数理解析研究所講究録
第2027巻 2017年 85-92

最適の警邏に関する諸問題 *

河村彰星（東京大学）
Akitoshi Kawamura (University of Tokyo)

所与の領域を守備，監督，保守などするために，一人ないし複数の巡査がくまなく動きまわり，域内のあらゆる場所を十分な頻度で訪れるようにすることを**警邏** (patrolling) という [6, 8, 9, 14, 22]. 領域の形や巡査の能力といった状況設定に応じて様々なヒューリスティクスの分析などがなされてきたが，近年は最適解や近似率など理論的側面にも関心が向けられ，極めて基本的な状況においてさえ警邏が非自明な問題であることが判ってきた [13]. 本稿では複数の巡査による警邏のうち，領域といっても線分や円周など一次元的な形状を，点で表される巡査が動くという最も単純な場合について，筆者らの結果 [1, 18, 19, 24] を含めて現状を紹介する.

1 線分の警邏

Czyzowicz ら [9] は次の問題を考えた.

問題 1 k 人の巡査がおり，各巡査 $i=1, \cdots, k$ の速さの上界 v_i が与えられている．これを使って線分状の塀を警邏したい．すなわち塀の任意の点 x と任意の時刻 $t \in \mathbb{R}$ に対し，或る巡査が x を区間 $[t, t+1)$ 内の時刻に訪れるようにしたい．塀をどれだけ長くできるか.

図に描くなら，塀を水平に置き時間を縦軸にして全巡査の軌跡を表すとき，これに交らずに単位長の縦の線分を置く隙間ができないようにしたいわけである.

なおここでは各点を放置してよい時間を 1 として塀をなるべく長くする問題としたが，逆に塀の長さを一定として放置時間を短くしたいと言っても，適切に全体の動きを拡縮すればよいので同じことである．また，時刻を $\mathbb{R}$ ではなく片側にのみ無限な $[0, \infty)$ とする論文もあるが，問題 1 のように上界を問う上では違いがない [19].

* 本研究は旭硝子財団および科研費新学術領域研究「計算限界解明」24106002 の助成を受けて行われた.

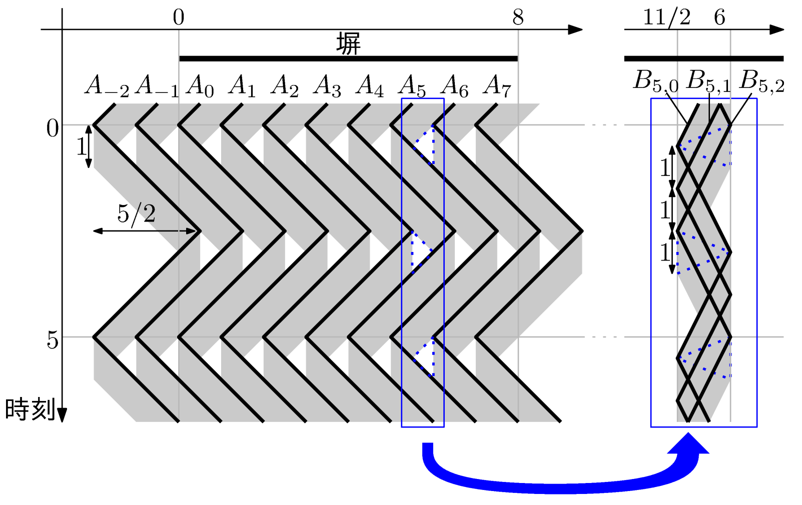

図 1　速さ 1 の 10 人の巡査 A_i（$-2 \le i \le 7$，左図）と速さ 1/5 の 24 人の巡査 $B_{i,j}$（$0 \le i \le 7$，$1 \le j \le 3$，右図は $i=5$ のみ）が周期 5 の動きで長さ 8 の線分を警邏している．実線が各巡査の経路であり，灰色は「過去 1 単位時間に巡査が訪れた場所」．同じ巡査らが按分戦略に従うと警邏できる線分の長さは 7.4 である．

問題 1 に対して最も素朴なのは次の戦略だろう．

按分戦略　塀を k 個の区間に分割して第 i 区間の長さを $v_i/2$ とし，これを第 i 巡査が往復する．これにより全長 $(v_1 + \cdots + v_k)/2$ の塀を警邏できる．

この 2 倍である $v_1 + \cdots + v_k$ を超える長さの塀が警邏できないことは，先述の図で各巡査が担当できる面積を考えると容易にわかる [9]．つまり按分戦略は 2 近似である．

Czyzowicz ら [9] は按分戦略が常に最適であると予想した．これは巡査が三人以内である場合には正しいが，一般には成立たないことが河村と小林 [18] により示された．即ち巡査の速さ v_1，…，v_k の組と，それらの巡査の動かし方であって，按分戦略よりも僅かに長い塀を警邏するものが見つかったのである（図 1——但しこの例は [19] から取った）．

按分戦略の近似率，つまり「按分戦略の c 倍以上の長さの塀は決して警邏できない」が成立つような最小の（巡査の人数によらない）定数 c を知りたい．上述のように $c \le 2$ はすぐわかり，Czyzowicz ら [9] は $c = 1$ と予想していたわけである．河村と小林の反例では $c \ge 42/41$ がわかり，この下界は 25/24 に [5, 12]，次いで 4/3 に [19] 高められた．河村と副島 [19] は $c = 4/3$ と予想しているが，今の所 $c < 2$ すら示されていない．

巡査の速さが皆同じ場合には，按分（といっても等分になるが）戦略が最適である [18]．この場合は代りに，線分のうち一部のみを警備すべき対象にするという一般化を考えよう．すなわち塀の部分集合 V が指定されており，問題 1 では塀上の「任意の点 x」に課していた訪問頻度の要求を「V に属する任意の点」に限った問題である（この場合は冒頭に述べたように塀を固定して放置時間の最小化を目標とすべきであろう）．Collins ら [8] は V が有限個の閉区間の合併である場合について，等分戦略を一般化した動きが最適であることを示し，それを求める方法を与えている．更に V が有限個の点からなる場合が [7] で扱われている．より特殊な状況であるから，同じ方法で最適な動きが求まる．しかしこの場合，V の点ごとに別々の放置時間上界（訪問すべき頻度）が指定されている問題も自然であろう．そのように拡張しても，もし各点を誰か一人の巡査が常に担当することを要求する（一点を複数の巡査の協力によって守ることを認めない）のならば，最適戦略が効率よく求まる [7]．この要求を設けないと，非自明な動きが最適となる場合があり [7, 24]，最適解が多項式時間で求まるか判っていない．

2 周の警邏

塀が平面上の領地の囲いである場合も考えよう．これも Czyzowicz ら [9] が提示した問題である．

問題 2 k 人の巡査がおり，各巡査 $i = 1, \cdots, k$ の速さの上界 v_i が与えられている．これを使って円周状の塀を警邏したい．すなわち塀上の各点 x と各時刻 $t \in \mathbb{R}$ に対し，或る巡査が x を区間 $[t, t+1)$ 内の時刻に訪れるようにしたい．但し巡査は左廻りにしか動けない．塀をどれだけ長くできるか．

線分警邏における按分戦略に相当するこの場合の単純な戦略として，Czyzowicz ら [9] は次のものを考え，巡査が四人以内であればこれが最適であることを示し，一般にも最適であろうと予想した．

等間隔戦略 一般性を失わず $v_1 \geq \cdots \geq v_k$ とする．最も速い r 人を等間隔に置いて一斉に速さ v_r で動かす（その他の巡査は使わない）ことで，長さ rv_r の円周を警邏できる．この r を最適に選ぶと長さ $\max rv_r$ の円周を警邏できる．

しかし Dumitrescu ら [12] は反例として，速さ 1，1/2，1/3，1/4，…の巡査（のうち初めの 32 人）が長さ 1 を超える円周を警邏する動き方を与えた．

とはいえこのような周長には（巡査の人数によらない）上限がある，即ち等間隔戦略は

定数近似であると Dumitrescu と Tóth [13] は予想している．河村と副島 [19] はこれを等価な予想に言換えた上で計算機での探索により近似率が 1.05 以上であることを示したが，予想そのものは未解決である．

なお Czyzowicz ら [9] は巡査が両方向に動けるとした問題も考え，実際に行きつ戻りつする動きにより長い円周を警邏できるようになる場合が存在することを示している．

前節の線分警邏と同様に，巡査の速さが皆同じである場合には簡単である．すなわち巡査が等間隔を保って周回するという単純な戦略が明らかに最適である．円周の一部のみを警備の対象とする一般化が Collins ら [8] によって（巡査が両方向に動ける設定で）扱われており，巡査の速さが皆同じである場合には，往復または周回による単純な戦略が最適であることが示されている．Coene ら [7] は，警邏の対象が有限個の点であるが，そのそれぞれが異なる放置時間上界をもつ場合を考え，前節と同様に，もし各点を誰か一人の巡査に担当させることを要求する場合には，最適な戦略を効率よく求めることができることを示している（そうでない場合にはやはり非自明な例がある）．

巡査の速さが様々である場合については，警邏の対象が有限個の点であっても未詳である（離散警邏問題 [13]）．更に極端な場合として，警備すべき対象が円周上の一点である場合を考えよう．但し巡査がこの点に留まることを許しては無意味なので常に正の速さで（一定の向きに）進むものとする．こうなると巡査の速さの上界とは要するに一度この点を訪れてから次に訪れるまでに最低でも置かねばならない時間間隔を定めていることになる．すなわち次の問題であり，これは次節で扱う．

> k 人の巡査がおり，各巡査 $i = 1, \cdots, k$ の訪問間隔の下界 $a_i > 0$ が与えられている．これを使って一点を警邏したい．すなわち各時刻 $t \in \mathbb{R}$ に対し，或る巡査が点を区間 $[t, t+1)$ 内の時刻に訪れるようにしたい．これは可能か．

塀を最長化するという問題 1，2 の言い方は意味をなさなくなるため判定問題としたが，放置時間上界を 1 に固定せずになるべく短くするという最適化問題を考えても良かったかもしれない．尤もこの最適化問題は，全巡査の訪問間隔を一定倍した入力について上記の判定問題を解くことを繰返す二分探索によって解けるから，この違いは些細である．

3 点の警邏

警備の対象が一点であり，この点を訪問できる時間間隔が各巡査について定まっている問題を考えよう．前節までの問題から図形的な側面を除いた単純な設定といえる．

問題 3　k 人の巡査がおり，各巡査 $i=1, \cdots, k$ の訪問間隔の下界 $a_i \in \mathbb{N}$ が与えられている．これを使って一点を警邏したい．すなわち各時刻 $t \in \mathbb{Z}$ に対し，或る巡査が点を時刻 t に訪れるようにしたい．これは可能か．

時刻を整数に限らなかった前節末の問題は，入力中の各数 a_i を整数に切り上げることによって問題 3 に帰着できるから，以下では問題 3 を考えよう．

この問題は訪問が周期的であることを要求していないが，もし所望の警邏が可能ならば周期的な警邏も可能である．なぜなら，各時刻において意味をもつのは各巡査 i が今後再び訪問できるようになるまでの時間という a_i 未満の非負整数であり，これがすべての巡査について等しいような二つの時刻を取れば，その両時刻の間の行動を繰返すことによってもなお要求が満されるからである．これにより警邏はもし可能であればその証拠を有限の長さで記述できる．但しその記述長を入力長の多項式以内にできるか，すなわち問題 3 が NP に属するかは判っていない．NP 困難であるかどうかも判っていない．

さて，もし $1/a_1 + \cdots + 1/a_k < 1$ ならば警邏は明らかに不可能である．逆は一般に成り立たない——例えば $k=3$，$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=5$——が，もし $a_1, \cdots, a_k$ が 2 の冪であれば成り立つ．すなわち非負整数 $b_1, \cdots, b_k$ が $2^{-b_1} + \cdots + 2^{-b_k} \geq 1$ を満すならば，訪問間隔下界 $2^{b_1}, \cdots, 2^{b_k}$ の巡査による点警邏が可能である [19]．これを使って一般の $a_1, \cdots, a_k$ についても，もし $1/a_1 + \cdots + 1/a_k \geq 2$ ならば，各巡査 i の訪問の間隔を a_i 以上の最小の 2 の冪にすることで警邏が可能である．前節末に述べた放置時間上界の最小化の形でいえば近似率 2 が達成されることになる．より強く，実はもし $1/a_1 + \cdots + 1/a_k \geq 1.546$ ならば点警邏が常に可能であることを河村と副島 [19] は計算機を用いて示し，この限界は更に下げられると予想している．

少し考えやすい変種として，各巡査の訪問の間隔を a_i 以上とするのではなく，a_i ちょうどであることを要求する問題を考える．つまり $a_1, \cdots, a_k$ が与えられたとき，$r_1, \cdots, r_k$ が存在して任意の整数が或る i と $n \in \mathbb{Z}$ を以て $a_i n + r_i$ の形に書けるかを問う問題である．これが NP 困難であると筆者は予想するが，証明は得られていない．なおこのような組 $(a_i, r_i)_i$ は被覆合同系（system of covering congruences）と呼ばれ，エルデシュによる 1930 年代の研究以来，整数論の関心の対象となってきた．例えば任意の N に対して $N \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ なる被覆合同系が存在するかは長らく未解決であったが最近になって否定的に解決された [17]．

問題 3 の「被覆」の代りに「詰込」を考えた次の問題も自然であろう．

問題 4　k 個の点があり，各点 $i=1, \cdots, k$ の放置時間の上界 $a_i \in \mathbb{N}$ が与えられている．一人の巡査がおり，各整数時刻に高々一点を訪問できる．どの点 i も a_i より長らく放置

せぬように訪問することは可能か.

第 1 節末のように警備対象である点が別々の放置時間上界をもつ問題を，各辺の長さが 1 である完全グラフと一人の巡査について考えているともいえる [24]. Holte ら [16] は放置時間上界が相異なる二つの値のみからなる場合を分析している.

問題 4 の一般化として，データスクラビングと呼ばれるハードウェア設計上の最適化を動機とする井上と金子 [23] の「区間グラフの最大長指定分割問題」ないし安藤ら [1] の「丸太と鋸の問題」がある. これは各点 i に対して更に警備せねばならない時間区間が与えられる（この区間内に長さ a_i を超える放置時間が無ければよいとする）問題である. この場合 a_i が皆同じであっても非自明である.

問題 4 についても，放置時間を a_i（以下でなく）ちょうどにすることを要求する問題を考えることができる. つまり a_1, …, a_k が与えられたとき，r_1, …, r_k を適当に選ぶことで，各整数が高々一組の i と $n \in \mathbb{Z}$ によってのみ $a_i n + r_i$ と書かれるようにできるかを問う問題である. この問題は（与えられた $(r_i)_i$ を容易に検証できるので）NP に属する. また NP 困難であることが [3, Theorem 13] や [19, Theorem 19] で示されている. またこれを用いると，放置時間が a_i ちょうどであることを要求しない問題 4 であっても，もし入力において「放置時間上界 a の点が○○個」を（○○個の羅列でなく）○○の対数長で書き表すことを許せば NP 困難であることがわかる [4, Theorem 2.1].

問題 3 と 4 はそれぞれ $1/a_1 + \cdots + 1/a_k$ が 1 以上，1 以下である入力を想定している (そうでない場合は明らかに不可能となる). ちょうど $1/a_1 + \cdots + 1/a_k = 1$ である入力に限れば問題 3 と 4 は一致する. 河村と副島 [19, Conjecture 18] はこの場合に限っても NP 困難であろうと予想している.

4 拡張など

以上は領域が線分や円周や一点であり，それを点で表される巡査が警邏するという極めて単純な場合であった. 様々な拡張や変種が考えられる.

領域の形状を一般のグラフにするならば，警備すべき対象を辺 [22] とすることも頂点 [15, 20] とすることも考えられる. 巡査が単なる点ではなく一定の視野を有する設定 [5, 11] や，警戒しつつ移動するときには単に移動するときよりも速さや向きが限られるとする設定 [10] も，現実的といえるだろう. また按分戦略のように単純な戦略であれば各巡査に局所的な知識や単純な処理能力しかなくても或る程度は実現できるが [20, 22]，より高度な動きをそのような分散状況で実現できるかという問も立てられる. 状況設定だけ

でなく目的についても，本稿で扱った塀の最長化（或いは放置時間上界の最短化）に限らず，「警備される場所をなるべく多くする」「巡査をなるべく少くする」などの変種が考えられる．例えば問題 4 に似た状況で何らかの利得を最大化や費用の最小化を目指す設定についての研究がある [2, 3, 21, 24].

参考文献

[1] E. Ando, A. Kawamura, M. Kiyomi, E. Miyano, and H. Ono. Logging with maximum length constraint. In *Proc. 19th Japan-Korea Joint Workshop on Algorithms and Computation* (WAAC 2016).

[2] S. Anily, C. A. Glass, and R. Hassin. The scheduling of maintenance service. *Discrete Applied Mathematics*, 82, 27–42, 1998.

[3] A. Bar-Noy, R. Bhatia, J. Naor, and B. Schieber. Minimizing service and operation costs of periodic scheduling. *Mathematics of Operations Research*, 27(3), 518–544, 2002. Preliminary version in *Proc. Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA 1998), pp. 11–20.

[4] A. Bar-Noy, R. E. Ladner, and T. Tamir. Windows scheduling as a restricted version of bin packing. *ACM Transactions on Algorithms*, 3(3), Article 28, 2007. Preliminary version in *Proc. Fifteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA 2004), pp. 224–233.

[5] K. Chen, A. Dumitrescu, and A. Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *Proc. 25th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG 2013).

[6] Y. Chevaleyre. Theoretical analysis of the multi-agent patrolling problem, In *Proc. IEEE/WIC/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology* (IAT 2004), pp. 302–308.

[7] S. Coene, F. C. R. Spieksma, and G. J. Woeginger. Charlemagne's challenge: The periodic latency problem. *Operations Research*, 59(3), 674–683, 2011.

[8] A. Collins, J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, E. Kranakis, D. Krizanc, R. Martin, and O. Morales Ponce. Optimal patrolling of fragmented boundaries, In *Proc. 25th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures* (SPAA 2013), pp. 241–250.

[9] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, and E. Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *Proc. 19th Annual European Symposium on Algorithms* (ESA 2011), LNCS 6942, pp. 701–712.

[10] J. Czyzowicz, K. Georgiou, E. Kranakis, F. MacQuarrie, and D. Pajak. Fence patrolling with two-speed robots. In *Proc. Fifth International Conference on Operations Research and Enterprise Systems* (ICORES 2016), pp. 229–241.

[11] J. Czyzowicz, E. Kranakis, D. Pajak, and N. Taleb. Patrolling by robots equipped with visibility. In *Proc. 21st International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity* (SIROCCO 2014), LNCS 8576, pp. 224–234.

[12] A. Dumitrescu, A. Ghosh, and C. D. Tóth. On fence patrolling by mobile agents.

Electronic Journal of Combinatorics, 21, P3.4, 2014.

[13] A. Dumitrescu and C. D. Tóth. Computational Geometry Column 59. *ACM SIGACT News*, 45(2), 2014.

[14] Y. Elmaliach, A. Shiloni, and G. A. Kaminka. A realistic model of frequency-based multi-robot polyline patrolling. In *Proc. Seventh International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems* (AAMAS 2008), pp. 63–70.

[15] B. Gorain and P. S. Mandal. Approximation algorithms for sweep coverage in wireless sensor networks. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 74, 2699–2707, 2014.

[16] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, and D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. *Theoretical Computer Science*, 100, 105–135, 1992. Preliminary version in *Proc. 14th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (MFCS 1989), LNCS 379, pp. 281–290.

[17] B. Hough. Solution of the minimum modulus problem for covering systems. *Annals of Mathematics*, 181(1), 361–382, 2015.

[18] A. Kawamura and Y. Kobayashi. Fence patrolling by mobile agents with distinct speeds. *Distributed Computing*, 28(2), 147–154, 2015. Preliminary version in *Proc. 23rd International Symposium on Algorithms and Computation* (ISAAC 2012), LNCS 7676, pp. 598–608.

[19] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *Proc. Ninth International Conference on Algorithms and Complexity* (CIAC 2015), LNCS 9079, pp. 261–273.

[20] F. Pasqualetti, A. Franchi, and F. Bullo. On optimal cooperative patrolling. In *Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control* (CDC 2010), pp. 7153–7158.

[21] J. Sgall, H. Shachnai, and T. Tamir. Periodic scheduling with obligatory vacations. *Theoretical Computer Science*, 410, 5112-5121, 2009. Preliminary version entitled "Fairness-free periodic scheduling with vacations" in *Proc. 13th Annual European Symposium on Algorithms* (ESA 2005), LNCS 3669, pp. 592–603.

[22] V. Yanovski, I. A. Wagner, and A. M. Bruckstein. A distributed ant algorithm for efficiently patrolling a network. *Algorithmica*, 37, 165–186, 2003.

[23] 井上恵介，金子峰雄．区間グラフの最大長指定分割問題について．情報処理学会第 158 回アルゴリズム研究会．研究報告 2016-AL-158(19)．平成 28 年.

[24] 河村彰星，能城秀彬．複数の巡査による指定地点の警邏について．情報処理学会第 159 回アルゴリズム研究会．研究報告 2016-AL-159(4)．平成 28 年.