数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 180-190

Algebraic aspects of branching laws for holomorphic discrete series representations

東京大学大学院数理科学研究科　北川 宜稔
Masatoshi Kitagawa
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

abstract

We consider the branching problem of holomorphic discrete series representations and their analytic continuation with respect to a symmetric subgroup of anti-holomorphic type. The main purpose is to prove the irreducibility of a $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', \Delta(G'))$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')_{\Delta(G')}$ for the underlying Harish-Chandra module V of a holomorphic discrete series representation and a 'generic' $(\mathfrak{g}', K')$-module V'. Comparing the branching law of unitary representations to this result, we conjecture that the irreducibility of the $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', \Delta(G'))$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')_{\Delta(G')}$ is related to the existence of a discrete spectrum.

1 導入

$G_{\mathbb{R}}$ を実簡約リー群とし、$G'_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の簡約な部分群とする。$G_{\mathbb{R}}$ と $G'_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群 $K_{\mathbb{R}}, K'_{\mathbb{R}}$ を、$K'_{\mathbb{R}} \subset K_{\mathbb{R}}$ となるようにとり固定する。これらのリー環を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ とし、複素化を $\mathbb{R}$ を付けずに $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', K, K'$ などと表す。よく知られている通り、$G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 V に対して、その $K_{\mathbb{R}}$-有限なベクトル全体の空間 V_K は既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群となる。

以下が本稿で扱う主な問題である。

問題. V の分岐則と V_K の分岐則の間にどのような関係があるか？

1990 年代の小林俊行氏による離散的分岐則の研究 ([8, 9, 11, 12] など) により、$(V_K)|_{(\mathfrak{g}', K')}$ が離散的に分解するという仮定の下では V と V_K の分岐則は等価であることがわかっている。

事実 1.1. 上の設定に加えて、$(V_K)|_{(\mathfrak{g}', K')}$ が離散的に分解すると仮定する。このとき、

$(V_K)|_{(\mathfrak{g}',K')}$ は既約 $(\mathfrak{g}',K')$-加群の直和に分解し、

$$V|_{G'_{\mathbb{R}}} \simeq \sum_{\pi\in\widehat{G'_{\mathbb{R}}}}^{\oplus} m(\pi)V_\pi \Leftrightarrow (V_K)|_{(\mathfrak{g}',K')} \simeq \sum_{\pi\in\widehat{G'_{\mathbb{R}}}} m(\pi)(V_\pi)_{K'}$$

となる。ここで、$\widehat{G'_{\mathbb{R}}}$ は $G'_{\mathbb{R}}$ のユニタリ双対、V_π は π の表現空間 (の一つ) とした。

上記の事実より、離散的に分解する場合は代数的な分岐則とユニタリ表現の分岐則の間に差異はない。一方で、$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の既約分解が連続スペクトルを持つような場合には、上記のような関係は成り立たない。例えば、$(V_K)|_{(\mathfrak{g}',K')}$ が離散分解しない場合には、$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ に既約部分表現が存在したとしても、$(V_K)|_{(\mathfrak{g}',K')}$ には既約部分加群が一切存在しない [12]。

このような結果が知られているが、ユニタリ表現の既約分解と $(\mathfrak{g},K)$-加群の分岐則の間に関係がないわけではない。直積分分解とリー環の作用に関する R. Goodman の結果 [2] と、直積分分解と閉作用素の分解に関する A. E. Nussbaum [17] の結果を合わせると以下の命題を示すことができる。

命題 1.2. $V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の既約分解を

$$V|_{G'_{\mathbb{R}}} \simeq \int_{\widehat{G'_{\mathbb{R}}}}^{\oplus} m(\pi)V_\pi d\mu(\pi)$$

とする。このとき、ほとんどすべての $\pi \in \widehat{G'_{\mathbb{R}}}$ に対して、$(\mathfrak{g}',K')$-加群の全射準同型

$$\varphi_\pi : V_K \to m(\pi)(V_\pi)_{K'}$$

が存在する。さらに、φ_π が $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'_{\mathbb{R}}}$-加群の準同型になるような、$m(\pi)(V_\pi)_{K'}$ 上の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'_{\mathbb{R}}}$-加群の構造が存在する。

上の命題より、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K,(V_\pi)_{K'})$ の次元や $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'_{\mathbb{R}}}$-加群の構造を調べることで、$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の既約分解の様子をいくらか読み取ることができる。

本稿では、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K,(V_\pi)_{K'})$ よりも大きな空間である $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_K,(V_\pi)_{K'})_{\Delta(G')}$ という $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}',\Delta(G'))$-加群の既約性を、$V$ が正則離散系列表現 (またはその解析接続) の場合に調べる。また、この $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}',\Delta(G'))$-加群の可約性と、$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の離散スペクトルとの関係についての予想を述べる。

2 設定

主結果に入る前に、設定を行い正則離散系列表現に関するいくつかの結果を復習する。

G を単連結連結単純複素リー群、$G_{\mathbb{R}}$ をその実形であってエルミート型であるものとする。θ を $G_{\mathbb{R}}$ のカルタン対合とし、σ を θ と可換な $G_{\mathbb{R}}$ の対合とする。$G'_{\mathbb{R}} := G^{\sigma}_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}} := G^{\theta}_{\mathbb{R}}, K'_{\mathbb{R}} := G'_{\mathbb{R}} \cap K_{\mathbb{R}}$ と置く。また、θ から定まるカルタン分解を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ とする。

注意 2.1. 議論を簡単にするため、$G_{\mathbb{R}}$ が単純リー群であるような対称対 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ を考えているが、以下の議論は $(G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{R}})$ に対しても同様に行うことができる。また、$G_{\mathbb{R}}$ を単連結な複素リー群の実形としたが、被覆をとっても問題ない。

$G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型であるという仮定から、$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ は一次元の中心を持つ。$Z \in \sqrt{-1}\mathfrak{c}(\mathfrak{k}_{\mathbb{R}})$ であって、$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Z)^2|_{\mathfrak{p}} = \mathrm{id}$ となる元を固定する。$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Z)$ に関する固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$$

とする。ここで、$\mathfrak{p}_{\pm} = \mathfrak{p}^{\pm \mathrm{ad}(Z)}$ である。$\mathfrak{q} := \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_+, \overline{\mathfrak{q}} := \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_-$ とおくと、これらは放物型部分代数になる。対応する G の放物型部分群を $Q, \overline{Q}$ とする。

このようにすると、自然な写像 $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}} \to G/\overline{Q}$ が開埋め込みになり、$G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ に複素構造が定まる。$\mathfrak{k}$ の指標 $(\lambda, \mathbb{C}_\lambda)$ に対して、

$$\mathcal{L}_\lambda := G_{\mathbb{R}} \times_{K_{\mathbb{R}}} \mathbb{C}_\lambda$$

とする。$\mathcal{O}(G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda)_K$ には既約な部分 $(\mathfrak{g}, K)$-加群がただ一つ存在することが知られているので、これを $\mathcal{H}_\lambda$ とする。

$\mathfrak{k}$ のカルタン部分代数をとり、正ルート $\Delta^+(\mathfrak{g})$ を $\Delta^+(\mathfrak{g}) \supset \Delta(\mathfrak{p}_+)$ となるように固定する。$\rho_{\mathfrak{g}}$ を正ルートの和の 1/2 とする。このとき、 Harish-Chandra による以下の結果が知られている。

事実 2.2. 任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}_+)$ に対して、$(\lambda + \rho_{\mathfrak{g}}, \alpha) < 0$ と仮定する。このとき、$\mathcal{O}(G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda) \cap L^2(G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda)$ は非零かつ $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現になる。

この事実によって定まる既約ユニタリ表現を正則離散系列表現と呼ぶ。事実 2.2 の仮定を満たしているとき

$$\mathcal{O}(G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda)_K = (\mathcal{O}(G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda) \cap L^2(G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda))_K = \mathcal{H}_\lambda$$

が成り立つ。

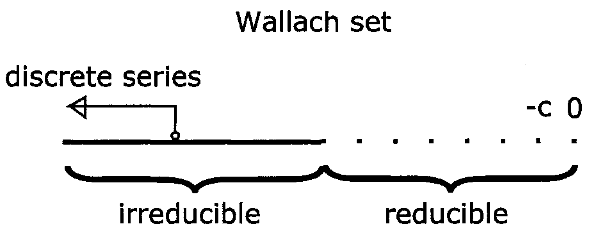
より一般に $\mathcal{H}_\lambda$ がいつユニタリ化可能かということについては、 F. A. Berezin [1], Vergne-Rossi [22], N. Wallach [23] によって決定されており、以下のようになる。

事実 2.3. $\mathcal{H}_\lambda$ がユニタリ化可能であることと、$\lambda(Z)$ が以下の集合 (Wallach set) の元であることは同値である。

$$(-\infty, -(r-1)c) \cup \{-(r-1)c, -(r-2)c, \ldots, -c, 0\}$$

ここで、r, c は $G_{\mathbb{R}}$ から定まるある定数である。

特に、$\lambda(Z) < -(r-1)c$ のとき、$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{O}(G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda)_K$ が成り立つ。本稿では、$\lambda(Z) < -(r-1)c$ を満たす λ を主に扱う。



$\mathcal{O}(G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda)_K$ is

3 分岐則

$\mathcal{H}_\lambda$ の分岐則について知られていることをまとめる。記号等は前節のものを用いる。

一般に $\mathcal{H}_\lambda$ の分岐則は無重複であることが、小林俊行氏によって示されている ([10, 13])。

事実 3.1. λ が Wallach set の元であると仮定する。このとき、$\overline{\mathcal{H}_\lambda}|_{G'_{\mathbb{R}}}$ は無重複 (i.e. $m(\pi) \leq 1$ μ-a.e.) である。

注意 3.2. この結果は、ベクトル束の場合にも拡張されている [13, 15]。

$\sigma(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$ なので、$\sigma(Z) = Z$ または $\sigma(Z) = -Z$ のいずれか一方が成り立つ。$\sigma(Z) = Z$ の場合 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ は正則型と呼ばれ、$\sigma(Z) = -Z$ の場合 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ は反正則型と呼ばれる。正則型であることと $G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ が複素部分多様体であることが同値であり、反正則型であることと $G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ が実形になっていることが同値である。また、正則離散系列表現 $\mathcal{H}_\lambda$ に対して、$(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が正則型であることと $\mathcal{H}_\lambda|_{(\mathfrak{g}', K')}$ が離散分解することは同値である [12, Section 5]。

以後、$(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ は反正則型であると仮定する。正則型の場合の分岐則については、[14] や上で挙げた小林氏による文献を参照されたい。

$(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ は反正則型であると仮定すると、$G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}}$ は $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ の実形になり、正則離散系列表現の制限 $\overline{\mathcal{H}_\lambda}|_{G'_{\mathbb{R}}}$ は連続スペクトルを持つ。より詳しく、以下の J. Repka [20] (テンソル積の場合)、 R. Howe [4] による結果が知られている。

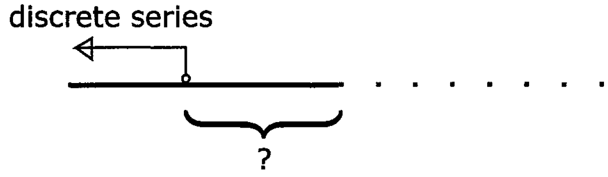
事実 3.3. 任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}_+)$ に対して、$(\lambda + \rho_{\mathfrak{g}}, \alpha) < 0$ と仮定する。(したがって、$\overline{\mathcal{H}_\lambda}$ は正則離散系列表現である。) このとき、以下のユニタリ表現の同型が存在する。

$$\overline{\mathcal{H}_\lambda}|_{G'_{\mathbb{R}}} \simeq L^2(G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_\lambda|_{G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}}})$$

注意 3.4. 事実 3.3 はベクトル束の場合に対しても示されている。

この事実から、$G'_{\mathbb{R}}$ が連結なら $\overline{\mathcal{H}_\lambda}$ が正則離散系列表現である限り、$\overline{\mathcal{H}_\lambda}|_{G'_{\mathbb{R}}}$ はパラメータ λ によらず同型なユニタリ表現になる。ただし、同型写像はパラメータ λ によって変化す

る。正則離散系列表現になるようなパラメータから外れると、事実 3.3 と同様のことは成り立たなくなることが知られている。



事実 3.5 (Ørsted–Zhang [18]). V_λ を $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の最高ウェイト λ のユニタリ最高ウェイト加群とする。$-\frac{1}{2} < \lambda < 0$ とする。このとき、

$$V_\lambda \widehat{\otimes} V_\lambda^* \simeq L^2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)) \oplus C_{1+2\lambda}$$

が成り立つ。ここで、$C_{1+2\lambda}$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の補系列表現である。(パラメーターは無限小指標で、自明表現の無限小指標が 1 になるように正規化している。)

4 主結果

事実 3.5 で見たように、$\overline{\mathcal{H}_\lambda}$ の分岐則は正則離散系列表現とそのパラメータの外では振る舞いが大きく変わってくる。この現象が $(\mathfrak{g}, K)$-加群側で捉えられるだろうかというのが、この節で扱う問題である。

$\mathcal{O}(G_\mathbb{R}/K_\mathbb{R}, \mathcal{L}_\lambda)_K$ が既約であると仮定すると、$\mathcal{H}_\lambda$ は一般化 Verma 加群と同型になる。

$$\mathcal{H}_\lambda \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda$$

この仮定は、$\lambda(Z) < -(r-1)c$ のときにはいつでも成り立つ。$\mathcal{O}(G_\mathbb{R}/K_\mathbb{R}, \mathcal{L}_\lambda)_K$ よりも、一般化 Verma 加群の方が扱いやすいため以下の議論では一般化 Verma 加群を用いる。

まず、一般化 Verma 加群を $(\mathfrak{g}', K')$ に制限したときに、どのような既約加群が商として現れるかを見る。命題 1.2 で見たように、どのような加群が商として現れるかを記述すればユニタリ表現の既約分解の台がおおよそ理解できる。

命題 4.1. W を $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}$ の既約な商加群とする。このとき、

1. W は一次元の K-type $\mathbb{C}_\lambda|_{K'}$ を重複度 1 で持つ。
2. また、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda, W)$ は一次元である。

これらの結果は事実 3.1 と事実 3.3 の $(\mathfrak{g}, K)$-加群における類似と捉えることができる。

Proof. $\sigma(Z)=-Z$ という仮定から、$\sigma(\mathfrak{p}_+)=\mathfrak{p}_-$ が成り立つ。したがって、

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^\sigma\oplus\mathfrak{p}_+=\mathfrak{p}^\sigma\oplus\mathfrak{p}_-,$$
$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'+\mathfrak{q}$$

となる。Poincaré–Birkhoff–Witt の定理と上の式を合わせると

$$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda)|_{(\mathfrak{g}',K')}\simeq\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{k}')}\mathbb{C}_\lambda$$

という同型を得る。よって、任意の $(\mathfrak{g}',K')$-加群 W に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda,W)\simeq\mathrm{Hom}_{K'}(\mathbb{C}_\lambda,W)$$

となるので、命題の主張が従う。

□

$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda,W)$ が常に 1 次元であることから、絡作用素の空間だけでは連続スペクトルに現れる表現なのか離散スペクトルに現れる表現なのかを知ることはできない、ということがわかる。$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda,W)$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda$ の $(\mathfrak{g}',K')$-加群の構造だけで定まり、$(\mathfrak{g},K)$-加群の構造や内積の情報を無視している。そこで、$(\mathfrak{g},K)$-加群の構造と分岐則の情報を両方反映したより大きな空間を考える。

定義 4.2. G' を $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(G'_{\mathbb{R}})$ の Zariski 閉包とする。$(\mathfrak{g},K)$-加群 V と $(\mathfrak{g}',K')$-加群 V' に対して、$(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}',\Delta(G'))$-加群を以下のように定義する。$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')$ には V と V' への作用から自然に $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}'$ と $\Delta(K')$ の作用が入る。ここで、Δ は対角な埋め込みである。$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')_{\Delta(G')}$ を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')$ の部分 $(\Delta(\mathfrak{g}'),\Delta(K'))$-加群であって $\Delta(G')$ の表現に持ち上がるもの全体の和とする。このようにすると、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')_{\Delta(G')}$ には $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}',\Delta(G'))$-加群の構造が入る。

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')_{\Delta(G')}$ の $\Delta(G')$-不変元全体は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V,V')$ となる。したがって、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')_{\Delta(G')}$ を考えることにより分岐則のより細かい情報を取り出すことができる。

主結果を述べる前に、'generic' $(\mathfrak{g}',K')$-加群を定義する。$Q'_{\mathbb{R}}=M'_{\mathbb{R}}A'_{\mathbb{R}}N'_{\mathbb{R}}$ を $G'_{\mathbb{R}}$ の極小放物型部分群とし、$\mathfrak{h}'$ を $\mathfrak{m}'\oplus\mathfrak{a}'$ のカルタン部分代数とする。$\rho(\mathfrak{n}')$ を $\Delta(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}')$ の元の和の 1/2 とする。

定義 4.3. $(\mathfrak{g}',K')$-加群 V' に対して、以下の性質を満たす $M'_{\mathbb{R}}A'_{\mathbb{R}}N'_{\mathbb{R}}$ の既約表現 (δ,V_δ) が存在するとき、V' は generic であるという。

- V' は $\mathrm{Ind}_{Q'_{\mathbb{R}}}^{G'_{\mathbb{R}}}(\delta)_{K'}$ の部分商である。
- $\delta|_{\mathfrak{m}'\oplus\mathfrak{a}'}$ の無限小指標を ν としたとき、

$$\frac{2(-\nu+\rho(\mathfrak{n}'))}{(\alpha,\alpha)}\notin\mathbb{Z}\text{ for any }\alpha\in\Delta(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}')$$

が成り立つ。

$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}^{-\sigma}$ の極大可換部分空間とする。$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{c}(\mathfrak{k}_{\mathbb{R}})$ を含むので、$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{-\sigma}$ の極大可換部分空間にもなっている。$(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ に関する正ルート $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ を $\Delta(\mathfrak{p}_+,\mathfrak{t})$ を含むように取る。β を $\Delta(\mathfrak{p}_+,\mathfrak{t})$ の最高ウェイト、γ を $\Delta(\mathfrak{n}',\mathfrak{a}')$ の最高ウェイトとする。以下の定理が、本稿における主結果である。

定理 4.4. V' を既約な generic $(\mathfrak{g}',K')$-加群とし、δ を定義 4.3 の条件が満たされるように取る。このとき、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda,V')_{\Delta(G')}$ が既約であることと、任意の $w\in W_{\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}}$ に対して

$$\pm\frac{(w(\nu-\rho(\mathfrak{n}))+\rho(\mathfrak{n}),\gamma)}{(\gamma,\gamma)}+\frac{(\lambda,\beta)}{(\beta,\beta)}\notin\mathbb{Z}$$

が成り立つことは同値である。ここで、$W_{\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}}$ は $(\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}},\mathfrak{a}'_{\mathbb{R}})$ に対する Weyl 群である。

この結果から、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda,V')_{\Delta(G')}$ は多くの V' に対して既約であることがわかる。$\overline{\mathcal{H}_\lambda}|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の離散スペクトルとして $\overline{V'}$ が現れるとき、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda,V')_{\Delta(G')}$ も特別な構造を持つと考えられる。これが以下の予想である。

予想 4.5. λ が Wallach set の連続な部分にあるとする。このとき、$G'_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 $\overline{V'}$ が $\overline{\mathcal{H}_\lambda}$ の部分表現に現れるなら、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\lambda,V')_{\Delta(G')}$ は可約である。

実際、この主張は事実 3.5 と同じ設定では正しい。

例 4.6. 事実 3.5 と同じ記号を用いる。$-\frac{1}{2}<\lambda<0$ とする。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の補系列表現 C_t に対して、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((V_\lambda)_K\otimes(V_\lambda^*)_K,(C_t)_K)_{\Delta(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))}$ が可約になるのは、$t=1+2\lambda$ のときかつそのときに限る。

5 証明の概略

証明の基本的な方針は、退化主系列表現の部分表現の構造を K-type 分解と $\mathfrak{p}$ の作用に分けて計算する平井武氏による方法 [3] と同様である。実際 $V'=\mathbb{C}$ の場合、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda,\mathbb{C})_{\Delta(G')}$ は $G_{\mathbb{R}}$ とは異なる実形の退化主系列表現となる。

$(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}',\Delta(G'))$-加群の構造を $(\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g}',\Delta(G'))$-加群としての既約分解と $\mathfrak{g}^{-\sigma}$ の作用に分けて計算する。重要な点として、定理の仮定の下では $(\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g}',\Delta(G'))$-加群としての既約分解が K-type 分解と類似の性質を満たすということがある。まずはそれについて述べる。

補題 5.1. V' は既約な generic $(\mathfrak{g}',K')$-加群とする。このとき、

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})}\mathbb{C}_\lambda,V')_{\Delta(G')}$ は $(\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g}',\Delta(G'))$-加群として、完全可約かつ無重

複である。

2. W を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda, V')_{\Delta(G')}$ の既約部分 $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}', \Delta(G'))$-加群とし、$F$ を $\Delta(G')$ の有限次元表現とすると、$W \otimes F$ は完全可約である。

この二つの性質から、$(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}', \Delta(G'))$-加群の既約分解を K-type 分解の代わりに用いることができる。$\mathfrak{g}^{-\sigma}$ の作用の計算は、 Jordan triple system を用いた退化主系列表現の部分加群の計算 (例えば、[5, 6], [21], [19], [16] 等) と同様である。

6 応用

定理の応用として二つの結果を述べる。

6.1 重複度と環の不変量

ここまでは直線束から作られる正則離散系列表現及びその解析接続を考えていたが、translation functor を用いることで、ベクトル束の場合に定理 4.4 を一般化することができる。つまり、一般の正則離散系列表現 $\mathcal{H}$ に対して、$(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', \Delta(G'))$-加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_K, V')_{\Delta(G')}$ は十分多くの V' に対して既約となる。$\Delta(G')$-不変な部分空間を取ることで、$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(\mathcal{H}_K, V')$ の既約性を導くことができる。これは、$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$ が $\mathcal{H}$ の分岐則をよく統制しているという主張である。ここから以下の結果を得る。

$G'_{\mathbb{R}}$ のユニタリ表現 V に対して、

$$\mathcal{M}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) := V \text{ の既約分解における重複度の上限}$$

と置く。

系 6.1. $(\pi, \mathcal{H})$ を $G_{\mathbb{R}}$ の正則離散系列表現とする。このとき、

$$\mathcal{M}_{G'_{\mathbb{R}}}(\mathcal{H}) = \mathrm{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}))$$

が成り立つ。ここで、$\mathrm{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}))$ は polynomial identity degree と呼ばれる環の不変量であり、$\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'})$ の既約加群の次元の上限と等しい。

$\mathrm{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}))$ は $\mathrm{Ker}(\pi)$ にのみ依存していることに注意されたい。

6.2 圏同値

$\mathcal{C}(\mathfrak{g}', K')$ を $(\mathfrak{g}', K')$-加群の圏、$\mathcal{C}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', \Delta(G'))$ を $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', \Delta(G'))$-加群の圏とする。

定理 4.4 は以下のように解釈することもできる。$X := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda$ とおき、関手 F を

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathcal{C}(\mathfrak{g}', K') & \to & \mathcal{C}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', K') \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & V' & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, V')_{\Delta(G')} \end{array}$$

と定める。この関手は以下の性質を持つ。

1. F は完全関手である。
2. V' が generic であれば、$F(V')$ は $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}', \Delta(G'))$-加群として無重複である。
3. V' が generic かつ既約であり、定理 4.4 の非整数性条件を満たすとき $F(V')$ は既約である。

generic な加群に対しては、$F(V')$ の部分加群の構造を決定することができるので、ここから generic な主系列表現の部分加群全体の成す束の構造や K-type を調べることができる。

注意 6.2. 3 つ目の性質において非整数性条件が必要だが、正則離散系列表現の代わりに G'/K' 上の $\mathcal{D}$-加群を用いることでこの条件を外すことができる [7, Proposition 3.1.5]。

generic な加群に対して、部分加群の成す束の構造は計算可能だが、各部分加群に関する具体的な情報、例えばユニタリ化可能性などがどの程度計算できるかは未着手である。

参考文献

[1] F. A. Berezin. Quantization in complex symmetric spaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(2):363–402, 472, 1975.

[2] R. Goodman. Complex Fourier analysis on a nilpotent Lie group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 160:373–391, 1971.

[3] T. Hirai. On infinitesimal operators of irreducible representations of the Lorentz group of n-th order. *Proc. Japan Acad.*, 38:83–87, 1962.

[4] R. Howe. Reciprocity laws in the theory of dual pairs. In *Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982)*, volume 40 of *Progr. Math.*, pages 159–175. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[5] K. D. Johnson. Degenerate principal series and compact groups. *Math. Ann.*, 287(4):703–718, 1990.

[6] K. D. Johnson. Degenerate principal series on tube type domains. In *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications (Tampa, FL, 1991)*, volume 138 of *Contemp. Math.*, pages 175–187. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[7] M. Kashiwara. Equivariant derived category and representation of real semisimple Lie groups. In *Representation theory and complex analysis*, volume 1931 of *Lecture Notes in Math.*, pages 137–234. Springer, Berlin, 2008.

[8] T. Kobayashi. The restriction of $A_q(\lambda)$ to reductive subgroups. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 69(7):262–267, 1993.

[9] T. Kobayashi. Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications. *Invent. Math.*, 117(2):181–205, 1994.

[10] T. Kobayashi. Multiplicity free theorem in branching problems of unitary highest weight modules. *Proceedings of Representation Theory held at Saga, Kyushu, 1997 (K. Mimachi, ed.)*, pages 9–17, 1997.

[11] T. Kobayashi. Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups. II. Micro-local analysis and asymptotic K-support. *Ann. of Math. (2)*, 147(3):709–729, 1998.

[12] T. Kobayashi. Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups. III. Restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties. *Invent. Math.*, 131(2):229–256, 1998.

[13] T. Kobayashi. Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 41(3):497–549, 2005.

[14] T. Kobayashi. Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs. In *Representation theory and automorphic forms*, volume 255 of *Progr. Math.*, pages 45–109. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.

[15] T. Kobayashi. Propagation of the multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles. In *Lie Groups: Structure, Actions, and Representations*, volume 306 of *Progr. Math.* Birkhäuser Basel, 2013.

[16] J. Möllers and B. Schwarz. Structure of the degenerate principal series on symmetric R-spaces and small representations. *J. Funct. Anal.*, 266(6):3508–3542, 2014.

[17] A. E. Nussbaum. Reduction theory for unbounded closed operators in Hilbert space. *Duke Math. J.*, 31:33–44, 1964.

[18] B. Ørsted and G. Zhang. L^2-versions of the Howe correspondence. I. *Math. Scand.*, 80(1):125–160, 1997.

[19] B. Ørsted and G. K. Zhang. Generalized principal series representations and tube domains. *Duke Math. J.*, 78(2):335–357, 1995.

[20] J. Repka. Tensor products of holomorphic discrete series representations. *Canad. J. Math.*, 31(4):836–844, 1979.

[21] S. Sahi. The Capelli identity and unitary representations. *Compositio Math.*, 81(3):247–260, 1992.

[22] M. Vergne and H. Rossi. Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group. *Acta Math.*, 136(1-2):1–59, 1976.

[23] N. R. Wallach. The analytic continuation of the discrete series. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 251:1–17, 19–37, 1979.