

ランダム木グラフの境界上のジャンプ過程 Jump processes on boundaries of random trees

得重雄毅

Yuki Tokushige

京都大学・数理解析研究所
RIMS, Kyoto University

無限木グラフ T とその上の過渡的な RW $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ を考える。 T 上の過渡的な RW は T の無限遠点からなるマルティン境界 M に hit する。ここで $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ に対応する二次形式、 ν をマルティン境界 M への到達分布（調和測度）とする。マルティン境界の理論より、（大雑把に言って） M 上の関数 f を、 $T \cup M$ 上の調和関数で M 上では f に一致する関数に移す作用素 H が存在する。そこで M 上の二次形式 $(\mathcal{E}_M, \mathcal{F}_M)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_M(f, g) &:= \mathcal{E}(Hf, Hg) \text{ for } f, g \in \mathcal{F}_M, \\ \mathcal{F}_M &:= \{f \in L^2(M, \nu) : Hf \in \mathcal{F}\}.\end{aligned}$$

Hf は無限遠点でのディリクレ問題の解なので、 $(\mathcal{E}_M, \mathcal{F}_M)$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の M 上のトレースと思える。[1] において木上は、ランダムでない木グラフに対し $(\mathcal{E}_M, \mathcal{F}_M)$ にハント過程 $\{X_t\}_{t > 0}$ が対応することを示し、調和測度 ν が intrinsic metric と呼ばれる M 上の距離に関して volume doubling property を満たすという仮定の下で対応する熱核に対する上下評価を得た。

本研究では上述と同様の問題を、ゴルトン-ワトソン木グラフに対して考察した。子孫分布 $\{p_k\}_{k \geq 0}$ を持つゴルトン-ワトソン木グラフとは以下のように定義されるランダム木グラフのモデルである。時刻 0 では一つの個体のみが存在する。時刻 1 において、この個体は $\{p_k\}_{k \geq 0}$ によって決まる数の子孫を生み死滅する。時刻 2 では、時刻 1 で生まれた個体たちが再び $\{p_k\}_{k \geq 0}$ によって決まる数の子孫を生み死滅する。これを繰り返す。ただし各個体が生む子孫の数は独立に決まるとする。自然にこの手順とランダム木グラフ T を対応させることができる。これがゴルトン-ワトソン木グラフである。この研究では、 T が確率 1 で無限木グラフになることを保証するために $p_0 = 0, p_1 \neq 1$ を仮定する。この仮定より自動的に $m := \sum_{k \geq 1} k p_k > 1$ が従う。さらに技術的な問題から $\sum_{k \geq 1} k^n p_k < +\infty$ というモーメント条件も仮定する。ここ

で \mathcal{T} 上の RW として、 λ -biased RW $\{Z_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$ というものを (確率測度 $P^{\mathcal{T}}(d\omega) \otimes \mathbb{P}_{GW}(d\mathcal{T})$ のもとで) 考える。 (λ は正のパラメーター、この RW の定義は [4] を参照) この λ -biased RW の再帰性、過渡性に対しては次の結果が R. Lyons によって示されている。「 $\lambda > 1/m$ のとき、 $\{Z_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$ は $\mathbb{P}_{GW}(d\mathcal{T}) - a.s.$ で過渡的、 $0 < \lambda \leq 1/m$ のとき、 $\mathbb{P}_{GW}(d\mathcal{T}) - a.s.$ で再帰的」この結果より、 $\lambda > 1/m$ のとき、対応する調和測度 $\nu^{(\lambda)}$ が存在する。また $P^{\mathcal{T}}(d\omega) \otimes \mathbb{P}_{GW}(d\mathcal{T}) - a.s.$ でゴルトン-ワトソン木グラフのマルティン境界上のジャンプ過程 $\{X_t^{(\lambda)}\}_{t \geq 0}$ と対応する熱核 $p_t^{(\lambda)}(\cdot, \cdot)$ が存在することが [1] の結果から容易に確かめられる。本研究の主結果は、熱核の対角成分と変位の期待値のログの意味での短時間漸近挙動である。ここで $d(\cdot, \cdot)$ は M 上に定義される自然な距離である。また $\beta_\lambda := \dim \nu^{(\lambda)}$ はノンランダムな定数である。 [3, 4]

Theorem. For $\lambda \geq 1$, the following holds for \mathbb{P}_{GW} a.s..

$$-\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_t^{(\lambda)}(\omega, \omega)}{\log t} = \frac{\beta_\lambda}{\beta_\lambda + \log \lambda} \quad \nu^{(\lambda)} \text{ a.e. } - \omega.$$

Theorem. For $\lambda \geq 1$, the following holds for \mathbb{P}_{GW} a.s.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log E_\omega[d(\omega, X_t)^\gamma]}{\log t} = \left(\frac{\gamma}{\beta_\lambda + \log \lambda} \right) \wedge 1 \quad \nu^{(\lambda)} \text{ a.e. } - \omega.$$

参考文献

- [1] Kigami, J.: *Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees*, Adv. in Math. 225, (2010), 2674-2730.
- [2] Lyons, R.: *Random walks and percolation on trees*, Ann. Prob. 20, (1990), 931-958.
- [3] Lyons, R., Pemantle, R., Peres, Y.: *Ergodic theory on Galton-Watson trees: speed of random walk and dimension of harmonic measure*, Ergodic Theory Dynamical Systems, 15, (1995), 593-619.
- [4] Lyons, R., Pemantle, R., Peres, Y.: *Biased random walks on Galton-Watson trees*, Probab. Theory Relat. Fields, 106, (1996), 249-264.