

## 波動乱流スペクトルの初期時間発展について

岐阜大学工学部 田中光宏 (Mitsuhiro Tanaka)

Faculty of Engineering, Gifu University

京都大学大学院工学研究科 横山直人 (Naoto Yokoyama)

Faculty of Engineering, Kyoto University

### 1 はじめに

無数の波列が、方程式もしくは境界条件に含まれる非線形性を通して、弱いながらも非線形相互作用を行いつつ、時間的空間的に共存している状態を「波動乱流」と呼ぶ。本研究では3波相互作用系のモデルとして以下の Hamilton 系を対象とする：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3, \quad (1a)$$

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega(\mathbf{k}) |a(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}, \quad (1b)$$

$$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{2} \int [V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) + \text{c.c.}] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_{123}. \quad (1c)$$

$$\begin{aligned} \frac{da(\mathbf{k})}{dt} &= -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*(\mathbf{k})} = -i \omega(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \\ &\quad - \frac{i}{2} \int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_{12} \\ &\quad - i \int V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k} - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_{12}, \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\omega(\mathbf{k}) = k^{3/2}, \quad V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = (k k_1 k_2)^{1/4}. \quad (2b)$$

ここで  $\mathbf{k}$  は2次元波数ベクトル、 $\omega(\mathbf{k})$  と  $a(\mathbf{k})$  はそれぞれ、波数  $\mathbf{k}$  のモードの線形振動数および複素振幅を表す。 $a^*$  は  $a$  の複素共役、c.c. は前にある項の複素共役を表す。また、 $V_{012} = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ 、 $\delta_{0-1-2}^k = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ 、 $a_0 = a(\mathbf{k})$  などの略記法を用いた。また  $k = |\mathbf{k}|$ 。分散関係  $\omega(\mathbf{k}) = k^{3/2}$  は水面波における表面張力波の分散関係と同じ形であり、3波共鳴

$$\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = 0, \quad \omega_0 \pm \omega_1 \pm \omega_2 = 0 \quad (3)$$

を許す。なお、(2b) で示した相互作用の核関数  $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  の形は、非線形項の畳み込み積分が高速フーリエ変換で容易に評価できるように適当に選んだもので、特に物理的な意味はない。

波動乱流におけるエネルギースペクトル  $E(\mathbf{k})$  の発展に対しては、Hasselmann[1] による事実上の標準理論がある。この理論はもともと4波系、すなわち分散関係が3波共鳴を許さないような系に対して考案されたものであるが、その精神を3波系(2)に適用した場合、アクションスペクトル  $n(\mathbf{k}) (= E(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k}))$  の時間発展は以下の「Hasselmannの式」で記述される：

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= \pi \int |V_{012}|^2 \{n_1 n_2 - n_0 (n_1 + n_2)\} \delta_{0-1-2}^\omega \delta_{0-1-2}^k d\mathbf{k}_{12} \\ &\quad - 2\pi \int |V_{102}|^2 \{n_0 n_2 - n_1 (n_0 + n_2)\} \delta_{1-0-2}^\omega \delta_{1-0-2}^k d\mathbf{k}_{12}. \end{aligned} \quad (4)$$

これに対して Janssen[2] は、多重尺度展開の手法を用いて「Janssen の式」

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & \int |V_{012}|^2 \{n_1 n_2 - n_0(n_1 + n_2)\} \frac{\sin(\omega_{012} t)}{\omega_{012}} \delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} \\ & - 2 \int |V_{102}|^2 \{n_0 n_2 - n_1(n_0 + n_2)\} \frac{\sin(\omega_{102} t)}{\omega_{102}} \delta_{1-0-2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

を導出している。ここで  $\omega_{012}$  は「振動数ミスマッチ」 $\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)$  を表す ( $\omega_{102}$  も同様)。 (5) に、 $t \rightarrow \infty$  で成立する関係  $\sin(\Delta\omega t)/\Delta\omega \rightarrow \pi \delta(\Delta\omega)$  を適用して、共鳴相互作用の効果のみを抽出すれば (4) に帰着する。なお (5) の導出では、初期時刻  $t=0$  において  $\langle a_1^* a_2 a_3 \rangle = 0$ 、すなわち 3 次のキュムラントが 0 であることが仮定されている。

我々は以前の論文 [3] で 3 波相互作用系 (1)~(3) の直接数値シミュレーション (DNS) を行ったが、その研究の過程で興味深い結果を見出した。すなわち、スペクトルの時間発展のごく初期段階である  $t = 1T_p$  と  $t = 2T_p$  のほんの 1 周期間のスペクトル変化から評価したスペクトル変化率が、Hasselmann の式が与えるスペクトル変化率とほとんど一致するというものであった。ここで  $T_p$  はスペクトルピークに対応する周期を表す。上述したように、Hasselmann 式 (4) の導出には、 $t \rightarrow \infty$  という極限操作が必須であるにも関わらず、この DNS の結果は、非常に短い線形の時間スケールにおいて、すでに (4) が成立していることを示唆している。一見して奇妙なこの数値計算結果が本研究の契機であり、それについて詳細に調査し、原因を解明することが本研究の目的である。

以下では、Hasselmann の式 (4) が与えるエネルギー・スペクトル変化率  $dE/dt$  の値を  $dE_H$ 、Janssen の式 (5) が与える値を  $dE_J$ 、DNS から推定した値を  $dE_{DNS}$  とそれぞれ表記する。

- $dE_J$  と  $dE_H$  にどの程度の差があるのか。
- $dE_J$  が実質的に  $dE_H$  と等しい値を与えるようになるためには、どの程度の時間経過が必要なのか。またそれは着目する波数領域に依存するのだろうか。
- $dE_J$  は  $t \gg 1$  において  $dE_H$  にどのように漸近するのか。単調なのか、それとも減衰振動的なのか。

などの点に関しては未だ系統的な研究がなされていない。本研究では上記の 3 波系モデルを対象として、DNS の結果と比較しつつ、これらの点について具体的な検討を行った。詳細は近日執筆予定の本論文に譲ることとし、本講究録ではその概要のみを報告する。

## 2 手法

DNS の初期スペクトルには海洋波の Pierson-Moskowitz スペクトルを参考にして、以下の等方性スペクトルを採用した：

$$H_2 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2, \quad |a_{\mathbf{k}}|^2 = A k^{-6.5} \exp(-1/k^4) D(k), \quad (6a)$$

$$D(k) = \begin{cases} 1, & (0 < k < 7) \\ \exp(-10(k-7)^2), & (7 \leq k \leq 8). \end{cases} \quad (6b)$$

各  $a_{\mathbf{k}}$  の初期位相は  $[0, 2\pi]$  の一様乱数で与えた。この結果、 $t=0$  においては式 (5) 導出の前提になっている  $\langle a_1^* a_2 a_3 \rangle = 0$  という性質が DNS においても成立しており、両者を比較することは合理

的である。(6)に含まれる係数  $A$  は波動場のエネルギー密度、すなわち非線形性の度合いをコントロールするパラメタであり、弱非線形性を前提とする波動乱流理論と整合するように十分小さく取っている。

初期スペクトルも結合係数  $V_{012}$  も等方的なので、スペクトルは任意時刻において等方的である。このことから、以下においては、もっぱら  $k (= |k|)$  に関する1次元エネルギースペクトル  $E(k)$ 、およびその時間変化率  $dE(k)/dt$  を議論の対象とする。

### 3 結果

#### 3.1 $dE(k)$ の振舞い

図1(a),(b)は、それぞれ  $t = 0.3T_p$  および  $t = 2.0T_p$  における  $dE_H(k)$ 、 $dE_J(k)$ 、および  $dE_{DNS}(k)$  を示している。 $dE_{DNS}(k)$  は  $T_p/10$  毎に出力した  $E(k)$  の値から差分近似で推定している。なお  $T_p$  はスペクトルピークに対応する周期で、 $T_p = 2\pi$  である。これらの図から、 $dE_{DNS}(k)$  はスペクトル

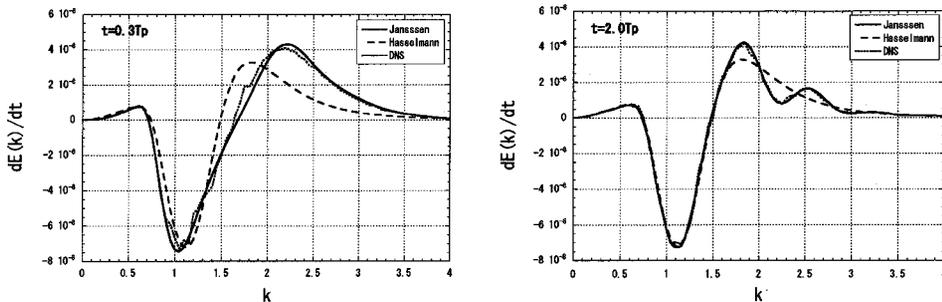


図1:  $dE(k)/dt$  の比較。(a):  $t = 0.3T_p$ , (b):  $t = 2.0T_p$ .

ルピークの周期に比べて速い時間スケールで大きく変動していること、 $dE_J(k)$  はその速い変動を正確に捉えているのに対し、 $dE_H(k)$  は追従することができないこと、などが分かる。

なお、図で見ると、 $dE/dt$  は変動は速いものの、その値は非常に小さい。そのため、エネルギースペクトル自身  $E(k)$  の変動は遅く、ここで問題にしているような短時間では実質的には変化しない。このことから、ここでの  $dE_J(k)$  および  $dE_H(k)$  の評価においては、 $E(k)$  は初期スペクトルに固定している。したがって式中に生じた  $t$  を含まない  $dE_H(k)$  は時間的に一定である。

次に、 $k$  を固定して、 $dE_J(k)$  が時間的にどのように  $dE_H(k)$  に漸近するのかを調べた。例として  $k = 2.0$  における  $dE_J(k)$  と  $dE_H(k)$  を図2(a)に示す。 $dE_J$  の  $dE_H$  への漸近が減衰振動的であることを示している。また図2(b)は両者の差の極大値の時間変化を両対数グラフで示したものであるが、振動振幅がほぼ  $t^{-1}$  で減少していることが分かる。図には示さないが、 $k = 3.0$  においても  $dE_J$  の  $dE_H$  への漸近は減衰振動的であり、振動振幅は  $k = 2.0$  と同様、 $t^{-1}$  で減少する。ただし、振動周期は  $k = 2.0$  に比べて短い。一方、低波数領域の  $k = 0.6$  では  $dE_J$  は指数関数的に急速に  $dE_H$  に漸近するようである。波動乱流理論において、Janssen の式(5)から Hasselmann の式(4)を導出する過程は、形式上は単に  $\sin(\Delta\omega t)/\Delta\omega \rightarrow \pi\delta(\Delta\omega)$  ( $t \rightarrow \infty$ ) という極限操作を行うに過ぎない。しかし、 $dE_J$  の Hasselmann 極限  $dE_H$  への漸近のしかたは、着目する波数領域によってこのように大きく異なっているのである。

多くの  $k$  において  $dE_J(k, t)$  と  $dE_H(k)$  の差  $D(k, t) = dE_J(k, t) - dE_H(k)$  を  $t$  についてフーリエ変換して、周波数スペクトル  $S(\omega)$  を求め、それが最大値を取る振動数  $\omega_p$  を波数  $k$  の関数としてプ

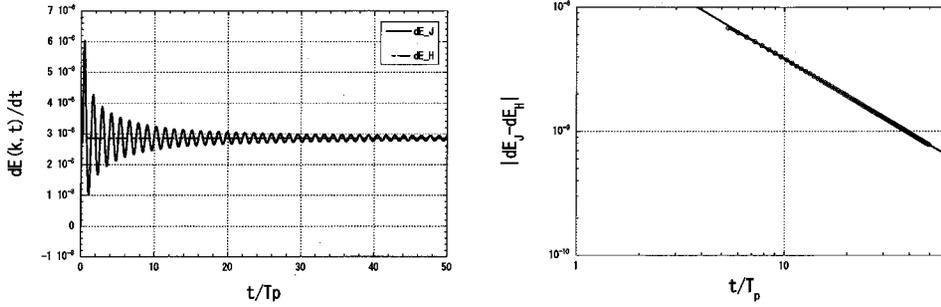


図 2:  $dE_J$  の  $dE_H$  への漸近.  $k = 2.0$ . (a)  $dE_J(t)$  と  $dE_H(t)$ , (b)  $|dE_J(t) - dE_H(t)|$

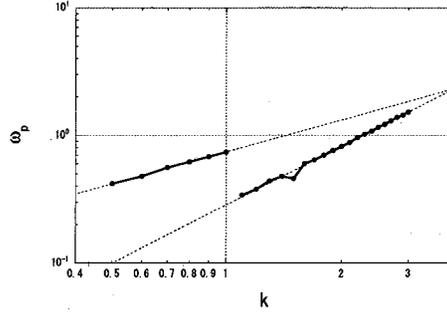


図 3: 差  $D(k, t)$  の周波数スペクトル  $S(\omega)$  のピーク振動数  $\omega_p(k)$

ロットすると図3のようになる.  $E(k)$  のスペクトルピーク波数  $k = 1$  を挟んで, 明らかに振舞いが異なっていることがわかる. 相対的に高波数の領域 ( $k > 1$ ) においては,  $D(k, t) = dE_J(k, t) - dE_H(k)$  は明瞭な振動数を持つ減衰振動で, その振動数  $\omega_p$  は  $k$  について,  $\omega_p \propto k^{3/2}$  のように依存する. このべきは系の分散関係のそれと等しいことに注意する. 一方, 相対的に低波数領域 ( $k < 1$ ) においては, 差  $dE_J(k, t) - dE_H(k)$  の周波数スペクトルはあまり明瞭なピークを示さないが, あえて最大値を以てピーク振動数  $\omega_p$  を定義すると, 高波数域同様やはり  $k$  のべき乗に従うようであるが, そのべきは高波数領域と異なり,  $\omega_p \propto k^{0.83}$  程度となっている.

### 3.2 振動数ミスマッチによる整理

Janssen の式 (5) は以下のように  $k_1$  平面上の積分として表すことができる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{k})}{\partial t} = & \int |V_{01(0-1)}|^2 \{n_1 n_{0-1} - n_0 (n_1 + n_{0-1})\} \frac{\sin(\omega_{01(0-1)} t)}{\omega_{01(0-1)}} d\mathbf{k}_1 \\ & - 2 \int |V_{10(1-0)}|^2 \{n_0 n_{1-0} - n_1 (n_0 + n_{1-0})\} \frac{\sin(\omega_{10(1-0)} t)}{\omega_{10(1-0)}} d\mathbf{k}_1. \end{aligned} \quad (7)$$

前小節で示した  $dE_J(k)$  の値は,  $\mathbf{k}_1$  ベクトル平面を 1 辺  $dk_1 = 1 \times 10^{-3}$  の正方形メッシュに分割し, 各メッシュからの寄与の代数和で (7) の積分を数値的に評価し,  $n(\mathbf{k})$  と  $E(k)$  の関係

$$E(k) = 2\pi k \omega(k) n(k) \quad (8)$$

を用いて  $dE$  に換算することで得たものである。

(7) の  $k_1$  に関する積分は、 $k_1$  平面の各メッシュからの寄与を  $k_1$  そのものではなく、そこにおける振動数ミスマッチ  $\omega_{01(0-1)} = \omega_0 - \omega_1 - \omega_{0-1}$  や  $\omega_{10(1-0)} = \omega_1 - \omega_0 - \omega_{1-0}$  の値ごとに一旦整理し、後に  $\omega_{01(0-1)}$  や  $\omega_{10(1-0)}$  について足し上げることで、 $\omega_{01(0-1)}$  および  $\omega_{10(1-0)}$  についての積分に変換することができる。この変数変換を解析的に行おうとすると非常に煩雑になるが、数値計算上は上記のような手続きでごく簡単に実行することができる。この結果、

$$\begin{aligned} dE_J(k) &= \int f_1(\omega_{01(0-1)}) \frac{\sin(\omega_{01(0-1)} t)}{\omega_{01(0-1)}} d\omega_{01(0-1)} - 2 \int f_2(\omega_{10(1-0)}) \frac{\sin(\omega_{10(1-0)} t)}{\omega_{10(1-0)}} d\omega_{10(1-0)} \\ &= \int f_{12}(\Delta\omega) \frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega} d\Delta\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

と書けるような  $f_1(\Delta\omega)$ ,  $f_2(\Delta\omega)$ ,  $f_{12}(\Delta\omega)$  の値を知ることができる。

$f(x)$  を幅  $2a$ , 高さ 1 のトップハット関数、またそのフーリエ変換を  $F(k)$  とすると

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k} \quad (10)$$

が成り立つ。このことを使うと、 $\mathcal{F}[f_{12}(\Delta\omega)] = F_{12}(\tau)$  と表すとき、式(9)は以下のように書くことができる：

$$dE_J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(\Delta\omega) \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega} d\Delta\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-t}^t F_{12}(\tau) d\tau = \sqrt{2\pi} \int_0^t \text{Re}[F_{12}(\tau)] d\tau. \quad (11)$$

したがって、 $f_{12}(\Delta\omega)$  の  $\Delta\omega$  依存性、もしくは、その Fourier 変換  $F_{12}(\tau)$  の  $\tau$  依存性を調べることによって、Janssen の式が与えるスペクトル変化率  $dE_J(k)$  の振舞いを理解することができる。

なお、(11) の右辺に  $t \rightarrow \infty$  の極限を適用すると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(\Delta\omega) \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega} d\Delta\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(\tau) d\tau = \pi f_{12}(0), \quad (12)$$

すなわち

$$\frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega} \rightarrow \pi \delta(\Delta\omega) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (13)$$

となるが、これは Janssen の式が  $t \rightarrow \infty$  の極限で Hasselmann の式に帰着すること、また  $dE_H = \pi f_{12}(0)$  が成り立つことを示している。

### 3.3 $dE_J(k, t)$ の減衰振動的振る舞いについて

$k_0$  を固定したとき、「和の相互作用」 $k_0 = k_1 + k_2$  の振動数ミスマッチ  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$  には有限の最大値が存在する。 $k_0 = (k_0, 0)$  とした場合、それは  $k_1 = k_2 = (k_0/2, 0)$  のときに起こり、そのとき

$$\Delta\omega = \Delta\omega_m = k_0^{3/2} \left\{ 1 - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^{3/2} \right\} \approx 0.293 k_0^{3/2}. \quad (14)$$

この結果、 $\Delta\omega > \Delta\omega_m$  では  $f_1(\Delta\omega) = 0$  となり、 $f_1(\Delta\omega)$ 、したがって  $f_{12}(\Delta\omega)$  は  $\Delta\omega = \Delta\omega_m$  において有限の不連続を持つ。図4は  $k_0 = 2.0$  に対する  $f_1(\Delta\omega)$ ,  $f_2(\Delta\omega)$  および  $f_{12}(\Delta\omega)$  を示す。この図から分かるように、本研究で対象としているスペクトル形(6)に対しては、関係する  $k_0, k_1,$

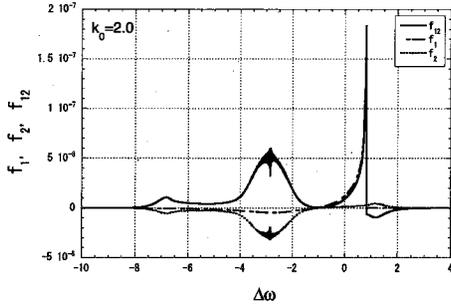


図 4:  $f_1(\Delta\omega)$ ,  $f_2(\Delta\omega)$  および  $f_{12}(\Delta\omega)$ . ( $k_0 = 2.0$ )

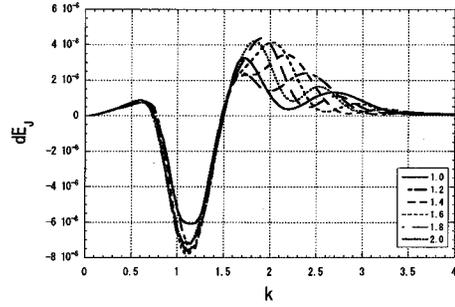


図 5:  $dE_J(k)$  の時間変化 ( $1T_p \leq t \leq 2T_p$ ;  $\Delta t = 0.1T_p$ )

$k_2$  のすべてが比較的高いエネルギー密度の波数域に対応する  $k_0 = 2.0$  に対しては、この  $f_{12}(\Delta\omega)$  の不連続が顕著に現れる。なお図 4 から、(12) が要求するように、 $\Delta\omega = 0$  における  $\pi f_{12}(\Delta\omega)$  の値が確かに Hasselman の値  $dE_H$  に一致することを確認することもできる。

一般に  $\omega$  の関数  $f(\omega)$  が  $\omega_0$  において、その関数値や微分係数に不連続  $[f(\omega_0)] := f(\omega_0+) - f(\omega_0-)$ ,  $[f'(\omega_0)] := f'(\omega_0+) - f'(\omega_0-)$  などを持つとき、その Fourier 変換  $F(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  において

$$\sqrt{2\pi}F(t) = \left( \frac{[f(\omega_0)]}{it} + \frac{[f'(\omega_0)]}{(it)^2} + \frac{[f''(\omega_0)]}{(it)^3} + \dots \right) e^{-i\omega_0 t} \quad (15)$$

のように  $t$  の逆べき展開で表すことができる。したがって、 $f_{12}(\Delta\omega)$  が  $\Delta\omega = \Delta\omega_m$  において顕著な不連続  $[f_{12}(\Delta\omega_m)]$  を持つ場合、その Fourier 変換  $F_{12}(\tau)$  は

$$F_{12}(\tau) \approx \frac{[f_{12}(\Delta\omega_m)]}{it} e^{-i\Delta\omega_m t} \quad (16)$$

のような振舞いを示すと考えられる。

ただし、(11) が示すように、 $dE_J$  は  $F_{12}(t)$  の時間積分で与えられるため、長時間後の  $dE_J$  の振る舞いには、 $t$  が大きくない領域における  $F_{12}(t)$  も少なからぬ寄与をもたらすであろう。しかし、 $dE_J$  の減衰振動的な振る舞いの原因は明らかに、 $\Delta\omega_m$  における  $f_{12}(\Delta\omega)$  の不連続であると考えられる。そこで、この  $f_{12}(\Delta\omega)$  の不連続からの寄与と、それ以外の連続部分からの寄与を分離して、

$$\sqrt{2\pi}\text{Re}\{F_{12}(t)\} = [f_{12}(\Delta\omega_m)]\text{Re}\left\{\frac{e^{-i\Delta\omega_m t}}{it}\right\} + \tilde{F}_{12}(t) = -[f_{12}(\Delta\omega_m)]\frac{\sin\Delta\omega_m t}{t} + \tilde{F}_{12}(t) \quad (17)$$

と表すことにすると、

$$dE_J(k_0) = -[f_{12}(\Delta\omega_m)] \int_0^t \frac{\sin\Delta\omega_m \tau}{\tau} d\tau + d\tilde{E}_J = -[f_{12}(\Delta\omega_m)] \text{Si}(\Delta\omega_m t) + d\tilde{E}_J. \quad (18)$$

ここで  $d\tilde{E}_J$  は  $f_{12}(\Delta\omega)$  が連続な部分からの  $dE_J$  への寄与を表し、 $[f_{12}(\Delta\omega_m)]$  を含む第 1 項に比べ、時間的に急速に漸近値 (=  $dE_H$ ) に近づく。また、Si は正弦積分

$$\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin x'}{x'} dx' \quad (19)$$

を表す。

(14) を用いると,  $k = k_0$  における  $dE_J(k_0, t)$  の時系列に,  $n$  個目の極大が発生する時刻  $t_n$  は

$$t_n = \frac{(2n-1)\pi}{\Delta\omega_m(k_0)} \approx \frac{(2n-1)\pi}{0.293 k_0^{3/2}} \quad (20)$$

で与えられることになる。この結果,  $dE_J(k_0, t)$  の時系列に見られる極大は,  $k_0$  が大きい高波数域ほど早く出現し, 次第に低波数側に向かって移動していくことが予想される。図5は  $1T_p \leq t \leq 2T_p$  の間の  $dE_J(k, t)$  を  $0.1T_p$  間隔で示したものであるが, 確かにそのような振る舞いを見ることができる。

正弦積分  $\text{Si}(x)$  の  $x \rightarrow \infty$  での漸近展開

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \left( 1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) - \frac{\sin x}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right) \quad (21)$$

によると,  $\text{Si}(x)$  の  $x = (2n-1)\pi$  における極大値  $\text{Si}_n$  は  $n \rightarrow \infty$  で

$$\text{Si}_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (22)$$

で与えられる。これと (18) より,  $dE_J$  の振動振幅, したがって  $|dE_J - dE_H|$  の振幅は,  $t \rightarrow \infty$  で  $-[f_{12}(\Delta\omega_m)]/t$  となることが期待されるが, これについても, 図2の結果と定量的によく一致することを確認することができる。以上の考察から, スペクトルピーク波数の2倍程度以上の高波数領域において見られる,  $dE_J(k, t)$  の  $dE_H(k)$  への減衰振動的な漸近的アプローチについては, 非共鳴和相互作用における振動数ミスマッチ  $\Delta\omega_m$  に上限が存在し, それに伴って発生する  $f_{12}(\Delta\omega)$  の不連続的な跳びに起因していることが確認された。

一方, スペクトルピーク波数より低波数側の  $k_0 = 0.6$  においてみられる  $dE_J$  の  $dE_H$  への指数関数的な漸近については明快な理解は得られていないが, 本研究が対象とするスペクトルがピーク波数の低波数側で指数関数的に急激に減少していること, および,  $f_{12}(\Delta\omega)$  に不連続が現れないこと, などを考慮すれば定性的には理解できるものと考えている。

本研究の結果は, 分散関係  $\omega = k^{3/2}$ , 相互作用の核関数  $V_{012}$ , 初期スペクトル  $E(k, 0)$  などの選択に大きく依存している。しかし, 和相互作用の振動数ミスマッチに上限があり, そこで  $f_{12}(\Delta\omega)$  に跳びが発生する場合には, ある波数領域においては,  $dE_J$  が  $dE_H$  に  $1/t$  程度の速さで減衰振動的に近づくという結果は, 汎用性があるものと考えられる。

本研究により, 少なくともある波数領域においては,  $dE_J$  と  $dE_H$  の間には相対的に  $O(1)$  の差異があり, またそれは時間に関して  $1/t$  程度でゆっくりしか減少しないことが分かった。しかし, 差が時間に関して振動的であるため, その積分量であるスペクトル自体の変化量には有意な差は生じない。このため, スペクトル自体の予測を目的とする場合, 初期時刻から Hasselmann 理論を適用したとしても, 実質的な弊害はないであろうと思われる。

Hasselmann 理論および Janssen 理論はもともとは, 3波共鳴相互作用を許さない4波系, 具体的には, 分散関係として  $\omega = k^{1/2}$  を持つ水面重力波に対する理論として構築されたものである。その意味で, ここで扱った3波系ではなく, 4波系における両理論の関係を調べることは, より一層重要で興味深い問題であるが, それについては今後の課題としたい。

## 参考文献

- [1] Hasselmann, K., On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory, J. Fluid Mech. 12 (1962), 481-500.

- [2] Janssen, P.A.E.M., Nonlinear four-wave interactions and freak waves, *J. Phys. Oceanogr.* 33 (2003), 863–884.
- [3] Tanaka, M. and Yokoyama, N., Numerical verification of the random-phase-and-amplitude formalism of weak turbulence, *Phys. Rev. E* 87 (2013), 062922.
- [4] Y. V. Lvov, Y.V. and Nazarenko, S., Noisy spectra, long correlations, and intermittency in wave turbulence, *Phys. Rev. E* 69, 066608 (2004), 6pp.