

# 高次元イジング模型における「1-arm 指数」の上限評価

北海道大学 大学院  
理学院 数学専攻

半田 悟 (Satoshi HANDA)

Graduate School of Science, Hokkaido University  
(Markus Heydenreich 氏, 坂井 哲 氏との共同研究)

## 1 背景

私たちの身の回りには、温度  $T$  の変化に応じて、水が固相・液相・気相へと姿を変えたり、磁石が磁性を失ったりする現象が起こっている。温度のようなマクロなパラメータに応じて、系の性質が大きく変わる現象は、一般に「相転移現象」と呼ばれる。その変化の境目となる点（温度）を「臨界点（温度） $T_c$ 」と呼ぶ。この臨界点の近傍・直上では、様々な物理量が暴的に振る舞うという特異的な現象が見られる。これを「臨界現象」と呼び、その冪指数のことを「臨界指数」と呼ぶ。臨界点は考えている系に依存してその値は異なるが、臨界指数は系の次元と対称性のみ依存した普遍的な値であると信じられている。この値を決定することが、相転移・臨界現象の研究の重要な目的のひとつである。

強磁性相転移現象を記述する統計力学模型として「イジング模型」というものが知られている。イジング模型の臨界指数についての研究は数多くあり、たくさんの結果がこれまでに得られているが、未解決の問題も多い。2016年12月に行われた確率論シンポジウムでの講演では、そのひとつである「1-arm 指数  $\rho$ 」と呼ばれる臨界指数についての結果 [3] を述べた。

1-arm 指数は、以前にパーコレーションという統計力学模型において研究された。パーコレーションとは、格子点間のボンドが独立に、確率  $p$  で開いている、 $1-p$  で閉じているという状態をとるとした確率幾何学的な模型である。パラメータ  $p$  を変化させたとき、無限遠点につながっている確率が0から正に立ち上がるか否かの相転移が見られる。パーコレーションにおける1-arm 指数とは、臨界点直上において、原点から半径  $r$  の球の球面に繋がる確率が、 $r$  を大きくしていったときに  $r$  の冪関数としてどれくらいの速さで減衰するかを表す冪指数  $\rho$  として定義される。[6] では「二次モーメント評価」を用いることにより、高次元において  $\rho \leq 2$  であることが証明された。その後、[5] で  $\rho = 2$  であることが完全に決定された。

イジング模型における1-arm 指数も対応する物理量によって定義される。臨界点直上において、プラス境界条件の半径  $r$  の球上の原点におけるスピンの期待値が、 $r$  を大きくしていったときに  $r$  の冪関数としてどれくらいの速さで減衰するかを表す冪指数  $\rho$  として定義される。パーコレーションと同様に二次モーメント評価を用い、上限評価を得ることが目的である。[9] では、 $\sqrt{\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle} \leq \langle \sigma_0 \rangle_{|x|/3}^+$  が成り立つことが示されており、これにより  $d > 4$  では  $\rho \leq (d-2)/2$  というハイパースケーリング不等式が得られている。ここから  $d > 4$  では  $\rho \leq 1$  ということが示唆されるのだが、今回は厳密に  $\rho \leq 1$  という平均場上限評価を証明することができたので、上記の確率論シンポジウムではこれを紹介した。講演は、Markus Heydenreich 氏、坂井 哲 氏との共同研究の結果 [3] に基づいたものであった。

## 2 高次元パーコレーションの 1-arm 指数の上限評価

[6]において、高次元パーコレーションにおける 1-arm 指数の上限評価をとともシンプルな方法で得る事に成功している。またイジング模型においてもこの方法をベースにしているので、その概略をここで紹介したい。ただし、各パラメーターや記号の詳細な定義は次の節を見て欲しい。ここでいうパーコレーションとは、以下のボンドパーコレーションとして定義する。各ボンド  $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d$  が独立に、確率  $pJ_{x,y}$  で開いている、確率  $1 - pJ_{x,y}$  で閉じているとする（前節のパラメーター  $p$  を規格化して定義し直していることに注意）。原点から半径  $r$  の球面に繋がる（開いた道が少なくともひとつ存在する）確率を  $\theta_r(p) = \mathbb{P}_p(o \leftrightarrow \partial V_r)$  と書く事にする。このとき、パーコレーションの 1-arm 指数  $\rho$  は  $\theta_r(p_c) \asymp r^{-\rho}$  と定義される。すると二次モーメント評価を用いることにより、 $\rho \leq 2$  であることを示すことができる [6]。  $X_r = \sum_{x \in \partial V_r} \mathbf{1}\{o \leftrightarrow x\}$  と定義する。  $X_r$  が正の値になるのは、原点から境界  $V_r$  に繋がっているときであることに注意すると、コーシー・シュワルツの不等式から、

$$\mathbb{E}_{p_c}[X_r]^2 = \mathbb{E}_{p_c}[X_r \mathbf{1}\{o \leftrightarrow \partial V_r\}]^2 \leq \mathbb{E}_{p_c}[X_r^2] \underbrace{\mathbb{E}_{p_c}[\mathbf{1}\{o \leftrightarrow \partial V_r\}]}_{\theta_r(p_c)} \quad (2.1)$$

となる。したがって、 $\theta_r(p_c) \geq \mathbb{E}_{p_c}[X_r]^2 / \mathbb{E}_{p_c}[X_r^2]$  という  $X_r$  の二次モーメントまでの不等式を得る。一次モーメントは  $\mathbb{E}_{p_c}[X_r] = \sum_{x \in \partial V_r} \mathbb{P}_{p_c}(o \leftrightarrow x)$  である。二次モーメントは  $\mathbb{E}_{p_c}[X_r^2] = \sum_{x,y \in \partial V_r} \mathbb{P}(o \leftrightarrow x, y)$  となる。  $o \leftrightarrow x, y$  ならば、ある  $z \in \mathbb{Z}^d$  が存在し、  $o \leftrightarrow z$ ,  $z \leftrightarrow x$ ,  $z \leftrightarrow y$  が同じボンドを使うことなく起こる。さらにパーコレーションで重要な BK 不等式 ([2]) を用いることで、  $\mathbb{P}(o \leftrightarrow x, y) \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(o \leftrightarrow z) \mathbb{P}(z \leftrightarrow x) \mathbb{P}(z \leftrightarrow y)$  と押さえることができる。したがって、

$$\theta_r(p_c) \geq \frac{\left( \sum_{x \in \partial V_r} \mathbb{P}_{p_c}(o \leftrightarrow x) \right)^2}{\sum_{\substack{x,y \in \partial V_r \\ z \in \mathbb{Z}^d}} \mathbb{P}(o \leftrightarrow z) \mathbb{P}(z \leftrightarrow x) \mathbb{P}(z \leftrightarrow y)} \quad (2.2)$$

という、臨界点直上の二点関数たち ( $\mathbb{P}_{p_c}(o \leftrightarrow x)$  などのこと) による下限評価を得る事ができた。最後に分子・分母をそれぞれ、臨界点直上の二点関数の漸近的振る舞い  $\mathbb{P}_{p_c}(o, x) \asymp |x|^{2-d}(|x| \uparrow \infty)$  [4] を用いて評価すると、分子が  $r^2$  のオーダー、分母が  $r^4$  のオーダーであることがわかる（詳しくは [6] を参照）。従って、 $\rho \leq 2$  が導かれる。

## 3 イジング模型の定義と主結果

### 3.1 イジング模型の定義

$V_R$  上の  $d$  次元イジング模型を以下のように定義する。  $r < R$  に対して、

$$V_R = \{v \in \mathbb{Z}^d : |v| \leq R\} \quad \partial V_r = \{u \notin V_r : \exists v \in V_r \text{ s.t. } J_{u,v} > 0\} \quad (3.1)$$

とする。スピン変数  $\sigma \equiv \{\sigma_v\}_{v \in V_R} \in \{\pm 1\}^{V_R}$  を与える。格子点上のスピンが、  $+1$  は上向き、  $-1$  は下向きである状態を表す。このスピン変数の状態に対するエネルギーをハミルトニアン  $H_{r,R}^h$  といい、

$$H_{r,R}^h(\sigma) = - \sum_{\{u,v\} \subset V_R} J_{u,v} \sigma_u \sigma_v - h \sum_{v \in \partial V_r} \sigma_v, \quad (3.2)$$

で与える。  $J_{u,v} \geq 0$  は並進対称性,  $\mathbb{Z}^d$  対称性, 有限レンジであると仮定する。  $h$  は境界  $\partial V_r$  につけられた外部磁場の強さを表すパラメータである。  $J_{u,v} \geq 0$  であることから, スピン同士は, 同じ向きの方がエネルギーが小さくなり安定するという, 強磁性体を表したモデルとなっている。 このエネルギーによる確率分布をカノニカル分布で与え, その熱力学的期待値を以下のように定義する。

$$(f)_{r,R}^h = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{V_R}} f(\sigma) \frac{e^{-H_{r,R}^h(\sigma)/T_c}}{Z_{r,R}^h}, \quad Z_{r,R}^h = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{V_R}} e^{-H_{r,R}^h(\sigma)/T_c}. \quad (3.3)$$

ただし, パラメータの煩雑さを避けるため, 臨界点  $T_c$  直上のみ制限することで温度に関するパラメータ依存性は省略してある (実際に臨界点直上であることが使用されるのは, 臨界点直上の二点関数の漸近的振舞いを用いるときだけである)。 またここで  $Z_{r,R}^h$  は規格化定数であり, 分配関数と呼ばれる。 グリフィスの不等式により以下の極限の存在が知られている。

$$\langle \sigma_x \rangle_r^+ = \lim_{h \uparrow \infty} \langle \sigma_x \rangle_{r,R}^h \quad [x \in V_r \cup \partial V_r], \quad (3.4)$$

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle = \lim_{R \uparrow \infty} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R, \quad (3.5)$$

(半径  $r$  上に  $h=0$  の外部磁場をかけていない系の場合は,  $r, h$  はそれぞれ書かないこととする)。 従って, まずは外部磁場の入った系や有限系を取り扱い, 最終的に極限操作をとることを考える。

## 3.2 主結果

**Theorem 3.1** (H, Heydenreich & Sakai).  $\mathbb{Z}^{d>4}$  上の強磁性イジング模型において,  $J_{u,v} \geq 0$  は並進対称性,  $\mathbb{Z}^d$  対称性, 有限レンジであると仮定する。 もし  $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle \asymp |x|^{2-d}$  ( $|x| \uparrow \infty$ ) であり,  $\langle \sigma_o \rangle_r^+ \asymp r^{-\rho}$  ( $r \uparrow \infty$ ) を満たす  $\rho > 0$  が存在するとする。 すると, 平均場評価  $\rho \leq 1$  が成り立つ。

ここで  $f \asymp g$  は, 適切な極限で  $f/g$  が正かつ有限であることを表す。 この定理を導く鍵になる相関不等式が以下である。

**Proposition 3.2** (H, Heydenreich & Sakai). 強磁性イジング模型において, 以下の相関不等式が成り立つ。

$$\langle \sigma_o \rangle_r^+ \geq \frac{\left( \sum_{x \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle \right)^2}{\sum_{x,y \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle \langle \sigma_x \sigma_y \rangle + \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}^d \\ x,y \in \partial V_r}} \langle \sigma_o \sigma_u \rangle \langle \sigma_u \sigma_x \rangle \langle \sigma_u \sigma_y \rangle \langle \sigma_o \rangle_{\text{dist}(u, \partial V_r)}^+}. \quad (3.6)$$

Theorem 3.1 の臨界点直上の二点関数の漸近的振舞いについては, 次元  $d$  が十分大きい場合, 或は  $d > 4$  で有限レンジのサポートが十分大きい場合について [7, Theorem 1.3] によって示されている。 Proposition 3.2

の不等式において, 分子・分母を評価すると, 分子は  $O(r^2)$ , 分母は  $\begin{cases} O(r^{(4-\rho)V_3}) & [\rho \neq 1] \\ O(r^3 \log r) & [\rho = 1] \end{cases}$  となる。 する

と,  $\rho \leq 1$  ということが帰結される。  $\langle \sigma_o \rangle_{\text{dist}(u, \partial V_r)}^+$  が重要な項であり, この項によって  $\rho \leq 1$  が得られる (この項が無ければパーコレーションと同じ結果, つまり  $\rho \leq 2$  になってしまう)。 Proposition 3.2 の相関不等式の証明には, 以下で説明する「ランダムカレント表現」という確率幾何学的な表現を用いる。

## 4 ランダムカレント表現と相関不等式の導出の概略

### 4.1 ランダムカレント表現

ランダムカレント表現とは、イジング模型の高温展開をより洗練させた表現である。導出についてはここでは詳しく言及しないが、熱力学的期待値におけるボルツマン因子（指数関数の部分）をテイラー展開することによって得る事ができる。以下の Proposition 4.1 のようになるが、そのための記法を導入しておく。二つのボンドの集合を  $B_R \equiv \{\{u, v\} \subset V_R : J_{u,v} > 0\}$ ,  $G_R \equiv \{\{v, g\} : v \in \partial V_r\}$  と定義する。  $g \notin \mathbb{Z}^d$  はゴーストサイトと呼ばれる点である。ボンド上のカレント配位  $\mathbf{n} \equiv \{n_b\}$  を非負の整数の集合とする。カレント配位  $\mathbf{n}$  に対して、源泉集合  $\partial \mathbf{n}$  を

$$\partial \mathbf{n} = \left\{ v \in V_R \cup \{g\} : \sum_{b \ni v} n_b \text{ is odd} \right\}, \quad (4.1)$$

と定義する。奇数のカレントがのっているボンドだけを見ると、源泉集合  $\partial \mathbf{n}$  はそのボンドの端点の集合とみなすことができる。また重み関数  $w_{r,R}^h(\mathbf{n})$ ,  $w_R(\mathbf{n})$  をそれぞれ

$$w_{r,R}^h(\mathbf{n}) = \prod_{b \in B_R} \frac{(J_b/T_c)^{n_b}}{n_b!} \prod_{b' \in G_R} \frac{(h/T_c)^{n_{b'}}}{n_{b'}!}, \quad w_R(\mathbf{n}) = w_{r,R}^0(\mathbf{n}), \quad (4.2)$$

と定義する。すると以下のランダムカレント表現 (図 1 参照) が得られる。

**Proposition 4.1** (ランダムカレント表現 [1]).

$$\langle \sigma_x \rangle_{r,R}^h = \frac{\sum_{\partial \mathbf{n} = \{x, g\}} w_{r,R}^h(\mathbf{n})}{\sum_{\partial \mathbf{n} = \emptyset} w_{r,R}^h(\mathbf{n})}, \quad \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R = \frac{\sum_{\partial \mathbf{n} = \{x\} \Delta \{y\}} w_R(\mathbf{n})}{\sum_{\partial \mathbf{n} = \emptyset} w_R(\mathbf{n})}. \quad (4.3)$$

ランダムカレント表現において、「二点  $x, y$  がカレント  $\mathbf{n}$  で繋がる」というのは、正のカレントをもつボンドによる  $x$  から  $y$  への道が存在することをいい、 $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$  とかく。すると、パーコレーションのような解析が可能になる。ランダムカレント表現で最も重要な性質は、「源泉の移し替え補題」である [7, Lemma 2.3]。これにより、二点の繋がりをを用いて、源泉集合を移し替えることが可能になる。以下に源泉の移し替え補題による簡単な帰結を述べる。

**Lemma 4.2** (源泉の移し替え補題の帰結). 任意の部分集合  $A \subset V_R$  と  $B \subset V_R \cup \{g\}$  に対して、以下が成り立つ。

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n} = B \\ \partial \mathbf{m} = \emptyset}} w_{r,R}^h(\mathbf{n}) W_A(\mathbf{m}) \mathbf{1}\{x \xleftrightarrow{\mathbf{n} + \mathbf{m}} y \text{ in } A\} = \sum_{\substack{\partial \mathbf{n} = B \Delta \{x\} \Delta \{y\} \\ \partial \mathbf{m} = \{x\} \Delta \{y\}}} w_{r,R}^h(\mathbf{n}) W_A(\mathbf{m}). \quad (4.4)$$

指示関数の条件の中の in  $A$  は、 $A$  中のボンドだけを用いて  $x$  と  $y$  が繋がる道が少なくとも一本存在することを表している。(4.4) の右辺を適切な分配関数で割る事で、スピン系の表現を取り出すことができる。

### 4.2 Proposition 3.2 の相関不等式の導出の概略

ランダムカレント表現を適用した Proposition 3.2 の不等式の証明の概略を述べる。2 節のパーコレーションの場合を参照して欲しい。  $X_r(\mathbf{n}) = \sum_{\partial V_r} \mathbf{1}\{o \xleftrightarrow{\mathbf{n}} x \text{ in } V_R\}$  とおく。コーシー・シュワルツの不等式を用

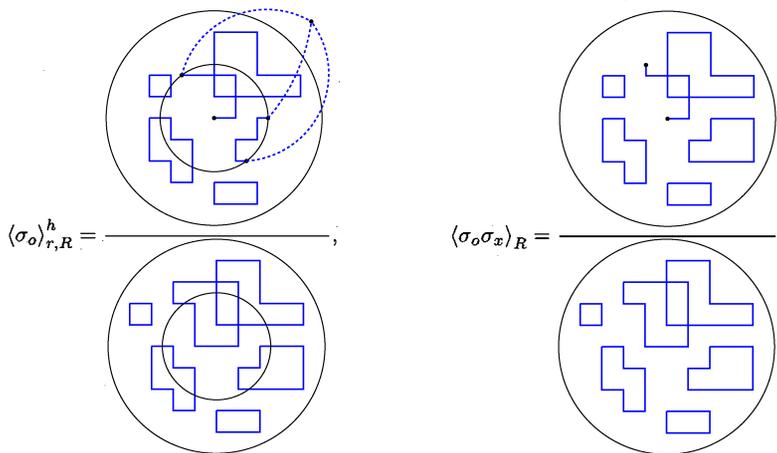


図1  $\langle \sigma_o \rangle_{r,R}^h$  と  $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_R$  のランダムカレント表現である。奇数のカレントがのっているボンドだけを書いた。破線はゴーストサイト  $g$  へのボンドを表している。

いると,

$$\sum_{\substack{\partial n = \{o, g\}, \\ \partial m = \emptyset}} \frac{w_{r,R}^h(n)}{Z_{r,R}^h} \frac{w_R(m)}{Z_R} X_r(n+m) \leq \underbrace{\left( \sum_{\partial n = \{o, g\}} \frac{w_{r,R}^h(n)}{Z_{r,R}^h} \right)}_{=\langle \sigma_o \rangle_{r,R}^h} \underbrace{\left( \sum_{\partial m = \emptyset} \frac{w_R(m)}{Z_R} \right)}_{=1}^{1/2} \times \left( \sum_{\substack{\partial n = \{o, g\}, \\ \partial m = \emptyset}} \frac{w_{r,R}^h(n)}{Z_{r,R}^h} \frac{w_R(m)}{Z_R} X_r(n+m)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.5)$$

となる。まず Proposition 4.1 を用いて,  $X_r(n+m)$  の一次モーメントに相当する (4.5) の左辺のランダムカレント表現をスピン系の表現に戻す。源泉の移し替え補題 Lemma 4.2 より,

$$\begin{aligned} (4.5) \text{ の左辺} &= \sum_{x \in \partial V_r} \sum_{\substack{\partial n = \{o, g\}, \\ \partial m = \emptyset}} \frac{w_{r,R}^h(n)}{Z_{r,R}^h} \frac{w_R(m)}{Z_R} \mathbf{1}\{o \overset{\leftarrow}{\longleftrightarrow} x \text{ in } V_r\} \\ &= \sum_{x \in \partial V_r} \sum_{\substack{\partial n = \{x, g\}, \\ \partial m = \{o, x\}}} \frac{w_{r,R}^h(n)}{Z_{r,R}^h} \frac{w_R(m)}{Z_R} = \sum_{x \in \partial V_r} \langle \sigma_x \rangle_{r,R}^h \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_R, \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。あとは (4.5) の  $X_r(n+m)$  の二次モーメントを評価しなければならない。まずは, (4.5) に源泉の移し替え補題 Lemma 4.2 を用いることで,

$$\begin{aligned} (4.5) \text{ の右辺の第二項} &= \sum_{x, y \in V_r} \sum_{\substack{\partial n = \{o, g\}, \\ \partial m = \emptyset}} \frac{w_{r,R}^h(n)}{Z_{r,R}^h} \frac{w_R(m)}{Z_R} \mathbf{1}\{o \overset{\leftarrow}{\longleftrightarrow} x, y \text{ in } V_r\} \\ &= \sum_{x, y \in V_r} \sum_{\substack{\partial n = \{x, g\}, \\ \partial m = \{o, x\}}} \frac{w_{r,R}^h(n)}{Z_{r,R}^h} \frac{w_R(m)}{Z_R} \mathbf{1}\{o \overset{\leftarrow}{\longleftrightarrow} y \text{ in } V_r\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。  $x = y$  のときは一次モーメントの場合と同じになるので、以下では  $x \neq y$  とする。(4.7)の源泉の条件の下で  $o \xleftrightarrow[n+m]{h} y$  in  $V_R$  が起こるのは次の二つの場合である。(i)  $o \xleftrightarrow[m]{h} y$ , (ii)  $o \xleftrightarrow[n+m]{h} y$  in  $V_R$  かつ  $o \xleftrightarrow[m]{h} y$ . (i) の場合は  $n$  に関する和を先にとりスピン系の表現に戻すことができるので、

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{x,y \in V_r \\ x \neq y}} \sum_{\substack{\partial n = \{x,y\} \\ = (\sigma_x)_{r,R}^h \leq 1}} \frac{w_{r,R}^h(n)}{Z_{r,R}^h} \sum_{\partial m = \{o,x\}} \frac{w_R(m)}{Z_R} \mathbf{1}\{o \xleftrightarrow[m]{h} y\} \\ & \leq \sum_{\substack{x,y \in V_r \\ x \neq y}} \sum_{\substack{\partial m = \{o,x\} \\ \partial l = \emptyset}} \frac{w_R(m)}{Z_R} \frac{w_R(l)}{Z_R} \mathbf{1}\{o \xleftrightarrow[m+l]{h} y\} \\ & = \sum_{\substack{x,y \in V_r \\ x \neq y}} \sum_{\substack{\partial m = \{x,y\} \\ \partial l = \{o,y\}}} \frac{w_R(m)}{Z_R} \frac{w_R(l)}{Z_R} = \sum_{\substack{x,y \in V_r \\ x \neq y}} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R \langle \sigma_o \sigma_y \rangle_R, \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。二行目の不等式では、 $Z_R/Z_R$  をかけ指示関数の条件を  $l$  の分だけ広くした。三行目の最初の等号では、再び源泉の移し替え補題 Lemma 4.2 を用いた。三行目の最後の等号では、Proposition 4.1 を用いてスピン系の表現に戻した。(ii) の場合が一番大変であるが、「条件付きクラスターの議論」を用いることで、

$$\sum_{\substack{u \in V_R \\ x,y \in \partial V_r \\ (x \neq y)}} \langle \sigma_u \sigma_x \sigma_y \rangle_{r,R}^h \langle \sigma_u \sigma_y \rangle_R \langle \sigma_u \sigma_x \rangle_R \langle \sigma_o \sigma_u \rangle_R, \quad (4.9)$$

と評価することができる。詳しくは [3] を参照。以上をまとめると

$$\langle \sigma_o \rangle_{r,R}^h \geq \frac{\left( \sum_{x \in \partial V_r} \langle \sigma_x \rangle_{r,R}^h \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_R \right)^2}{\sum_{x,y \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_R \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R + \sum_{\substack{u \in V_R \\ x,y \in \partial V_r}} \langle \sigma_o \sigma_u \rangle_R \langle \sigma_u \sigma_x \rangle_R \langle \sigma_u \sigma_y \rangle_R \langle \sigma_u \sigma_x \sigma_y \rangle_{r,R}^h}, \quad (4.10)$$

を得る。ここで  $h \uparrow \infty$  の極限をとると、この極限の下では  $\partial V_r$  上のスピンはすべて  $+1$  の値をとる。さらにグリフィスの不等式も用いると  $\lim_{h \uparrow \infty} \langle \sigma_u \sigma_x \sigma_y \rangle_{r,R}^h = \langle \sigma_u \rangle_{r,R}^\infty \leq \langle \sigma_o \rangle_{\text{dist}(u, \partial V_r)}^+$  となるので、

$$\langle \sigma_o \rangle_r^+ \geq \frac{\left( \sum_{x \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_R \right)^2}{\sum_{x,y \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_R \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R + \sum_{\substack{u \in V_R \\ x,y \in \partial V_r}} \langle \sigma_o \sigma_u \rangle_R \langle \sigma_u \sigma_x \rangle_R \langle \sigma_u \sigma_y \rangle_R \langle \sigma_o \rangle_{\text{dist}(u, \partial V_r)}^+}, \quad (4.11)$$

を得る。最後に  $R \uparrow \infty$  の極限をとれば、Proposition 3.2 の相関不等式が導かれる。

## 5 まとめと展望

本講義録では、2016年12月に京都大学数理解析研究所で行われた確率論シンポジウムでの講演をもとにして、それを文字に起こしたものである。1節では、1-arm 指数という臨界指数を中心とした背景を紹介した。2節では、既に証明されているパーコレーションの1-arm 指数の上限評価の導出を紹介した。本研究はこの

方法をイジング模型へ応用しようということを出発点としている。3節では、本研究でのイジング模型の設定を述べ、主結果を述べた。4節では、本研究の肝となるランダムカレント表現を紹介し、それを用いて、主結果の証明の鍵となる相関不等式の導出を紹介した。本研究がパーコレーションと比べて解析が非常に困難だった点は、以下の二つであると自分は考えている。ひとつめは境界条件の影響である。パーコレーションの場合、既に無限直積確率空間の上で考えているため、境界の影響を受けない。一方、イジング模型は有限体積上で確率測度を定義し、熱力学的期待値をとった後に無限体積極限をとらなければならない。そのため境界の影響を大きく受け、うまく設定しなければ適切な上限評価を得る事ができず、この設定を探すのに時間を費やした。ふたつめはランダムカレント表現における源泉の条件である。パーコレーションとは違い、ただ「二点が繋がっている」ということよりも強い条件となっている（この源泉条件が、イジング模型における臨界指数とパーコレーションの臨界指数が異なる理由でもある）。この条件を少しでも緩めようとすると、再び適切な上限評価を得る事ができなくなってしまう。適切な境界等の設定のもと、源泉の条件を適切に取り扱うことで主結果（高次元イジング模型の1-arm 指数が  $\rho \leq 1$  という平均場上限評価をもつこと）を得る事に成功した。

1-arm 指数に関する将来的な課題としては以下のものが考えられる。今回の設定では相互作用定数  $J$  が有限レンジをもつということを仮定していた。今回の設定では境界  $\partial V_r$ （とその有限レンジ幅分）に外部磁場をかけていたが、無限レンジ系にしてしまうと、かけるべき外部磁場の範囲が無限に広がってしまいパーコレーションの1-arm 指数の上限しか得ることができない。しかしながら我々は減衰が十分速い無限レンジ系でも  $\rho \leq 1$  が成り立つことを信じている。また、 $\phi^4$  スピン系の1-arm 指数についても未解決である。 $\phi^4$  スピン系はイジングスピン系を用いて構成できることが知られている [8]。  $\phi^4$  スピン系もイジングスピン系も同じ普遍性クラスに属することが知られているため、この1-arm 指数も  $d > 4$  で  $\rho \leq 1$  を満たすと信じている。もちろん、我々の最終目標は、高次元イジング模型における臨界指数が  $\rho = 1$  となることを示すことにある。そのため  $\rho \geq 1$  という逆方向の不等式も未解決問題である。これに関しては、パーコレーションで示されている方法を踏襲すべきかどうかも含め、未だ模索中である。

## 参考文献

- [1] R.B. Griffiths, C.A. Hurst and S. Sherman. Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *J. Math. Phys.* **11** (1970): 790–795.
- [2] G.R. Grimmett. *Percolation* (2nd ed., Springer, Berlin, 1999).
- [3] S.Handa, M.Heydenreich and A.Sakai. Mean-field bound on the 1-arm exponent for Ising ferromagnets in high dimensions. Preprint (2016). arXiv:1612.08809.
- [4] T. Hara and G. Slade. Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. *Commun. Math. Phys.* **128** (1990): 333–391.
- [5] G. Kozma and A. Nachmias. Arm exponents in high dimensional percolation. *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011): 375–409.
- [6] A. Sakai. Mean-field behavior for the survival probability and the percolation point-to-surface connectivity. *J. Stat. Phys.* **117** (2004): 111–130.
- [7] A. Sakai. Lace expansion for the Ising model. *Commun. Math. Phys.* **272** (2007): 283–344.
- [8] B. Simon and R.B. Griffiths. The  $(\phi^4)_2$  field theory as a classical Ising model. *Commun. Math. Phys.* **33** (1973): 145–164.
- [9] H. Tasaki. Hyperscaling inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.* **113** (1987): 49–65.