

# 体心立方格子上の最近接モデルに対するレース展開

北海道大学大学院理学院数学専攻 上島 芳倫

(Yoshinori KAMIJIMA)

Department of Mathematics, Hokkaido University)

共同研究者：坂井 哲 准教授, 半田 悟 氏

## 1 はじめに

### 1.1 研究背景

本研究では二つのモデルを考えている。一つ目は最近接自己回避歩行 (nearest-neighbour self-avoiding walk, 以下 SAW) である。最近接自己回避歩行は単純ランダムウォーク (simple random walk, 以下 RW) に自分自身の経路と交わらないという条件をくわえたモデルである。二つ目は最近接パーコレーション (nearest-neighbour percolation, 以下単にパーコレーション) である。パーコレーションは各ボンドが確率  $p$  で開いている, 確率  $1-p$  で閉じているという状態が与えられるモデルである。これらは, 自然科学において重要な概念である, 相転移・臨界現象を示す。

相転移・臨界現象はあらゆる物質で観測される現象である。例えば, 水 ( $H_2O$ ) は常温で液体の水であって,  $0^\circ C$  で氷に変化し,  $100^\circ C$  で水蒸気に変化することはよく知られている。他にも, 鉄 (Fe) は常温で強磁性を示すが,  $770^\circ C$  を境にして常磁性を示す。 $H_2O$  の場合は気相と液相, Fe の場合は強磁性相と常磁性相の間に, 各相が区別できなくなる点がある。これを臨界点と呼ぶ。臨界点の近傍では臨界現象と呼ばれる, 物理量に特異性を示す現象が起きることが知られている。その振る舞いは  $|T_c - T|^{-\gamma}$  のように冪乗則によって特徴づけられる。ここに現れた  $\gamma$  を臨界指数という。当然のことながら, 臨界点の値  $T_c$  は物質ごとに異なる。しかし臨界指数は, 物質の種類によらない定数, という普遍性をもつことが実験的に知られている。

SAW においても臨界指数が定義される。この場合「臨界指数の普遍性」は, 考えている空間 (格子の形) によらずモデルの対称性や次元  $d$  のみによって決まること, を意味する。SAW の臨界指数を具体的に求めることは, 低次元では難しい問題であり, 数学的に厳密な理解があまり進んでいない。一方で高次元では, 臨界指数が平均場臨界指数と呼ばれる簡単な値に退化することが知られている。このとき, 退化するぎりぎりの次元  $d_c$  を (上部)

臨界次元という。SAW の臨界次元は経験的に  $d_c = 4$  であると予想されている。現在のところ、数学的に厳密に証明されているのは  $d \geq 5$  の場合である。それは原と Slade[2, 3] によって示された。その論文で用いられた手法がレース展開である。

同様にパーコレーションにおいても、レース展開を用いて臨界次元を求める試みがあり、 $d_c = 6$  と予想されている。しかしこちらは非常に難しく、現在のところ、 $d \geq 11$  までで平均場臨界指数に退化することが示されている [1]。なお、そこで用いられた手法は non-backtracking lace expansion という、通常のレース展開 (lace expansion) よりも複雑な展開方法である。

## 1.2 研究目的

SAW では、原と Slade が  $d \geq 5$  で臨界指数が平均場臨界指数に退化することを証明した、と述べた。しかし、その証明は 130 頁以上にもわたり、理解するのが容易ではない。操作する量<sup>1)</sup>が 10 個以上もあるために、コンピュータを使わざるを得ないこともその複雑さを示唆している。レース展開に関しても非常にテクニカルな解析方法ゆえ、あらゆる人々に親しまれているものではなかった。こうした結果、レース展開の手法が広く認知されているとは言い難い。また、パーコレーションでも (現在プレプリントだが見込として) 100 頁を超えるため、非常に難しいものになっている。

本研究の目的は、 $d \geq 7$  でパーコレーションに対する臨界指数の平均場臨界指数への退化を示すことにある。そのために、先行研究では単純立方格子 (simple cubic lattice)  $\mathbb{Z}^d$  上で考えていたのを、体心立方格子 (body-centred cubic lattice)  $\mathbb{L}^d$  上に変更した。あとで述べるように、 $\mathbb{L}^d$  では  $\mathbb{Z}^d$  がない利点のため解析が簡単になるのである。それを使って我々は non-backtracking lace expansion ではなく、通常の lace expansion を使って、現在までに  $d \geq 10$  で示すことに成功した。したがって、パーコレーションでの結果は先行研究を凌駕しているといえよう。

体心立方格子を使う方法の是非を確かめるために、SAW に対する平均場臨界指数への退化を示すことにも取り組んでいる。この方法によって、長く複雑であった証明を短く簡単にし、誰でもわかるように改良したい。結果として、現在までに  $d \geq 6$  までは完成しており、すでに証明された  $d \geq 5$  まではもう少しである。さらに論文にすると、SAW の部分だけで 20 頁弱に抑えられることが期待できる。これは [2, 3] が 130 頁以上あったことと比べれば、圧倒的に少ない分量である。

以下では、パーコレーションの証明が未だ書き上がっていないため、SAW の証明に集中して説明する。特にそれがどれだけ簡単になるのかを述べよう。

<sup>1)</sup> bootstrapping argument (後述) で用いる、 $K_1, K_2, K_3$  で押さえられる量のこと。

## 2 体心立方格子の定義とその利点

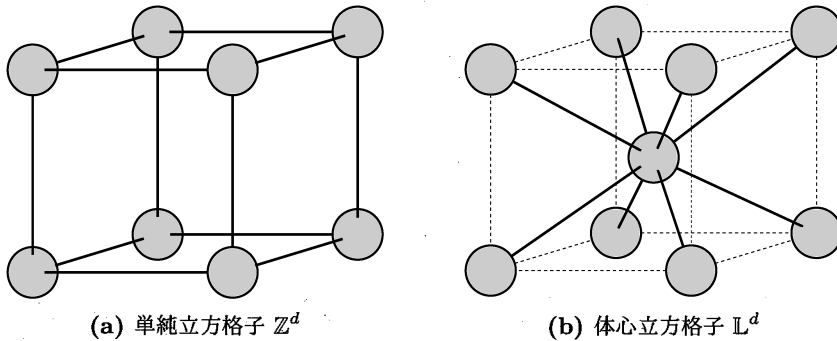


図 1: 格子の概念図. 実線は点どうしが互いにつながっていることを表し, 点線はつながっていないことを表す. 単純立方格子では縦横につながっているが, 体心立方格子では斜めにつながっている. とおりあう点の座標は, 例えば 3 次元では, 単純立方格子で原点  $o = (0, 0, 0)$  に対して  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)$  である. 一方, 体心立方格子で原点  $o = (0, 0, 0)$  に対して  $(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, -1)$  である. つまり体心立方格子では, 一歩移動すると, 必ずすべての座標成分が  $\pm 1$  される.

$\mathbb{L}^d$  の最近接点 (nearest-neighbour point) を

$$\mathcal{N} = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid |x_1| = |x_2| = \dots = |x_d| = 1 \}$$

と定義する. その点の数は  $|\mathcal{N}| = 2^d$  個ある. このとき体心立方格子  $\mathbb{L}^d$  を

- 原点を含み  $\mathbb{L}^d \ni o = (0, 0, \dots, 0)$ ,
- 最近接点  $\mathcal{N}$  を平行移動することで生成される集合

と定義する. 体心立方格子の概念図を図 1b に示す.

$\mathbb{Z}^d$  と比べたときの  $\mathbb{L}^d$  の利点は, RW の推移確率が非常に簡単になることである. すなわち,  $D(x) = \mathbb{1}_{\{x \in \mathcal{N}\}} / 2^d = \prod_{j=1}^d (\delta_{|x_j|, 1} / 2)$  という, 単なる 1 次元推移確率の積で表される. このことから Stirling の公式が使えて,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$D^{*(2n)}(o) = \underbrace{(D * \dots * D)}_{2n\text{-fold}}(o) = \left( \binom{2n}{n} \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} \right)^d \underset{n \uparrow \infty}{\sim} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^d \quad (1)$$

2)  $\delta_{\cdot, \cdot}$  は Kronecker デルタ.

と評価できる.

### 3 自己回避歩行と主結果

$n$  歩のウォークを, 順序づけられた  $n+1$  個の点の集合  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$  ( $\omega_j \in \mathbb{L}^d, \forall j = 0, 1, \dots, n$ ) として定義し, その歩数を  $|\omega| = n$  で表す. SAW に対する二点関数を,  $p \in [0, p_c)$  と  $x \in \mathbb{L}^d$  に対して

$$G_p(x) = \underbrace{\sum_{\omega: o \rightarrow x} p^{|\omega|} \prod_{j=1}^n D(\omega_j - \omega_{j-1})}_{\text{RW の Green 関数 } S_p(x)} \underbrace{\prod_{0 \leq s < t \leq |\omega|} (1 - \mathbb{1}_{\{\omega_s = \omega_t\}})}_{\text{self-avoidance constraint}}$$

と定義する. ただし, 総和は  $o$  から  $x$  に至るすべての経路についてとることを意味し, 一つ目の総積の因子はその一步々々が隣り合った点 ( $\omega_j - \omega_{j-1} \in \mathcal{N}, \forall j = 1, 2, \dots, n$ ) になっていることを表す.  $S_p(x)$  は RW の二点関数にあたるものである. また, 帯磁率  $\chi_p$  を二点関数の和で  $\chi_p = \sum_{x \in \mathbb{L}^d} G_p(x)$  と定義する. 臨界点  $p_c$  は帯磁率が発散する点  $p_c = \sup \{ p \geq 0 \mid \chi_p < \infty \}$  である. 帯磁率の発散の仕方の特徴づける量として臨界指数  $\gamma$  を定義する:  $\chi_p \asymp (p_c - p)^{-\gamma}$ <sup>4)</sup>.

高次元における臨界指数を決定するためには, 次の定理 [4, Theorem 2.3] を利用する. これは臨界指数  $\gamma$  が平均場臨界指数に退化するための十分条件を与える.

定理 1. Bubble condition

$$\lim_{p \uparrow p_c} \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{G}_{p_c}(k)^2 \frac{d^d k}{(2\pi)^d} < \infty$$
<sup>5)</sup>

が満たされるならば,  $\chi_p \asymp (p_c - p)^{-1}$  が成り立つ. したがって  $\gamma = 1$ .

したがって, 平均場臨界指数への退化を証明することは, 次の赤外評価 (infrared bound) を証明することに帰着する. これが本研究の主結果である.

定理 2 (with 坂井, 半田). 次元が  $d \geq d_0$  (現在のところ  $d_0 = 7$ ) のとき,

$$\exists C \in [0, \infty) \quad \text{s.t.} \quad \forall p \in [1, p_c), \forall k \in [-\pi, \pi]^d, \left| \hat{G}_p(k) \right| \leq C \hat{S}_{\mu_p}(k) = \frac{C}{1 - \mu_p \hat{D}(k)}.$$

ただし,  $\mu_p = 1 - \chi_p$  である.

3) 関数  $f(x)$  の畳み込みを  $(f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{L}^d} f(y)g(x-y)$  で表す.

4)  $f(p) \asymp g(p)$  とは,  $\exists C_1, C_2 > 0, \exists \delta > 0$  s.t.  $|p_c - p| \leq \delta \implies C_1 g(p) \leq f(p) \leq C_2 g(p)$  を意味する.

5) 関数  $f(x)$  の Fourier 変換を  $\hat{f}(k) = \sum_{x \in \mathbb{L}^d} f(x) e^{ik \cdot x}$  で表す.

## 4 レース展開

### 4.1 再生方程式とダイアグラム

レース展開は、二点関数の Fourier 変換  $\hat{G}_p(k)$  に対する、再生方程式を与える：

$$G_p(x) = \delta_{o,x} + (pD * G_p)(x) + (\Pi_p * G_p)(x).$$

ただし、 $\Pi_p(x)$  はレース展開係数の和であり、大雑把にいうと RW からの摂動を表している。その各項は

$$\Pi_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi_p^{(n)}(x) = - \text{loop at } x=o + \text{two-point} - \text{triangle} + \text{square} - \dots$$

のようなダイアグラムでかける。これらの線、一本々が二点関数を表し、各頂点が二点関数どうしの相互作用を表している。

上の再生方程式の両辺を Fourier 変換することで

$$\hat{G}_p(k) = 1 + p\hat{D}(k)\hat{G}_p(k) + \hat{\Pi}_p(k)\hat{G}_p(k) \iff \hat{G}_p(k) = \frac{1}{1 - p\hat{D}(k) - \hat{\Pi}_p(k)}$$

を得る。 $\hat{\Pi}_p(k)$  を奇数項の和  $\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)$  と偶数項の和  $\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)$  に分けよう： $\hat{\Pi}_p(k) = -\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k) + \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)$ 。このとき  $p$  と  $\hat{G}_p(k)/\hat{S}_{\mu_p}(k)$  は次のように評価できる。

$$\chi_p = \hat{G}_p(0) = \frac{1}{1 - p - \hat{\Pi}_p(0)} \quad \therefore p = 1 - \chi_p^{-1} - \hat{\Pi}_p(0) \leq 1 + \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) \quad (2)$$

$$-\frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0)}{p} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))}}{1 - \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))}} \leq \frac{\hat{G}_p(k)}{\hat{S}_{\mu_p}(k)} - 1 \leq \frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0)}{p} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))}}{1 - \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))}} \quad (3)$$

結局、定理 2 を証明するためには  $\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0)$ 、 $\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0)$  や  $\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)$ 、 $\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)$  を評価すればよい。そこで次の補題が成り立つ。

補題 1. レース展開係数を Fourier 変換したものは

$$0 \leq \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\pi}_p^{(2n-1)}(k) \leq L + \frac{rB(p\|D\|_{\infty} + L)}{1 - r^2},$$

$$0 \leq \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\pi}_p^{(2n)}(k) \leq \frac{B(p\|D\|_{\infty} + L)}{1 - r^2},$$

$$0 \leq \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_p^{(2n+1)}(0) - \hat{\pi}_p^{(2n+1)}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} \leq \frac{\hat{W}(k)}{1 - \hat{D}(k)} \frac{B^2(1 + r^2)}{p(1 - r^2)^3},$$

$$0 \leq \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_p^{(2n)}(0) - \hat{\pi}_p^{(2n)}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} \leq \frac{\hat{W}(k)}{1 - \hat{D}(k)} \frac{B(1 + rB)}{p(1 - r^2)^3}$$

と評価できる。ただし

$$L = \left\| (pD(x))^{*2} * G_p \right\|_{\infty}, \quad B = \left( (pD)^{*2} * G_p^{*2} \right) (0),$$

$$r = p \|D\|_{\infty} + L + B, \quad \hat{W}(k) = \sup_{x \in \mathbb{L}^d} G_p(x) (1 - \cos(k \cdot x)).$$

とおいた。

## 4.2 Bootstrapping argument

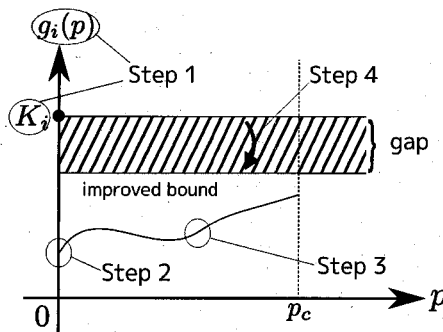


図 2: Bootstrapping argument の概念図。上界  $K_i$  を仮定すれば, improved bound がでてくる。このとき,  $g_i(p)$  は gap を跳び越えられない。

定理 2 の証明を完遂するには, bootstrapping argument と呼ばれる手法を用いる:

- Step 1.** 適当な関数  $g_1(p), g_2(p), g_3(p)$  を選び, 上界  $g_i(p) \leq K_i, \forall i = 1, 2, 3$  を仮定する。
- Step 2.**  $p = 0$  で  $g_i(0) < K_i, \forall i = 1, 2, 3$  を確認する。
- Step 3.**  $g_i: p \mapsto g_i(p), \forall i = 1, 2, 3$  が  $p \in [0, p_c]$  で連続であることを確認する。
- Step 4.**  $g_i(p) \leq K_i, \forall i = 1, 2, 3$  の仮定からレース展開によって得られた上界を評価して, 実際に  $p \in (0, p_c)$  で  $g_i(p) < K_i, \forall i = 1, 2, 3$  が成り立つことを証明する。

適当な関数としては, 次の関数

$$g_1(p) = p, \quad g_2(p) = \sup_{k \in [-\pi, \pi]^d} \frac{|\hat{G}_p(k)|}{\hat{S}_{\mu_p}(k)}, \quad g_3(p) = \sup_{k, l \in [-\pi, \pi]^d} \frac{|\hat{\Delta}_k \hat{G}_p(l)|}{\hat{U}_{\mu_p}(k, l)}$$

を選ぶ。ただし

$$\hat{U}_{\mu_p}(k, l) = [1 - \hat{D}(k)] \left[ \frac{\hat{S}_{\mu_p}(l+k) + \hat{S}_{\mu_p}(l-k)}{2} \hat{S}_{\mu_p}(l) + 4\hat{S}_{\mu_p}(l+k)\hat{S}_{\mu_p}(l-k) \right]$$

であって、 $\hat{\Delta}_k$  は離散ラプラス変換を 2 で割ったもの

$$\hat{\Delta}_k \hat{G}_p(l) = \frac{\hat{G}_p(l+k) + \hat{G}_p(l-k)}{2} - \hat{G}_p(l)$$

である。これら  $g_1(p)$ ,  $g_2(p)$ ,  $g_3(p)$  に対して上の手続きを実行すると、特に  $g_2(p)$  は  $p \in [0, p_c]$  で真に  $K_2$  より小さいことがわかる。なぜなら、もし  $p \in (0, p_c)$  のどこかで  $g_2(p) \geq K_2$  となることがあったとしたら、それは  $g_2: p \mapsto g_2(p)$  が  $p \in [0, p_c]$  で連続であったことに反するから (図 2)。  $g_2(p)$  が一様に上から押さえられた結果、定理 2 の証明が完了する。

### 4.3 Improved bound

連続性は [4, Chapter 5] と同様に示される。ここでは  $g_1(p)$ ,  $g_2(p)$ ,  $g_3(p)$  がどのように上から押さえられるかを説明しよう。まず、上界の仮定 (bootstrapping hypothesis) により次の補題が証明される。

補題 2.  $L, B, r, \hat{W}(k)$  は

$$\begin{aligned} L &\leq K_1^2 K_2 \varepsilon_1, & B &\leq K_1^2 K_2^2 \varepsilon_2, \\ r &\leq \frac{K_1}{2^d} + K_1^2 K_2 \varepsilon_1 + K_1^2 K_2^2 \varepsilon_2, & \frac{\hat{W}(k)}{1 - \hat{D}(k)} &\leq 5K_3 (1 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

と上から押さえられる。ただし、 $\varepsilon_1 = \sum_{n=1}^{\infty} D^{*(2n)}(o)$  および  $\varepsilon_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) D^{*(2n)}(o)$ 。

表 1:  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  に対する評価

次元 $d$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon_1$	$\infty$	$\infty$	0.39884	0.11974	0.04705	0.02051	0.00942	0.00446
$\varepsilon_2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0.18232	0.04473	0.01544	0.00618

この補題で定義された量  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  は (1) を使って簡単に評価できる。それを数値的に求めたものを表 1 にまとめる。(3) と補題 1 と補題 2 を用いると、 $\hat{G}_p(k)/\hat{S}_{\mu_p}(k)$  が上から押さえられる。ゆえに  $g_2(p)$  が評価できる。 $g_1(p)$  も (2) により同様に評価できる。また、 $|\hat{\Delta}_k \hat{G}_p(l)/\hat{U}_{\mu_p}(k, l)|$  が [4, Lemma 5.7] と上界の仮定を使って

$$\frac{|\hat{\Delta}_k \hat{G}_p(l)|}{\hat{U}_{\mu_p}(k, l)} \leq 2K_1^2 K_2^3 \left[ 1 + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} \right] \\ \times \left[ 1 + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(l)}{p(1 - \hat{D}(l))} + \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(l)}{p(1 - \hat{D}(l))} \right]$$

と上から押さえられる。これと補題 1 と補題 2 を用いて,  $g_3(p)$  も評価できる。

残りは, 上に表した評価が実際に improved bound になっているような  $K_1, K_2, K_3$  の組が存在することを示すのみである。次元  $d$  が十分大きいときは,  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  が小さくなるのでそのような組が存在することがわかる。 $d = 7$  のときは,

$$K_1 = 1.03, \quad K_2 = 1.03, \quad K_3 = 6.00$$

ととればよい。実際, 直接代入して計算すると

$$g_1(p) \leq 1.02 < 1.03, \quad g_2(p) \leq 1.01 < 1.03, \quad g_3(p) \leq 5.47 < 6.00$$

となって真に小さくなっている。

$d = 6$  のときは, 上の評価のままでは improved bound になっているような  $K_1, K_2, K_3$  の組が存在することを示せない。そこで, 補題 1 において

$$0 \leq \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{even}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{even}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} \leq \frac{\hat{\pi}_p^{(2)}(0) - \hat{\pi}_p^{(2)}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} + \frac{\hat{W}(k)}{1 - \hat{D}(k)} \frac{2Br(B+r)}{p(1-r^2)^3}, \\ 0 \leq \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{odd}}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} \leq \frac{\hat{\pi}_p^{(3)}(0) - \hat{\pi}_p^{(3)}(k)}{p(1 - \hat{D}(k))} + \frac{\hat{W}(k)}{1 - \hat{D}(k)} \frac{4B^2r^2}{p(1-r^2)^3}.$$

と書き替えて, 低次のダイアグラム  $\hat{\pi}_p^{(2)}(0) - \hat{\pi}_p^{(2)}(k)$  と  $\hat{\pi}_p^{(3)}(0) - \hat{\pi}_p^{(3)}(k)$  をより小さく評価する。その結果,  $d \geq 6$  で定理 2 が成り立つことが確認できる。

## 参考文献

- [1] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Nearest-neighbor percolation function is continuous for  $d > 10$ . Preprint, (2015). arXiv:1506.07977.
- [2] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 147, pp. 101–136, (1992).
- [3] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.*, Vol. 4, pp. 235–327, (1992).
- [4] G. Slade. *The Lace Expansion and its Applications*. Springer, (2004). Lecture Note in Mathematics 1879.