

# Free fields realizations of $\mathcal{W}$ -algebras

京都大学・数理解析研究所 元良 直輝\*

Naoki Genra

Research Institute for Mathematical Sciences,  
Kyoto University

## 概要

The  $\mathcal{W}$ -algebras are vertex superalgebras defined by the generalized Drinfeld-Sokolov reductions. We show that the  $\mathcal{W}$ -algebras for generic levels are constructed as intersections of kernels of screening operators and give some applications for free fields realizations of the  $\mathcal{W}$ -algebras.

## 1 研究の背景

二次元共形場理論の中で Zamolodchikov らによって発展した  $\mathcal{W}$  代数は, Feigin-Frenkel によって一般の有限次元単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  と複素数  $k$  に付随して, Drinfeld-Sokolov 還元によって拡張されて定義された (これを  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$  と表す). これは Fateev-Lukyanov によるスクリーニング作用素によって定義された  $A_n$  型,  $D_n$  型の  $\mathcal{W}$  代数と一致した [FL, FF]. さらに一般に次のような定理が成り立つことを証明されている (これを  $\mathcal{W}$  代数の自由場実現と呼ぶ):

**定理 1.1** (Feigin-Frenkel [FF]).  $k$  を generic とすると,  $\mathcal{W}$  代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数に付随する Heisenberg 頂点代数  $\mathcal{H}$  の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{g}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz.$$

ただし  $\int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz$  は  $\mathfrak{g}$  の単純ルート  $\alpha_i$  に付随するスクリーニング作用素,  $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$ ,  $h^\vee$  は  $\mathfrak{g}$  の双対 Coxeter 数である.

ところが Fateev-Lukyanov の  $B_n$  型の  $\mathcal{W}$  代数は,  $B_n$  型の Lie 代数  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  に付随する  $\mathcal{W}$  代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n+1})$  と一致しなかった. 一方で Kac-Roan-Wakimoto は Feigin-Frenkel の定義を拡張し,  $\mathfrak{g}, k$  およびべき零元  $f \in \mathfrak{g}$  に付随して  $\mathcal{W}$  代数を定義した (第 3 章参照). このとき  $\mathfrak{g}$  は Lie 代数のみならず Lie 超代数の場合にまで拡張された. すると彼らの計算によって, Fateev-Lukyanov による  $B_1$  型の  $\mathcal{W}$  代数が Lie 超代数  $\mathfrak{osp}(1, 2)$  に付随する  $\mathcal{W}$  代数に一致することが示された (ただし  $f$  は正則べき零元となるようにとる). 一般には次のように予想されていた ([IMP, Watts]):

**予想 1.2.**  $k \neq -n - \frac{1}{2} (= h^\vee)$  に対し,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1, 2n)) \simeq \mathcal{W}B_n^k.$$

ただし  $\mathcal{W}B_n^k$  は Fateev-Lukyanov の  $B_n$  型の  $\mathcal{W}$  代数である.

\*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

本稿ではこの予想を証明する。そのためにより一般的な自由場実現に関する定理 (定理 4.1, 4.2) を証明し、さらなる応用として定理 4.4 を証明する。

## 2 頂点代数

$\mathbb{C}$  上のベクトル空間  $V$  が頂点代数であるとは、0 でないベクトル  $1 \in V$ ,  $V$  上の線形写像  $\partial : V \rightarrow V$ , さらに  $V$  から  $V$  上の線形写像を係数にもつ形式的べき級数全体  $\text{End}V[[z]]$  ( $z$  は独立変数) への線形写像

$$Y : V \ni A \mapsto Y(A, z) = A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1} \in \text{End}V[[z]]$$

が与えられていて、次を満たしているときをいう:

- (局所ローラン級数) 任意の  $A, B \in V$  に対し,  $A_{(n)}B = 0$  for all  $n \gg 0$ .
- (真空ベクトル)  $Y(1, z) = \text{Id}_V$  であり, 任意の  $A \in V$  に対し,  $Y(A, z) \cdot 1|_{z=0} = A$ .
- (変換作用素)  $\partial \cdot 1 = 0$  かつ  $[\partial, Y(A, z)] = Y(\partial A, z)$ .
- (局所性) 任意の  $A, B \in V$  に対し, ある  $N \in \mathbb{Z}$  が存在し,  $(z-w)^N [Y(A, z), Y(B, w)] = 0$ .

$A \in V$  に対し  $A(z)$  を  $A$  に対応する  $V$  上の場という。二つ目の条件から  $Y$  が単射であることが分かる。よって  $V$  上のベクトルと  $Y$  の像は一対一対応になっており、これを場と状態の対応という。また  $V$  が超ベクトル空間 ( $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  次数付けされたベクトル空間) のとき、 $1 \in V$  および  $\partial, Y$  のパリティが even かつ局所性の括弧積を超括弧積と見なすことにすれば、 $V$  は頂点超代数の構造をもつという。

## 3 $\mathcal{W}$ 代数

$\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 Lie 代数または basic classical な Lie 超代数,  $f \in \mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{g}$  の (パリティが even な) べき零元,  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\Gamma$  を  $\mathfrak{g}$  の半整数次数付け

$$\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

であって、 $f$  に関する "good" な条件 ( $f \in \mathfrak{g}_{-1}$  であって,  $\text{ad}f : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j-1}$  が  $j \geq -\frac{1}{2}$  のとき単射かつ  $j \leq -\frac{1}{2}$  のとき全射) を満たすとする。このとき  $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$  に付随する  $\mathcal{W}$  代数

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) = H(C_k^*(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d)$$

が定義される [KRW]。ただし  $(C_k^*(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d)$  は  $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$  に付随する (一般化された) Drinfeld-Sokolov 還元によって定義されるコホモロジー複体である。このとき  $C_k^*(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  は頂点超代数の構造をもち、そのコホモロジーである  $\mathcal{W}$  代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  も  $C_k^*(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  から誘導された頂点超代数構造をもつ。

ペア  $(\mathfrak{g}, f)$  に対し、Jacobson-Molozov の定理から  $\mathfrak{sl}_2$ -triple  $\{e, h, f\} \subset \mathfrak{g}$  が存在し、このとき半単純元  $x = \frac{1}{2}h$  は随伴作用によって  $\mathfrak{g}$  に半整数次数付けを与え、これは  $f$  について good な次数付けになる。したがって  $f$  について good な  $\Gamma$  はいつでも存在する。一方で、 $\mathcal{W}$  代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  は  $\Gamma$  のと

り方によらず同じ頂点超代数構造をもつことが知られている. そこで  $\mathfrak{g}, f, k$  に付随する (同じ頂点超代数構造をもつ)  $\mathcal{W}$  代数を  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$  と表す.  $f$  が  $\mathfrak{g}$  の正則べき零元の時, これは Feigin-Frenkel によって定義された  $\mathcal{W}$  代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$  と一致する.

## 4 主結果

主定理を述べるためにいくつか定義を準備する. まず三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{>0} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{<0}$$

に付随する制限ルート系 ([BG]) を  $\Delta^\Gamma$  とする. すなわち  $\mathfrak{g}_0$  に含まれる Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$  によって定まるルート系を  $\Delta$ ,  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  に対し

$$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}$$

とすると  $\Delta^\Gamma = \Delta_{>0} \sqcup \Delta_{<0}$  である.  $\Delta^\Gamma$  の正ルートを  $\Delta_{>0}$  とする base を  $\Pi^\Gamma$  とおく.  $\Pi^\Gamma$  は  $\Delta_{>0}$  のうち indecomposable なルートの集まりになる.  $\Delta_{>0} \subset \Delta_+$  となるように  $\Delta$  の単純ルート  $\Pi$  をとる.  $\Delta$  から誘導される  $\Pi$  と  $\Pi^\Gamma$  への半整数次数付けを  $\Pi_j, \Pi_j^\Gamma$  とすると,  $\Pi = \Pi_0 \sqcup \Pi_{\frac{1}{2}} \sqcup \Pi_1$ ,  $\Pi^\Gamma = \Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma \sqcup \Pi_1^\Gamma$  が成り立つ. ここで  $\alpha \in \Pi^\Gamma$  に対し,

$$[\alpha] = \left(\alpha + \bigoplus_{\beta \in \Pi_0} \mathbb{Z}\beta\right) \cap \Pi^\Gamma, \quad [\Pi^\Gamma] = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Pi^\Gamma\}$$

とする.  $[\alpha]$  の元は  $\alpha$  と同じ次数をもつ.  $\alpha, \beta \in \Pi^\Gamma$  に対し,

$$[\alpha] = [\beta] \iff \alpha - \beta \in \bigoplus_{\gamma \in \Pi_0} \mathbb{Z}\gamma$$

が成り立つ.  $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$  を  $\mathfrak{g}_0$  とその不変双線形式

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

(ただし  $u, v \in \mathfrak{g}_0$  は任意,  $(\cdot|\cdot)$  は  $\mathfrak{g}$  上の最長ルートの長さの二乗を 2 に正規化した非退化双線形式,  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  は  $\mathfrak{g}$  上の Killing 形式) に付随するアファイン頂点超代数とする.  $u \in \mathfrak{g}_0$  に対応する  $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$  上の場を  $u(z)$  とおくと,  $u, v \in \mathfrak{g}_0$  に対し

$$u(z)v(w) \sim \frac{[u, v](w)}{z-w} + \frac{\tau_k(u|v)}{(z-w)^2}$$

が成り立つ. ただし右辺は左辺の  $z = w$  に関する特異部のみを表示している (作用素積展開という).  $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$  を  $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$  とその超反対称双線形式

$$\langle u | v \rangle = (f | [u, v])$$

( $u, v \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$  は任意) に付随する中立フェルミオン頂点超代数とする.  $e_\alpha \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} (\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}})$  に対応する  $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$  上の場を  $\Phi_\alpha(z)$  とおくと,  $\alpha, \beta \in \Delta_{\frac{1}{2}}$  に対し

$$\Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w) \sim \frac{\langle u | v \rangle}{z-w}$$

が成り立つ. 次が主定理である.

定理 4.1.  $k$  を generic とする. このとき  $\mathcal{W}$  代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  は  $V^{\tau k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$  の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{[\beta] \in [\Pi_1^\Gamma]} \text{Ker} \sum_{\alpha \in [\beta]} (f|e_\alpha) \int S^\alpha(z) dz \cap \bigcap_{[\beta] \in [\Pi_2^\Gamma]} \text{Ker} \sum_{\alpha \in [\beta]} \int S^\alpha(z) \Phi_\alpha(z) dz.$$

ただし  $S^\alpha(z)$  は  $\alpha \in \Pi^\Gamma$  に付随する  $V^{\tau k}(\mathfrak{g}_0)$  に作用するスクリーニング作用素 ( $[G]$ ) である.

特に  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  となるように  $\Gamma$  がとれるとき  $V^{\tau k}(\mathfrak{g}_0)$  は  $\mathfrak{h}$  に付随する Heisenberg 頂点代数  $\mathcal{H}$  に一致する. また  $\Pi^\Gamma = \Pi$  であり

$$S^\alpha(z) = e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)}$$

が成り立つ. ただし  $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$ ,  $h^\vee$  は  $\mathfrak{g}$  の双対 Coxeter 数である. したがって次を得る.

定理 4.2.  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  かつ  $k$  が generic のとき,  $\mathcal{W}$  代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  は  $\mathcal{H} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$  の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{\substack{\alpha \in \Pi_1 \\ (f|e_\alpha) \neq 0}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)} dz \cap \bigcap_{\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha(z)} \Phi_\alpha(z) dz.$$

$\mathfrak{g}$  が Lie 代数かつ  $f$  を正則べき零元とすると  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  となり, このとき定理 4.2 は定理 1.1 を復元する. また  $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2n)$  かつ  $f$  を ( $\mathfrak{g}$  の even パートの) 正則べき零元とすると  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$  なる good な次数付けが存在し, 定理 4.2 を適用すると次が得られる:

命題 4.3.

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1, 2n)) = \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz \cap \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_n(z)} \Psi(z) dz.$$

右辺の式は Fateev-Lukyanov の  $B_n$  型の  $\mathcal{W}$  代数の定義に一致するので, これで予想 1.2 が証明された.

予想 1.2 は定理 4.2 を用いて証明されたが, 定理 4.1 にも応用がある.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  かつ  $f$  を副正則べき零元として, 定理 4.1 を適用すると次が得られる (詳細は略).

定理 4.4.  $k \neq -n (= h^\vee)$  に対し,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f) \simeq \mathcal{W}_n^{(2), k}.$$

ただし  $\mathcal{W}_n^{(2), k}$  は Feigin-Semikhatov の  $\mathcal{W}_n^{(2)}$  代数 ([FS]) である.

定理 4.4 は  $n = 2, 3$  のとき知られており, 一般には予想とされていた ([ACGHR]).

## 参考文献

- [ACGHR] H. R. Afshar, T. Creutzig, D. Grumiller, Y. Hikida, P. B. Rønne. Unitary  $\mathcal{W}$ -algebras and three-dimensional higher spin gravities with spin one symmetry. *J. High Energy Phys.*, (6), 063, 2014.

- [BG] J. Brundan, S. M. Goodwin. Good grading polytopes. *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3), 94(1):155–180, 2007.
- [FL] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov. Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional conformal field theory. *Sov. Sci. Rev. A. Phys.*, 15:1–117, 1990.
- [FF] B. L. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel'fand-Dikii algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1992.
- [FS] B. L. Feigin, A. M. Semikhatov.  $\mathcal{W}_n^{(2)}$ -algebras. *Nuclear Phys.*, B 698(3):409–449, 2004.
- [G] N. Genra. Screening operators for  $\mathcal{W}$ -algebras. arXiv:1606.00966.
- [IMP] K. Ito, J. O. Madsen, J. L. Petersen. Free field representations of extended superconformal algebras. *Nuclear Phys.*, B 398(2):425–458, 1993.
- [KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.
- [Watts] G. M. T. Watts.  $WB_n$  symmetry, Hamiltonian reduction and  $B(0, n)$  Toda theory. *Nuclear Phys.*, B 361(1):311–336, 1991.