $\mathrm{I_B}$(X, Y)

$$\mathrm{X} = \frac{2p}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}-\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$
$$\mathrm{Y} = \frac{2q}{2+\sqrt{(p+1)^2+q^2}-\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

3.2 内心・傍心から頂点への逆変換

上記の４つの変換式をそれぞれ p, q について解くと，次の４つの逆変換の式を求めることができる.（詳細な計算は省略）

内心 I(X, Y) → 頂点 C(p,q)

$$p = \frac{\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{X}$$
$$q = \frac{2(\mathrm{X}^2-1)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{Y}$$

傍心 $\mathrm{I_C}$(X, Y) → 頂点 C(p,q)

$$p = \frac{\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{X}$$
$$q = \frac{2(\mathrm{X}^2-1)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{Y}$$

傍心 $\mathrm{I_A}$(X, Y) → 頂点 C(p,q)

$$p = \frac{\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{X}$$
$$q = \frac{2(\mathrm{X}^2-1)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{Y}$$

傍心 $\mathrm{I_B(X,Y)} \rightarrow$ 頂点 $\mathrm{C}(p,q)$

$$p=\frac{\mathrm{X^2-Y^2-1}}{\mathrm{X^2+Y^2-1}}\mathrm{X}$$
$$q=\frac{2(\mathrm{X^2-1})}{\mathrm{X^2+Y^2-1}}\mathrm{Y}$$

不思議なことに，4つの逆変換はすべて同一の式で表され，次のようになる．

$$p=\frac{\mathrm{X^2-Y^2-1}}{\mathrm{X^2+Y^2-1}}\mathrm{X}$$
$$q=\frac{2(\mathrm{X^2-1})}{\mathrm{X^2+Y^2-1}}\mathrm{Y}$$

4 逆変換を利用した内心・傍心の軌跡の方程式の導出

A(-1,0),B(1,0) を焦点とする楕円の方程式は（但し，$a>1$）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$$

分母を払うと

$$(a^2-1)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-1)$$

点 $\mathrm{C}(p,q)$ がこの楕円上にあることより

$$(a^2-1)p^2+a^2q^2=a^2(a^2-1)$$

この式に，逆変換の関係式

$$p=\frac{\mathrm{X^2-Y^2-1}}{\mathrm{X^2+Y^2-1}}\mathrm{X}$$
$$q=\frac{2(\mathrm{X^2-1})}{\mathrm{X^2+Y^2-1}}\mathrm{Y}$$

を代入すると

$$(a^2-1)\left(\frac{\mathrm{X^2-Y^2-1}}{\mathrm{X^2+Y^2-1}}\mathrm{X}\right)^2+a^2\left(\frac{2(\mathrm{X^2-1})}{\mathrm{X^2+Y^2-1}}\mathrm{Y}\right)^2=a^2(a^2-1)$$

分母を払って整理し，因数分解すると

$$(\mathrm{X}+a)(\mathrm{X}-a)\left\{(a+1)\mathrm{X^2}+(a-1)\mathrm{Y^2}-(a+1)\right\}\left\{(a-1)\mathrm{X^2}+(a+1)\mathrm{Y^2}-(a-1)\right\}=0$$

これより

$$\mathrm{X}+a=0$$
$$\mathrm{X}-a=0$$
$$(a+1)\mathrm{X^2}+(a-1)\mathrm{Y^2}-(a+1)=0$$
$$(a-1)\mathrm{X^2}+(a+1)\mathrm{Y^2}-(a-1)=0$$

よって，軌跡の方程式は

$$x = -a$$

$$x = a$$

$$x^2 + \frac{y^2}{\frac{a-1}{a+1}} = 1$$

$$x^2 + \frac{y^2}{\frac{a+1}{a-1}} = 1$$

となり，内心 I と 3 つの傍心 $\mathrm{I_A}, \mathrm{I_B}, \mathrm{I_C}$ の軌跡を一括して求めることができる.

5　内心・傍心の存在範囲

$a > 1$ の範囲で a をどんどん大きくしていくと，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-1} = 1$ もどんどん大きくなっていく.

楕円は，座標平面全体を埋め尽くすので，点 C は座標平面全体を動くことができる.(厳密には，点 C は座標平面全体から線分 AB を除いた領域を動く.)（図 4 参照）

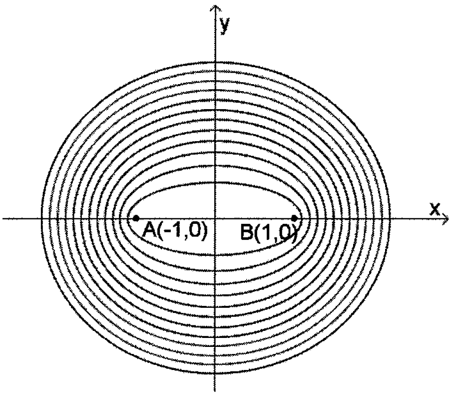

図 4: 楕円の変化の様子

$a > 1$ の範囲で a をどんどん大きくしていくと，内心 I と 3 つの傍心 $\mathrm{I_A}$，$\mathrm{I_B}$，$\mathrm{I_C}$ の軌跡は次のように動く.（図 5 参照）

- 内心 I は，単位円の内側の領域 $(x^2 + y^2 < 1)$ を動く.
- 傍心 $\mathrm{I_C}$ は，単位円の外側の領域 $(x^2 + y^2 < 1, -1 < x < 1)$ を動く.
- 傍心 $\mathrm{I_A}$ は，直線 $x = 1$ の右側の領域 $(x > 1)$ を動く.
- 傍心 $\mathrm{I_B}$ は，直線 $x = -1$ の左側の領域 $(x < -1)$ を動く.

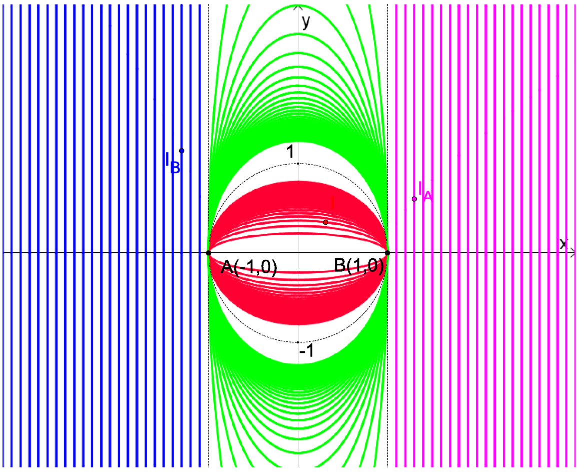

図 5: 内心 I と 3 つの傍心 $\mathrm{I_A}$，$\mathrm{I_B}$，$\mathrm{I_C}$ の軌跡の変化の様子

以上より，頂点 C が平面全体を動くとき，内心 I と 3 つの傍心 $\mathrm{I_A}$，$\mathrm{I_B}$，$\mathrm{I_C}$ で座標平面全体を埋め尽くすことになる．（厳密には，座標平面全体から単位円 $x^2+y^2<1$ と直線 $x=1$, 直線 $x=-1$ を除いた領域を埋め尽くすことになる.）（図 6 参照）

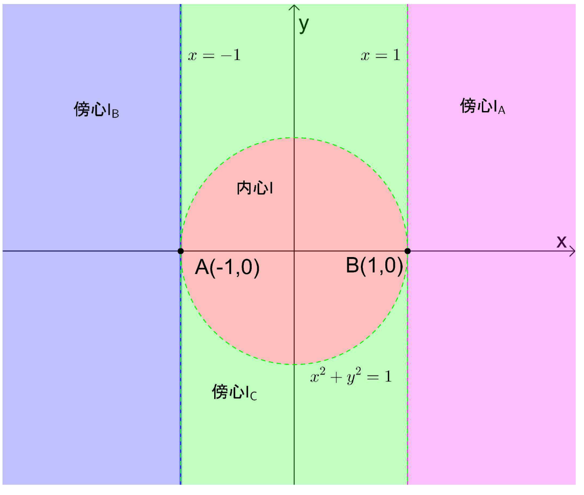

図 6: 内心 I と 3 つの傍心 $\mathrm{I_A}$，$\mathrm{I_B}$，$\mathrm{I_C}$ が存在する領域

6　おわりに

本研究は 2 年間にわたる試行錯誤の成果であり，その探究過程はとても楽しいものであった．内心と傍心の存在領域に関する数学的な証明も完了してるので，近日中に論文として投稿する予定である．詳細はそちらを参照されたい．