

非カオスのストレンジアトラクターのマルチアフィン特性

大阪大学・情報科学研究科 高橋野以, 茶碗谷毅

Noi Takahashi, Tsuyoshi Chawanya

Graduate school of Information Science and Technology, Osaka University

概要

準周期駆動円写像に現れる非カオスのストレンジアトラクター (SNA) のマルチアフィン解析を行った。まず高さ-高さ相関関数 $c_q(\varepsilon)$ のスケーリング $c_q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\eta(q)}$ から定義される $\eta(q)$ が q に関して相転移的な振る舞いを示すことをみる。さらに、 $\eta(1)$ がグラフの分解能 ε での長さ L_ε から求まるフラクタル次元 D_l と対応することを指摘し、 D_l の特異な振る舞いについて議論する。最後に SNA と大自由度力学系における弱い乱流との類似性を調べ、今回の結果の普遍性について議論する。

1 背景

非自励系の1つである準周期駆動力学系には非カオスのストレンジアトラクター (Strange nonchaotic attractor、以下 SNA) という、最大リャプノフ指数が非正の奇妙なアトラクターが現れる。準周期外力系では SNA はルベーク測度正のパラメータ領域で現れ、これまでに分岐のパターンや軌道の性質など多くのことが調べられている [1],[2],[3]。SNA の軌道には劣指数的鋭敏性があり [4]、弱いカオス系に特徴的な非定常な振る舞いが見られる。例えばマルチフラクタル特性 [5],[6]、異常拡散 [7]、[8] といった性質が報告されている。SNA は弱いカオス系のシンプルモデルと考えられ、その非定常性を特徴付けることは弱いカオス系の理解のために重要な課題である。

近年、マルチアフィン特性というマルチフラクタル特性を自己アフィン集合へと拡張した量が提案された [9]。この量は、非一様なフラクタル構造を特徴づけるもので、これまで乱流における速度差分布 [10]、成長界面 [11]、拍動間隔の時系列 [12]、為替レート変動の時系列 [13]、大自由度力学系に現れる乱流的なパターン [14],[15],[16] など、理論的及び実験的に調べられてきている。特に [14],[15] では q 次スケーリング指数が q について相転移的な振る舞いが見られることが報告され、さらにその振る舞いが系の間欠的な不安定性によるという議論がされている。これらの結果から、同様な間欠的不安定性を持つ SNA においても、類似の非自明なマルチアフィン特性が期待できると考え、本研究では SNA のマルチアフィン解析を行った。

マルチアフィン特性は、以下の q 次高さ-高さ相関関数を用いて特徴付けされる。[0,1] 区間上の一価関数 $F(x)$ で与えられるグラフを考える。このとき、二点の高さの差 $y(x) \equiv |F(x + \varepsilon(\text{mod}1)) - F(x)|$ とすると、 q 次高さ-高さ相関関数 $c_q(\varepsilon)$ は

$$c_q(\varepsilon) = \langle y^q \rangle \tag{1}$$

で定義される。 $\langle \rangle$ は一様な x についての平均を意味する。 q は y が大きい部分をどの程度強調するかをコントロールするパラメータである。ヘルダー連続な自己アフィングラフで、ヘルダー指数が一様に h となる場合には、 $c_q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{qh}$ となり、べき指数が q に対して線形に増大する。一方で c_q が線形関数でない $\eta(q)$ に対して

$$c_q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\eta(q)} \tag{2}$$

となる時、そのグラフをマルチアフィンであると定義する。 $\eta(q)$ は非一様なフラクタル特性を反映する指標となる。

今回、我々は準周期駆動円写像に現れる SNA のマルチアフィン特性について数値的に詳しく調べ、SNA の幾何学的構造について議論する。まず SNA はマルチアフィンとなることを示し、 $\eta(q)$ が微分不可能点を持つ相転移的振る舞いを表すことをみる。また $c_1(\varepsilon)$ は、アトラクターを θ 方向を分解能 ε で分割して測った長さ L_ε [17] と対応があることを指摘し、 L_ε 及び L_ε から求まるフラクタル次元 D_f の特異な振る舞いについて議論する。最後に、SNA の y の振る舞いの先行研究 [14],[15],[16] との類似性をみることで、今回の結果の普遍性について議論する。

以下、第 2 章では本モデルの準周期駆動円写像について説明する。第 3 章ではマルチアフィン解析の結果の説明及び議論を行う。最後に 4 章で結論について述べる。

2 モデル

今回我々が扱うのは以下の準周期駆動円写像である [2],[8],[7].

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \theta_n) = x_n + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + e \sin(2\pi \theta_n) \pmod{1} \\ \theta_{n+1} = g(\theta_n) = \theta_n + \omega \pmod{1}. \end{cases} \quad (3)$$

ここでは $e = 2.5$, $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ と固定し、 a を変化させたとき現れる SNA について調べる。この系ではリャプノフ指数は 2 つある。1 つは準周期回転に付随する 0 のリャプノフ指数であり、もう 1 つは x の θ に対する条件付きリャプノフ指数 λ である。 λ は、 θ_0 を固定して x_0 に摂動を加えたときの軌道の振る舞いの指標で、ルベーク測度の意味で典型的な軌道に対し

$$\lambda \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{n-1}, \theta_{n-1}} \quad (4)$$

と定義される。 $\lambda < 0$ のとき x_0 が異なり θ_0 が同一のほとんど全ての軌道が同じ軌道に収束する。さらに今回調べるパラメータ領域では、 $\lambda < 0$ のとき、アトラクターはほとんど全ての θ に対して一価関数 $x = g(\theta)$ と表せる。このモデルでは、SNA は「 λ が 0 以下でストレンジ性を持つアトラクター」と言える。本研究ではストレンジ性の判定は、グラフの微係数が発散することを [4] による方法で数値的に調べることで行った。

以下で分岐について調べる。まず準周期駆動円写像は $a \leq 1$ では可逆であり、 $a > 1$ では写像に折りたたみ構造が発生し非可逆になる。 a が十分小さいとき、相空間には滑らかなアトラクターとリペラーが存在する。 a を変えていくと、写像が可逆な領域でアトラクターがリペラーと衝突し (non-smooth saddle node bifurcation)、SNA が発生する ($a_s = 0.850\dots$) [7]。SNA が発生すると、任意の m に対し軌道の局所リャプノフ指数 $\frac{1}{m} \ln \left(\frac{\partial x_{n+m}}{\partial x_n} \right) (\equiv \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{n+m} \ln \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{k-1}, \theta_{k-1}})$ が正になる n が存在する (すなわち局所リャプノフ指数のレート関数が正の部分に台を持つ) ようになり、系は間欠的な不安定性をもつことになる。さらに a を上げていくと、非可逆領域で SNA からカオスアトラクターへの分岐が見られる ($a_c = 1.828\dots$) [8]。図 1 に λ のパラメータ依存性及び分岐点を示す。また図 2 に滑らかなトーラス、SNA、カオスアトラクターを示す。

3 結果と議論

以下では SNA のグラフ $x = g(\theta)$ のマルチアフィン特性を調べる。 $c_q(\varepsilon)$ は一様な θ から得られる y の分布 $P(y)$ を用いて $c_q(\varepsilon) \equiv \int y^q P(y) dy$ と求められる。従って、以下ではまず $P(y)$ を数値的に求める。図 (3)(a) に示した $P(y)$ は、 $y \sim \varepsilon$ ではほぼ定数となっているが、 y が十分大きい領域ではべき減衰をしている。また $y = 1$ で $P(y)$ が急激な上昇をしており、 δ ピークを持つことがわかる。これは x 方向で mod をとったことに由来していると考えられる。mod を取ったことにより、 x 軸のトーラス上では $g(\theta + \varepsilon)$ 、 $g(\theta)$ が近い場合で

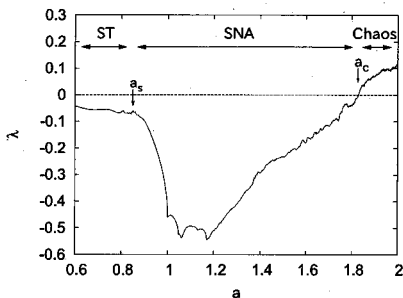


図1 準周期駆動円写像の条件付きリャプノフ指数入のパラメータ a 依存性と分岐点 ($e = 2.5, \omega = (\sqrt{5} - 1)/2$).

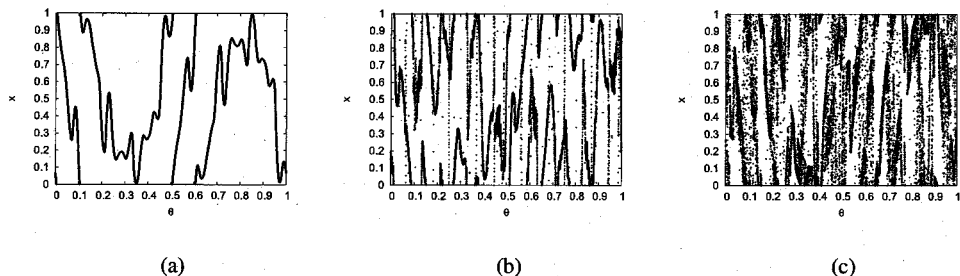


図2 準周期駆動円写像の3つのアトラクター: (a) 滑らかなトーラス ($a = 0.6$), (b) SNA ($a = 1.5$), (c) カオスアトラクター ($a = 2$).

も、二点が $x = 1$ (あるいは 0) をまたぐ場合、 $y \simeq 1$ となってしまう。以上を踏まえると、

$$P(y) \simeq \begin{cases} C\varepsilon^{-(1+\beta)} & (y < \varepsilon) \\ Cy^{-(1+\beta)} + C_2\delta(y-1) & (\varepsilon \leq y \leq 1) \\ 0 & (y > 1). \end{cases} \quad (5)$$

と表せる。但し C, C_2 は定数である。

C_2 は以下のように見積もることができる。まず x 軸のトーラス上での $g(\theta + \varepsilon)$ と $g(\theta)$ の最短距離を y' とする。二点が $x = 1$ ($x = 0$) をまたぐ確率は $g(\theta)$ をランダムにとったとき、 y' に比例すると考えられる。 C_2 は二点のまたぎが起こる確率と見積もられるので、 y' の分布 $P'(y')$ を $P(y)$ と同様に定義すると、 $C_2 \simeq \int P'(y') dy'$ が得られる。 $P(y')$ は式 (5) において δ ピークがない場合で近似できるので、結局

$$C_2 \sim \begin{cases} \varepsilon \ln(\varepsilon) & (\beta = 1) \\ \varepsilon^\beta & (\beta < 1) \end{cases} \quad (6)$$

を得る。図 (3)(b) に $P(y)$ のべき指数 β のパラメータ a 依存性を示す。可逆領域では、 $\beta \simeq 1$ となる。また、非可逆領域では $0 < \beta < 1$ となり、カオス領域に近づくとき 0 に近づいていく。

式 (5)、(6) から $c_q(\varepsilon)$ は見積もることができる。 $1 > \beta > 0$ となる非可逆領域のとき、

$$c_q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{n(q)}. \quad (7)$$

$\beta = 1$ となる可逆領域では、

$$c_q(\varepsilon) \sim \begin{cases} \varepsilon^{n(q)} & (q < 1) \\ \varepsilon^{n(q)} \ln(\varepsilon) & (q \geq 1), \end{cases} \quad (8)$$

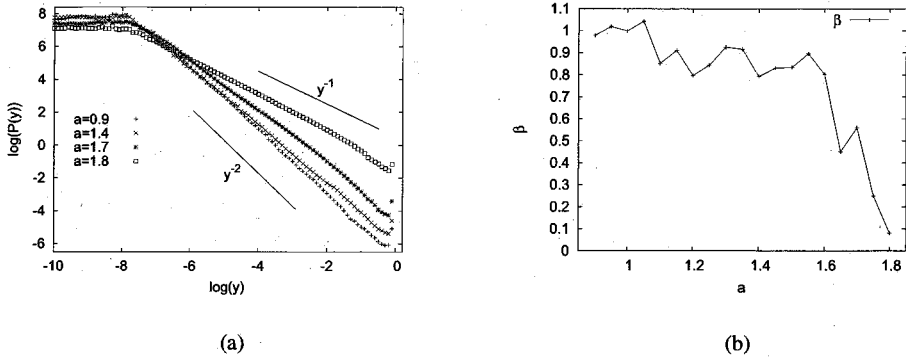


図3 (a)SNAの各パラメータ a における y の分布 $P(y)$ 。パラメータは下から順に $a = 0.9, 1.4, 1.7, 1.8$ 。ここで $\varepsilon = 10^{-9}$ とした。(b) 各パラメータ a における β 。カオス転移点 ($a \simeq 1.828$) に近づくと β は 0 に近づく。

となる。但し、

$$\eta(q) \sim \begin{cases} q & (q < \beta) \\ \beta & (q > \beta) \end{cases} \quad (9)$$

を満たす。

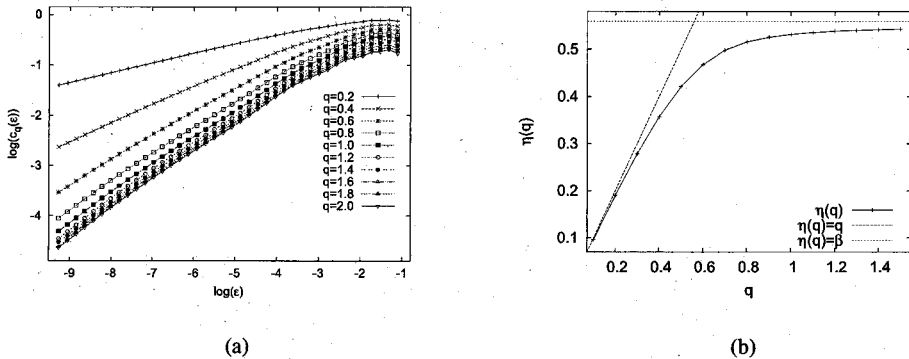


図4 (a) $a = 1.7$ のときの $c_q(\varepsilon)$ のスケーリング。 $q > 0.6$ ではスケール指数が一定に収束していることがわかる。(b) $a = 1.7$ (非可逆領域) のときの $\eta(q)$ の振る舞いで、 $\beta \simeq 0.5588$ 。式 (9) と矛盾しない結果となっている。

可逆領域と非可逆領域における $c_q(\varepsilon)$ と $\eta(q)$ の数値計算結果をそれぞれ図 (4)、図 (5) に図示した。これらの結果は式 (7)、(8)、(9) と矛盾しないものとなっている。 $\eta(q)$ は $q = \beta$ で微分不可能となっており、相転移的振る舞いを示している。また式 (8) からわかるように可逆領域では、 q 次高さ-高さ相関関数は ε に対して対数補正を持つことがわかり、特異的な振る舞いが現れている。

以下では、上の結果が示すフラクタル特性についてさらに議論する。 $c_1(\varepsilon)/\varepsilon$ は、 θ 方向にスケール ε で分割して測ったグラフの長さ L_ε

$$L_\varepsilon \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\{g((k+1)\varepsilon) - g(k\varepsilon)\}^2 + \varepsilon^2}. \quad (10)$$

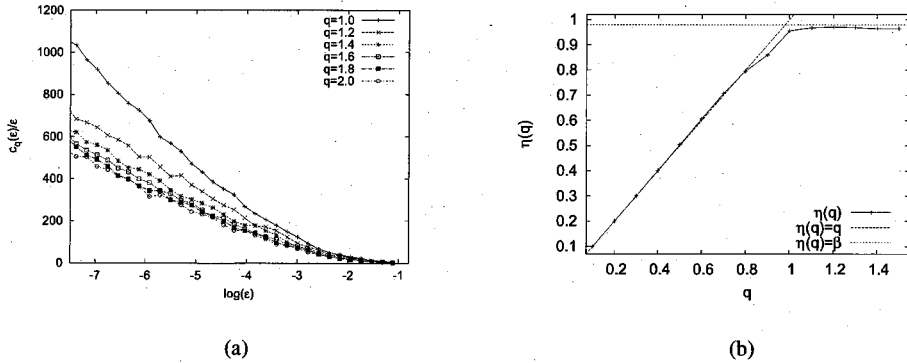


図5 (a) $a=0.9$ (可逆領域)での $c_q(\varepsilon)/\varepsilon$ のスケールリング。これから $q \geq 1$ に対して $c_q(\varepsilon) \simeq \varepsilon \ln(\varepsilon)$ (式 (8)) となることが示される。(b) $a = 0.9$ のときの $\eta(q)$ の振る舞い ($\beta \simeq 0.9792$)。式 (9) と矛盾しない結果となっている。

に近似的に対応している。 L_ε が

$$L_\varepsilon \sim \varepsilon^d \quad (11)$$

と発散するとき、SNA の L_ε によるフラクタル次元は $D_l \equiv 1 + d$ と考えられる。これまで SNA において $1 < D_l < 2$ となることが報告されている [17]、[18]。本モデルでも式 (11) は成り立ち、特に $d = \eta(1) = \beta$ ということがわかる。すなわち、 β は D_l とも対応することがわかる。

SNA の重要な性質として D_l は代表的なフラクタル次元である容量次元 D_0 及び情報次元 D_1 とは異なる特性を示す。これまで SNA の D_0 に対する理論的な研究では、 $D_0 = 2$ 、 $D_1 = 1$ と示されており [5]、[6]、本モデルで数値的に調べた結果からも [6] と矛盾のない結果が示唆されている。従って $D_l (= 1 + \beta)$ は D_0 、 D_1 とは異なると考えられ、SNA のグラフの複雑さの新たな特徴付けとして捉えることができる。さらに、式 (8)、(9) から、可逆領域では $L_\varepsilon \sim \ln(\varepsilon)$ が成り立ち、これは非常に弱いフラクタル性とも言える性質である。このような幾何学特性が可逆領域では典型的に現れることは、他の系では報告されておらず、SNA のグラフの強い空間的間欠性を示唆するものと考えられる。

最後に $P(y)$ と $\eta(q)$ の振る舞いの普遍性について議論する。まず $P(y)$ の振る舞いについて議論するために、 y の挙動について考える。そのために $z(\theta) \equiv x(\theta + \varepsilon) - x(\theta)$ (すなわち $y(\theta) = |z(\theta)|$ となる) の満たす方程式を考える。 θ_0 が ε だけ異なる 2 つの x の軌道の差をとると、式 (3) から

$$z(\theta_{n+1}) = \frac{\partial f(x_n, \theta_n)}{\partial x_n} z(\theta_n) + \Delta f_{\theta_n} + O(z(\theta_n)^2) \quad (12)$$

となる。ここで $\Delta f_{\theta_n} \equiv f(x_n, \theta_n + \varepsilon) - f(x_n, \theta_n) (= O(\varepsilon))$ 。 $z(\theta_n)$ を z_n で表すことにすると、式 (12) は z_n の時間発展とみなすことができる。黄金比 ω による無理数回転は $[0, 1]$ 上のトーラスを一樣に経巡ることから、 $P(y)$ は $|z_n|$ から得られる定常分布で与えられる。以下では、式 (12) の $o(z_n^2)$ が無視できる程度に z_n が小さいときを考える。今、条件付きリャプノフ指数が負であることから、平均的な振る舞いとしては z_n は指数的に減衰し、式 (12) は第二項が支配的になる。しかし、SNA の時系列は局所リャプノフ指数が正となるような時間領域が存在するので、その領域では z が指数的増加を示し、式 (12) は第一項が支配的になるようになる。

z_n の振る舞いは、カオス振動子の非局所結合系における弱い乱流状態の二点の振幅の差 y の振る舞いと類似している [14]。Kuramoto らは $P(y)$ の解析のため、系のマルコフ性から y の時間発展を

$$y_{n+1} = ay_n + b, \quad (13)$$

と加法的ノイズ付き乗法確率過程とみなして解析している [15]。但し、 a, b は確率変数で a はガウス分布に従い、 b は ε のオーダーの値を取る。この条件の下では、 y が十分大きい領域ではウィーナーホップの積分方程式から $P(y)$ がべき分布に従うことが言えて、さらにべき指数は a の分布から求まる [19]。同様な $P(y)$ の分布は空間変調されたランダム外力のある大自由度非線形振動子系 [15] や大域結合系にノイズを加えた系 [16] でも見られ、普遍性が高い振る舞いと考えられている。

一方で、SNA には強い時間相関があるため、 $P(y)$ のべき指数 β は理論的に得られる値と数値的に得られる値にずれが生じてしまい、上記のマルコフ過程の近似は有効ではない。従って z_n を何らかのランダム過程で近似することは可能か、また可能だとしたらどのようなランダム過程か、といった問題が課題として残る。しかしここでの議論から、少なくとも SNA で見られた $P(y)$ 及び $\eta(q)$ の相転移的振る舞いは、間欠的な不安定性を持つ大自由度系で見られるものと定性的には類似していると言える。そして本モデルが少数自由度であることを踏まえると、今回の $P(y)$ と $\eta(q)$ の振る舞いはより多くの弱いカオス系で現れることが示唆される。

4 結論

本研究では SNA のマルチアフィン特性が調べられた。その結果アトラクターの二点の高さの差の分布 $P(y)$ がべき減衰を示すことが数値的にわかり、マルチアフィン特性の指標となる $\eta(q)$ が $q = \beta$ で相転移的な振る舞いを見ることが見られた。また L_ε から求まるフラクタル次元 $D_l = 1 + \beta$ は、 D_0, D_1 とは異なる SNA のグラフの複雑さの特徴付けとなることをみて、さらに $\beta \simeq 1$ となる可逆領域では $L_\varepsilon \sim \ln(\varepsilon)$ という特異なフラクタル特性が現れることがわかった。

上の結果から β はグラフの性質を特徴づける指数となると考えられる。現在 β と異常拡散の指数やべき的な初期値鋭敏性の指数との関係も調べており、 β は SNA の非正常性の解析の足掛りとなることが期待される。

最後に、大自由度系で現れる弱い乱流と比較することで、今回得られた $P(y)$ 及び $\eta(q)$ の性質が少数自由度系を含む、より広いクラスの弱いカオス系で見られることが示唆された。

参考文献

- [1] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, and J.A. Yorke, *et al*, "Strange attractors that are not chaotic", *Physica D.*, Vol. 13, p. 261, 1984.
- [2] M. Ding, C. Grebogi, and E. Ott, *et al*, "Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems", *Phys.Rev.A.*, Vol. 39, p. 2593, 1989.
- [3] J.F.Heagy and S.M. Hammel, *et al*, "The birth of strange nonchaotic attractors", *Physica D*, Vol. 70, p. 140, 1994.
- [4] A.S. Pikovsky and U. Feudel, "Characterizing strange nonchaotic attractors", *Chaos*, Vol. 5, p. 253, 1995.
- [5] M. Ding, C. Grebogi, and E. Ott, "Dimensions of strange nonchaotic attractors", *Phys.Lett.A.*, Vol. 137, p. 167, 1989.
- [6] B. Hunt and E. Ott, "Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors", *Phys.Rev.Lett.*, Vol. 87, p. 254101, 2001.
- [7] U.Feudel, J. Kurths, and A.S. Pikovsky, "Strange non-chaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map", *Physica D*, Vol. 88, p. 176, 1995.
- [8] T.Mitsui, "Subdiffusion due to strange nonchaotic dynamics:A numerical study", *Phys.Rev.E.*, Vol. 83, p. 066212, 2011.
- [9] A.L. Barabasi and T. Vicsek, "Multifractality of self-affine fractals", *Phys.Rev.A.*, Vol.44, p. 2730, 1991.

- [10] T. Vicsek and A.L. Barabasi, "Multi-affine model for the velocity distribution in fully turbulent flows", *J.Phys.A:Math.Gen.*, Vol.24, p.845, 1991.
- [11] J.Krug, "Turbulent interfaces", *Phys.Rev.L.*, Vol.72, p. 2907, 1994.
- [12] P.C. Ivanov, L.A.N. Amaral, A.L. Goldberger, S. Havlin, M.G. Rosenblum, Z.R. Struzik, and H.E. Stanley, "Multifractality in human heartbeat dynamics", *Nature*, Vol.399, p.461, 1999.
- [13] N. Vandewalle and M. Ausloos, "Multi-affine analysis of typical currency exchange rates", *Eur.Phys.J.B.*, Vol.4, p.257, 1998.
- [14] Y. Kuramoto and H. Nakao, "Origin of power-law spatial correlations in distributed oscillators and maps with nonlocal coupling", *Phys.Rev.L.*, Vol.76, p. 4352, 1996.
- [15] Y. Kuramoto and H. Nakao, "Scaling properties in large assemblies of simple dynamical units driven by long-wave random forcing", *Phys.Rev.L.*, Vol.78, p.4039, 1997.
- [16] J. Teramae and Y. Kuramoto, "Strong desynchronizing effects of weak noise in globally coupled systems", *Phys.Rev.E.*, Vol.63, p.036210, 2001.
- [17] K. Kaneko, "Fractalization of Torus", *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 71, p. 1112, 1984.
- [18] T. Nishikawa and K. Kaneko, "Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor", *Phys.Rev.E.*, Vol.54, p. 6114, 1996.
- [19] D. Sornette and R. Cont, "Convergent multiplicative processes repelled from zero: power laws and truncated power laws", *J.Phys.I France*, Vol.7, p. 431, 1997.