

磁性流体界面解析の改良条件

元 北海道大学大学院・工学研究院 水 田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

磁性流体の界面には、他では見られない興味深い現象が現れる。たとえば臨界強度を越えた印加磁場による界面形状遷移では、最初は平らな界面上で、様々な非線形相互作用により界面量の波数成分が多数生じて、やがて大部分は減衰し、残る少数の成分が規則格子状の界面形状を形成すると考えられる。この遷移過程を実時間で調べる際は、現象が速やかなため、より一層正しく磁場解析と流体解析を行うことが必要になる。本稿では主に、数値的に求めた界面量、特に界面応力を検証するための条件を考察する。

本研究の数値解析では、汎用磁場解析 (Magnetic Analysis for General Use, MAGU) [1, 2, 3, 4, 5] により、ある界面変位 ζ における界面磁場 $h_{x,y}, b_z$ をまず求め、これらから求めた磁気応力差 T を重力・表面張力などと合わせて界面応力和 S とする。次に、 S を含む界面力学方程式 (Equation for Interface Motion, EIM) [5, 6, 7] を時間積分して、新たな ζ を求める。このときの検証には、EIM の時間積分ではエネルギー保存則 (Law of Conservation of Energy, LCE) [7, 8, 9] を、 S 自身の物理的妥当性では「界面エネルギー密度と界面応力の関係 (RELA)」を利用するが、特に T の検証には、Ampère の法則・Gauss の法則などの磁場法則を前提に「磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係 (MRELA)」を用いる。

MRELA は、熱力学的考察に基づいたり [10]、Lorentz 力と Joule 損失を用いたり [11]、波数空間において [12] など、いくつかの方法で導かれている。しかし本研究では MRELA を、実空間で無電流系の数値解析を検証するために利用する。このため、4 節で MRELA を改めて導いた後、5 節では、あるモデル磁場において、界面変位と磁気界面エネルギー密度の関係を確認する。

2 汎用磁場解析と界面力学方程式

汎用磁場解析では、界面形状や印加磁場分布が任意でも、調和性と界面条件を満たす磁場を界面に限って厳密に求める。ここで調和性は、磁場 \mathbf{h} と磁束密度 \mathbf{b} が流体(1)・真空(2)各領域の透磁率 μ_j ($j = 1/2$) を通じて $\mathbf{b} = \mu_j \mathbf{h}$ と関係し、Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{0}$ と Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ を満たすこと、また界面条件は、界面で接線磁場を $h_{X,Y}$ 、法線磁束密度を b_Z 、界面を横切る値の跳び(真空-流体)を $[\dots]$ と表すとき、界面条件 $[h_{X,Y}] = 0$ 、 $[b_Z] = 0$ が成り立つことである(このことを考慮して、両領域の $h_{X,Y}$ 、 b_Z を始めから区別しない)。

上記の条件を満たす磁場は、界面に限って次のように求める。界面磁場 $h_{X,Y}$ 、 b_Z は、既知の外部印加磁場 \mathbf{h}^0 より直接定義できる基本場 $h_{X,Y}^0 = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{h}^0$ 、 $b_Z^0 = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0 / P$ と、基本場と合わせて調和性と界面条件を満たす誘導場 $h_{X,Y}^1$ 、 b_Z^1 に分ける。ここで、 $\mathbf{t}_{X,Y}$ 、 \mathbf{t}_Z は接線および法線単位ベクトル、また、 $P \equiv (1/\mu_2 + 1/\mu_1)/2$ 、 $M \equiv (1/\mu_2 - 1/\mu_1)/2$ である。

誘導場は、次の3次元界面磁場方程式から求める [1, 2, 3, 4, 5]。

$$\begin{cases} b_Z^1 = \hat{H}_Z (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0, \\ h_{X,Y}^1 = \hat{H}_{X,Y} (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0. \end{cases} \quad (1)$$

ここでは、 \mathbf{r} 、 \mathbf{r}' を観測点と界面 F 上のソース点の位置ベクトル、 ι を \mathbf{r}' に関する微分または \mathbf{r}' だけの関数、 $\psi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = -1/4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ を3次元 Poisson 方程式 $\Delta' \psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の基本解、 $\iint_F dS'$ を F 上の \mathbf{r}' にわたる面積分として、次のように3次元 Hilbert 変換演算子 \hat{G}_I または \hat{H}_I を定義した。

$$\hat{G}_I g(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{t}_I \cdot \hat{G} g(\mathbf{r}'), \quad \hat{G} g(\mathbf{r}) \equiv 2 \iint_F dS' (\nabla' \psi) g(\mathbf{r}'), \quad (I=X, Y, Z), \quad (2)$$

$$\hat{H}_{X,Y} g(\mathbf{r}) \equiv -M \hat{G}_{X,Y} g(\mathbf{r}), \quad \hat{H}_Z g(\mathbf{r}) \equiv -(M/P) \hat{G}_Z g(\mathbf{r}). \quad (3)$$

与えられた界面応力和 S から界面変位 ζ の時間変化を求め、界面の運動を解析するには、界面力学方程式を用いる。 ζ 、 S を、界面に沿う一般化座標 $\mathbf{R} = (X, Y)$ の関数として、波数成分 \mathbf{k} の周期関数の重ね合わせで表す。

$$\zeta(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}), \quad S(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}). \quad (4)$$

磁性流体を非圧縮・非粘性・渦なしとすると、流体の運動方程式の界面方

向成分に運動学的条件・力学的条件を用いると、界面力学方程式は次のようになる [5, 6, 7].

$$0 = \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} \right) - \frac{1}{k} \nabla_2^2 S_k \right\}. \quad (5)$$

ここで、 $\rho, \nabla_2 = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$ は流体密度・接線方向偏微分、また $k = |\mathbf{k}|$ である。界面の運動は、 $S_k(\mathbf{R})$ を決めて (5) を時間積分して $\zeta_k(\mathbf{R})$ を求めれば、界面形状に制限なく全ての非線形効果を取り込んで解析できる。

界面力学方程式 (5) の両辺に $\partial \zeta / \partial t$ をかけて、界面 F 全体で平均する。界面平均を $\langle \dots \rangle \equiv (1/F) \iint_F dX dY \dots$ と表し、周期関数に対して、 $\nabla_2^2 S_k + k^2 S_k = 0$ および直交性 $\langle \zeta_{k_1}(\mathbf{R}) \zeta_{k_2}(\mathbf{R}) \rangle = 0$ ($k_1 \neq k_2$) を考慮すれば、エネルギー保存則

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \frac{\rho}{2k} \left\langle \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial t} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial t} S \right\rangle \quad (6)$$

が導かれる [7, 8, 9]。ここで、右辺第1項は運動エネルギーの時間変化、第2項は界面応力和による仕事 (いずれも単位時間・単位面積あたり) である。(6) は、(5) の数値積分の正しさの評価基準となる。しかし、 S 自身の物理的な正しさは、次節に述べる方法で確かめる。

3 界面エネルギー密度と界面応力の関係

S は ζ に応じて決まるので、以後 $S(\zeta)$ と表す。 S とは別に、任意の ζ で界面エネルギー密度 $U(\zeta)$ (Flat Space における単位面積当たりのエネルギー) を求められるようにしておき、 $\delta \zeta$ を微小として、次の関係を確かめる。

$$\delta U \equiv U(\zeta + \delta \zeta) - U(\zeta) = S(\zeta) \delta \zeta. \quad (7)$$

以後、 $\delta \zeta$ による物理量の変化を δ で表す。

重力加速度・界面形状の主曲率・表面張力係数を $g, \kappa_{1,2}, \gamma$ とすれば、界面応力和 $S(\zeta)$ と $S(\zeta)$ を構成する重力ポテンシャル $G(\zeta)$ ・表面張力 $C(\zeta)$ は

$$S(\zeta) = G(\zeta) + C(\zeta) + T(\zeta), \quad G(\zeta) = \rho g \zeta, \quad C(\zeta) = -\gamma(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (8)$$

となり、これらには、界面エネルギー密度

$$U(\zeta) = U_G(\zeta) + U_C(\zeta) + U_T(\zeta), \quad U_G(\zeta) = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2, \quad U_C(\zeta) = \gamma \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2} \quad (9)$$

が対応する。このとき、

$$\delta U = S(\zeta)\delta\zeta, \quad \delta U_G = G(\zeta)\delta\zeta, \quad \delta U_C = C(\zeta)\delta\zeta \quad (10)$$

を確かめる。磁気応力差 $T(\zeta)$ については、 $h_{X,Y}, b_Z, \mu_j, [\dots]$ を接線磁場・法線磁束密度・流体/真空の透磁率 ($j=1/2$)・界面を横切る値の跳び (流体-真空) とすれば、

$$\delta U_T = T(\zeta)\delta\zeta, \quad T(\zeta) = - \left[\frac{1}{\mu_j} \right] \frac{\mu_1\mu_2(h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2}{2} \quad (11)$$

を満たす磁気界面エネルギー密度 $U_T(\zeta)$ を定めることになる。流体・真空それぞれの領域で、界面移動 $\delta\zeta_1, \delta\zeta_2$ に伴う磁気界面エネルギー密度 U_{T1}, U_{T2} の変化の割合を T_1, T_2 とするとき、これらを加え合わせて全体の磁気界面エネルギー密度の変化とすれば、

$$\delta U_{T1} = T_1\delta\zeta_1, \quad \delta U_{T2} = T_2\delta\zeta_2, \quad (12)$$

$$\delta U_T = \delta U_{T1} + \delta U_{T2} = T_1\delta\zeta_1 + T_2\delta\zeta_2 = (T_1 - T_2)\delta\zeta = T\delta\zeta. \quad (13)$$

各領域の界面移動は $\delta\zeta_1 = -\delta\zeta_2 = \delta\zeta$ のように大きさが等しく逆向きなので、磁気応力差は、(13)に示すように $T = T_1 - T_2$ と得られる。(12)は磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係であり、 $h_{X,Y}, b_Z$ を界面条件より両領域で等しい接線磁場と法線磁束密度とすれば、 T_1, T_2 は次の Maxwell 応力であり、これから(11)の $T(\zeta)$ が得られる。

$$T_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{b_Z^2}{\mu_1} - \mu_1 (h_X^2 + h_Y^2) \right\}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{b_Z^2}{\mu_2} - \mu_2 (h_X^2 + h_Y^2) \right\}. \quad (14)$$

(12)はよく知られた関係ではあるが、無電流系の数値解析を実空間で検証するために使えるよう、Ampère の法則・Gauss の法則などの磁場法則に基づいて、次節以降で調べ直すことにする。

4 磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係

Flat Space の流体側に界面と垂直方向に無限に伸びた Fig. 1(a) のような角柱について、(12),(14) の関係を確認する。界面に対する接線方向を X, Y 、法線方向を Z とし、角柱の断面積を S_Z 、界面の高さを $Z = \zeta$ とすれば、この角柱に関する磁気界面エネルギー密度は次のようになる。ここで、 \mathbf{b} は磁束

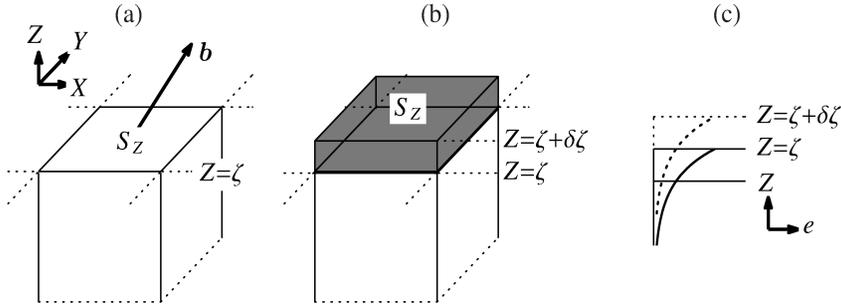


Fig. 1: 磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係を導くための、角柱領域。

密度ベクトル, $\mathbf{b}_2 = (b_X, b_Y, 0)$ は接線成分, b_Z は法線成分である。

$$U_{T1} = \frac{1}{2\mu_1 S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z \int_{-\infty}^{\zeta} dZe(X, Y, Z), \quad (15)$$

$$e(X, Y, Z) \equiv \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = b_X^2 + b_Y^2 + b_Z^2 = |\mathbf{b}_2|^2 + b_Z^2.$$

界面の高さが $Z=\zeta$ から $Z=\zeta+\delta\zeta$ へ変化するとき, 観測点を固定すれば, e の変化は (16) のように表される (Fig. 1(b),(c)). その磁束密度成分表示 (17) を (18) のように書き直し, Ampère の法則 $\partial b_X/\partial Z = \partial b_Z/\partial X$, $\partial b_Y/\partial Z = \partial b_Z/\partial Y$ と Gauss の法則 $\partial b_X/\partial X + \partial b_Y/\partial Y + \partial b_Z/\partial Z = 0$ を適用すれば (19) となる. これを (20) では接線方向偏微分 $\nabla_2 = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y, 0)$ を用いて表した.

$$\delta e = -\delta\zeta \mathbf{Z} \cdot \nabla (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = -\delta\zeta \frac{\partial}{\partial Z} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \quad (16)$$

$$= -2\delta\zeta \left(b_X \frac{\partial b_X}{\partial Z} + b_Y \frac{\partial b_Y}{\partial Z} + b_Z \frac{\partial b_Z}{\partial Z} \right) \quad (17)$$

$$= -2\delta\zeta \left\{ b_X \left(\frac{\partial b_X}{\partial Z} + \frac{\partial b_Z}{\partial X} \right) + b_Y \left(\frac{\partial b_Y}{\partial Z} + \frac{\partial b_Z}{\partial Y} \right) + b_Z \left(\frac{\partial b_X}{\partial X} + \frac{\partial b_Y}{\partial Y} + \frac{\partial b_Z}{\partial Z} \right) - \frac{\partial (b_X b_Z)}{\partial X} - \frac{\partial (b_Y b_Z)}{\partial Y} \right\} \quad (18)$$

$$= -2\delta\zeta \left\{ 2b_X \frac{\partial b_X}{\partial Z} + 2b_Y \frac{\partial b_Y}{\partial Z} - \frac{\partial (b_X b_Z)}{\partial X} - \frac{\partial (b_Y b_Z)}{\partial Y} \right\} \quad (19)$$

$$= -2\delta\zeta \left\{ \frac{\partial |\mathbf{b}_2|^2}{\partial Z} - \nabla_2 \cdot (\mathbf{b}_2 b_Z) \right\}. \quad (20)$$

一方, $\delta\zeta$ による磁気界面エネルギー密度 U_{T1} の変化は, (21) のようになる. (22) では, 角柱は断面方向には不変であるが法線方向には体積変化があり, さらに被積分量 e 自身も変化することを考慮して, これに先に導いた (20) を用いて (23) とした. (24) では, 法線方向積分を行い (角柱下面では $|\mathbf{b}_2|^2 = 0$ と

する), 括弧内第3項は2次元 Gauss の定理 $\iint_{S_z} dS_z \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \nabla_2 \cdot \mathbf{A} = \iint_{S_2} dS_2 \cdot \mathbf{A}$ により, 角柱側面にわたる積分 $\iint_{S_2} dS_2$ に置き換えた. なお, b_{20}, b_{z0} は $Z=\zeta$ における b_2, b_z の値を表す. 最後に磁場と磁束密度の比例関係 $\mathbf{b}=\mu_1 \mathbf{h}$ を用いれば, (26) が導かれる.

$$\delta U_{T1} = \delta \frac{1}{2\mu_1 S_z} \iint_{S_z} dS_z \int_{-\infty}^{\zeta} dZ e(X, Y, Z) \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2\mu_1 S_z} \iint_{S_z} dS_z \left\{ \delta \zeta e(X, Y, \zeta) + \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \delta e(X, Y, Z) \right\} \quad (22)$$

$$= \frac{\delta \zeta}{2\mu_1 S_z} \iint_{S_z} dS_z \left\{ e(X, Y, \zeta) - 2 \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \left(\frac{\partial |b_2|^2}{\partial Z} - \nabla_2 \cdot (b_2 b_z) \right) \right\} \quad (23)$$

$$= \frac{\delta \zeta}{2\mu_1 S_z} \left\{ \iint_{S_z} dS_z (|b_{20}|^2 + b_{z0}^2) - 2 \iint_{S_z} dS_z |b_{20}|^2 + 2 \iint_{S_2} dS_2 \cdot b_2 b_z \right\} \quad (24)$$

$$= \frac{\delta \zeta}{\mu_1 S_z} \iint_{S_z} dS_z \frac{1}{2} (b_{z0}^2 - |b_{20}|^2) + \frac{\delta \zeta}{\mu_1 S_z} \iint_{S_2} dS_2 \cdot b_2 b_z \quad (25)$$

$$= \frac{\delta \zeta}{S_z} \iint_{S_z} dS_z \frac{1}{2} \left(\frac{b_{z0}^2}{\mu_1} - \mu_1 |h_{20}|^2 \right) + \frac{\delta \zeta}{S_z} \iint_{S_2} dS_2 \cdot b_2 h_z. \quad (26)$$

(26) の第1項は, Maxwell 応力 (14) の界面上断面内平均に $\delta \zeta$ をかけたもので, (12) の形になっている. 一方第2項は, $d\Phi = dS_2 \cdot b_2$ を磁束, $d\psi = dZ h_z$ を磁気ポテンシャルとみなして, 角柱側面を横切る磁束による接線方向への磁気エネルギーの漏洩が及ぼす法線応力, と解釈できる.

5 モデル磁場による磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係の確認

以下では, Fig. 2(a) のような2次元ポテンシャルによる磁場を用いて, 磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係を定量的に確認する.

2次元領域 $-l_x \leq X \leq l_x, -l_z \leq Z \leq \zeta$ において, 縦境界で周期境界条件, 横境界で $\psi(X, -l_z) = 0, \partial \psi(X, \zeta) / \partial Z = \cos kX$ ($k = \pi / l_x$) を満たすポテンシャルは

$$\psi(X, Z) = \frac{\cos kX \sinh k(Z + l_z)}{k \cosh k(\zeta + l_z)} = \frac{c_1 S_{1z}}{k C_{1\zeta}} \quad (27)$$

となる. ただし以後, $w \equiv 2k(\zeta + l_z), C_{1z} \equiv \cosh k(Z + l_z), S_{1z} \equiv \sinh k(Z + l_z), S_{2z} \equiv \sinh 2k(Z + l_z), C_{2z} \equiv \cosh 2k(Z + l_z), s_1 \equiv \sin kX, c_1 \equiv \cos kX, c_2 \equiv \cos 2kX$ と略記する. これより次のように, 磁束密度の水平・鉛直成分 $b_x b_z$, 磁気

エネルギー密度 $e(X, Z)$, 界面 $Z=\zeta$ における Maxwell 応力 T_1 , 磁気界面エネルギー密度 U_{T1} が求められる。

$$\begin{aligned} b_X &= \frac{\partial \psi}{\partial X} = -\sin kX \frac{\sinh k(Z+l_Z)}{\cosh k(\zeta+l_Z)} = -s_1 \frac{S_{1Z}}{C_{1\zeta}}, \\ b_Z &= \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \cos kX \frac{\cosh k(Z+l_Z)}{\cosh k(\zeta+l_Z)} = c_1 \frac{C_{1Z}}{C_{1\zeta}}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$e(X, Z) \equiv b_X^2 + b_Z^2 = \frac{C_{2Z} + c_2}{2C_{1\zeta}^2} = \frac{1 + 2S_{1Z}^2 + c_2}{2C_{1\zeta}^2}, \quad (29)$$

$$T_1 = (b_Z^2 - b_X^2)_{Z=\zeta} = \frac{1 + c_2 C_{2\zeta}}{2C_{1\zeta}^2} = \frac{1 + c_2(1 + 2S_{1\zeta}^2)}{2C_{1\zeta}^2} = c_2 + \frac{1 - c_2}{2C_{1\zeta}^2}, \quad (30)$$

$$U_{T1} = \int_{-l_Z}^{\zeta} dZ e(X, Z) = \frac{1}{4kC_{1\zeta}^2} (S_{2\zeta} + wc_2) = \frac{1}{2k} \left(\frac{S_{1\zeta}}{C_{1\zeta}} + \frac{wc_2}{2C_{1\zeta}^2} \right). \quad (31)$$

次に, 界面の高さが $\delta\zeta$ だけ変化するときの $e(X, Z)$ の変化は,

$$\delta e(X, Z) = \delta\zeta \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \frac{\partial e}{\partial Z} = -2\delta\zeta \left(b_X \frac{\partial b_X}{\partial Z} + b_Z \frac{\partial b_Z}{\partial Z} \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta} = -1 \right) \quad (32)$$

$$= -2\delta\zeta \left\{ b_X \left(\frac{\partial b_X}{\partial Z} + \frac{\partial b_Z}{\partial X} \right) + b_Z \left(\frac{\partial b_X}{\partial X} + \frac{\partial b_Z}{\partial Z} \right) - \frac{\partial (b_X b_Z)}{\partial X} \right\} \quad (33)$$

$$= \delta\zeta \left\{ -4b_X \frac{\partial b_X}{\partial Z} + 2 \frac{\partial (b_X b_Z)}{\partial X} \right\} = -2\delta\zeta \left\{ \frac{\partial b_X^2}{\partial Z} - \frac{\partial (b_X b_Z)}{\partial X} \right\}. \quad (34)$$

(32) を (33) のように変形後, Ampère の法則 $\partial b_X / \partial Z = \partial b_Z / \partial X$ と Gauss の法則 $\partial b_X / \partial X + \partial b_Z / \partial Z = 0$ を適用して (34) を導いた. さらに U_{T1} の変化は, 以下の (35) に (34) を用いれば, (37), (38), (39) のように導かれる.

$$\delta U_{T1} = \delta \int_{-l_Z}^{\zeta} dZ e(X, Z) = e(X, \zeta) \delta\zeta + \int_{-l_Z}^{\zeta} dZ \delta e(X, Z) \quad (35)$$

$$= \delta\zeta \left\{ e(X, \zeta) - 2 \int_{-l_Z}^{\zeta} dZ \frac{\partial b_X^2}{\partial Z} + 2 \int_{-l_Z}^{\zeta} dZ \frac{\partial (b_X b_Z)}{\partial X} \right\} \quad (36)$$

$$= \frac{\delta\zeta}{2C_{1\zeta}^2} \left\{ (2S_{1\zeta}^2 + 1 + c_2) - 2(1 - c_2)S_{1\zeta}^2 - 2c_2 S_{1\zeta}^2 \right\} \quad (37)$$

$$= \delta\zeta \left\{ \frac{1 + c_2(1 + 2S_{1\zeta}^2)}{2C_{1\zeta}^2} - \frac{c_2 S_{1\zeta}^2}{C_{1\zeta}^2} \right\} = \delta\zeta (T_1 + T_1') \quad (38)$$

$$= \delta\zeta \frac{1 + c_2}{2C_{1\zeta}^2}. \quad (39)$$

(34) は前節の (20) を, (36) は (23) を簡略化したものになっている. (37) の

括弧内の3つの項は(36)の界面移動・法線方向変化・接線方向変化の各項に対応するが、最初の2項を合わせて(38)のように表すと、合わせた項は(30)に一致することがわかる($T'_1 \equiv -c_2 S_{1\zeta}^2 / C_{1\zeta}^2$ については後述する)。さらに全ての項を合わせれば(39)となるが、これは $l_Z \rightarrow \infty$ として(31)から求めた $\delta U_{T1} = \delta\zeta \partial U_{T1} / \partial \zeta$ に一致している。

5.1 一様磁場の極限 ($k \rightarrow 0$)

$k \rightarrow 0$ の極限では、磁場分布はX方向およびZ方向に一様な場合へ近づく。このとき(29),(30),(31),(38)は、 $S_{1\zeta} \rightarrow 0, C_{1\zeta} \rightarrow 1, w/2k = \zeta + l_Z, S_{1\zeta}/2k \rightarrow \zeta + l_Z$ より、次のようになる($c_2 \rightarrow 1$ であるが極限は取らずに残してある)。

$$e(X, Z) \rightarrow \frac{1+c_2}{2}, \quad U_{T1} \rightarrow \frac{(\zeta+l_Z)(1+c_2)}{2} = (\zeta+l_Z)e(X, Z), \quad (40)$$

$$T_1 \rightarrow \frac{1+c_2}{2}, \quad \delta U_{T1} \rightarrow \frac{\delta\zeta}{2} \{(1+c_2) + 0\} = T_1 \delta\zeta. \quad (41)$$

(40)は、エネルギーについて、密度に層厚をかければ磁気界面エネルギー密度になることを、(41)は、磁気界面エネルギー密度とMaxwell応力の関係(12)を示している。注目すべきは、(38)にあった T'_1 の項がこの極限では0であることである。コンデンサー中の誘電体や空芯電磁石内の磁性体を引き出す力を微小移動に伴うエネルギーの変化から求める問題では、単純化するため、電場や磁場の分布を一様として T'_1 の効果を考える必要をなくしている。

5.2 層厚無限大の極限 ($l_Z \rightarrow \infty$)

層厚が無限に大きいとして $l_Z \rightarrow \infty$ とすれば、(29),(30),(31),(38)は $S_{1\zeta} \rightarrow \infty, C_{1\zeta} \rightarrow \infty, S_{1\zeta}/C_{1\zeta} \rightarrow 1, w/C_{1\zeta} \rightarrow 0$ より、

$$e(X, Z) \rightarrow 1, \quad U_{T1} \rightarrow \frac{1}{2k}, \quad T_1 \rightarrow c_2, \quad \delta U_{T1} \rightarrow \delta\zeta (c_2 - c_2) = 0. \quad (42)$$

(38)の T_1 と T'_1 は大きさが共に c_2 で逆符号なため、互いに打ち消しあって $\delta U_{T1} = 0$ となる。結果として、界面の移動があっても U_{T1} は変化しない。

5.3 周期境界条件の適用 ($c_2 = 0$)

磁気界面エネルギー密度を、界面上の1点でなく、前節の(15)のように角柱の断面内平均で考える。このとき、磁場分布がX方向に周期境界条件を

満たせば, (29),(30),(31),(38) では c_2 を含む項が落ちて,

$$e(Z) = \frac{1+2S_{1z}^2}{2C_{1z}^2}, U_{T1} = \frac{1}{2k} \frac{S_{1z}}{C_{1z}}, T_1 = \frac{1}{2C_{1z}^2}, \delta U_{T1} = \delta\zeta \left(\frac{1}{2C_{1z}^2} - 0 \right) = T_1 \delta\zeta. \quad (43)$$

この場合, (38) の T'_1 がなくなるため, 磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係 (12) は保たれる. しかし C_{1z} が大きければ, 平均としての T_1 および δU_{T1} は極めて小さくなる.

5.4 数値解析

ζ の変化に伴う U_{T1} の変化を調べるため, (27) すなわち Fig. 2(a) のポテンシャル分布に基づいて, Fig. 2(b),(c),(d) のように $b_x, b_z, T_1, T'_1, U_{T1}$ を計算した (ただし U_{T1} は, 元の値からある共通の値を差し引いて示した).

ここでは, $l_x=5, l_z=5, 20$ および $\zeta = -2, -1, 0, 1, 2$ という条件を用いた. $l_z=5$ の場合, Fig. 2(d) の U_{T1} は (31) の c_2 にしたがって振動するが, $\zeta=0$ と $\zeta=2$ では異なり, 差が (39) となる. しかし, $k(\zeta+l_z)$ が充分大きい $l_z=20$ では, Fig. 2(d) の U_{T1} はほとんど振動せず, ζ による差もほとんど計算誤差の範囲内になる (5.2 節 (42)). これは, Fig. 2(c) に示すように, 大きさがほとんど等しく逆符号の T_1 と T'_1 が打ち消しあって $\delta U_{T1} \approx 0$ となるためである.

5.5 T'_1 の意味

(38) にある T'_1 は, 磁場分布が一様に近かったり U_{T1}, T_1 を周期境界条件を伴う断面内平均で扱う場合は, (12) の磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係にあまり影響を及ぼさない. しかし, 層厚が大きくなったり磁場分布の変化が大きくなると, その影響が際立ってくる.

T'_1 は, (26) 第 2 項の $(\delta\zeta/S_z) \iint_{S_2} dS_2 \cdot \mathbf{b}_2 h_z$ まで遡り, 接線方向への磁気エネルギーの漏洩が及ぼす法線応力, と解釈された. この項がこれまで問題とならなかったのは, 界面エネルギー密度と界面応力の関係 (MRELA) を専ら, 5.1 節のような一様な磁場分布中の局所的な領域で考えていたためではないかと思われる. しかし他方では, 界面移動方向を界面磁場との方向を保つように決めるとどうなるか? 接線応力への影響はないのか? などの疑問も思い浮かぶ.

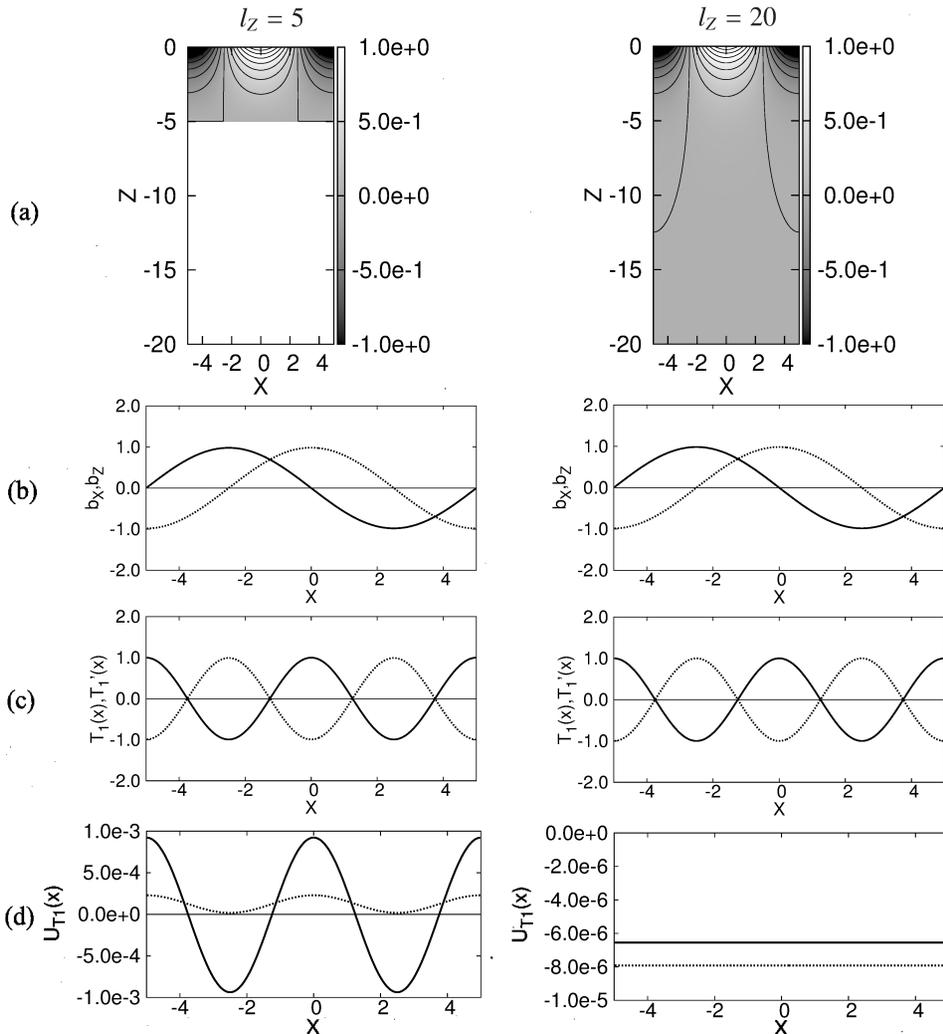


Fig. 2: モデル磁場による磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係の確認. (a) 2次元ポテンシャル分布. (b) 界面磁束密度 (実線:接線成分 b_x , 点線:法線成分 b_z). (c) Maxwell 応力 T_1 (実線) と T'_1 (点線). (d) 磁気界面エネルギー密度 U_{T1} (実線: $\zeta=0$, 点線: $\zeta=2$).

6 まとめ

磁性流体界面現象の数値解析を行う際の検証方法について考察した. 界面力学方程式の時間積分にはエネルギー保存則を, 界面応力の物理的妥当性には界面エネルギー密度と界面応力の関係を用いるが, 特に磁気応力差では磁気界面エネルギー密度と Maxwell 応力の関係 (MRELA) を確認する.

本稿では、MRELA を実空間で無電流系の数値解析に利用するため、磁場法則 (Ampère の法則・Gauss の法則) から直接導いた上で、モデル磁場において界面変位と磁気界面エネルギー密度の関係を調べた。接線方向に一様でない磁場分布では接線方向にもエネルギー流束が生じ、MRELA は (12) の形のままではなくなる。さらに、汎用磁場解析で求めた界面磁場は、界面上の離散点だけで求められている。これらの事情を考慮しながら、磁場分布の法線方向の変化や時間空間の離散化の影響を織り込んだ数値解析条件を引き続き調べていく。

参考文献

- [1] 水田 洋: 複雑界面における調和場解析の次元間対応; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1483**, p.175 (2006).
- [2] Y.Mizuta: Interface magnetic field analysis for free surface phenomena of magnetic fluid; *Magnetohydrodynamics*, **44** (2), p.155 (2008).
- [3] Y.Mizuta: Stability analysis on the free surface phenomena of a magnetic fluid for general use; *J. Magn. Magn. Mater.*, **323** (10), p.1354 (2011).
- [4] 水田 洋: 磁性流体表面波動における界面磁場解析; 日本流体力学会年会 2012 講演論文集, 16-01-04-05 (2012).
- [5] 水田 洋: 水深が有限な磁性流体界面の波動と安定性; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用」, **1847**, p.96 (2013).
- [6] 水田 洋: 規則的形状パターン生成時の磁性流体界面スペクトル変化; 日本流体力学会年会 2013 講演論文集, 79 (2013).
- [7] 水田 洋: 不安定化する磁性流体界面波動のスペクトル特性変化; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1890**, p.113 (2014).
- [8] 水田 洋: 磁性流体界面解析における界面磁気力; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象のメカニズムと数理」, **1946**, p.48 (2015).
- [9] 水田 洋: 磁性流体界面波動の解析評価; 日本流体力学会年会 2015 講演論文集, 109 (2015).
- [10] L.D.Landau and E.M.Lifshitz: *Electrodynamics of continuous media* (Pergamon, London) (1960).
- [11] J.D.Jackson: *Classical electrodynamics* (Wiley, New York) (1975).
- [12] 水田 洋: 磁性流体界面形状遷移における界面波動エネルギー; 磁性流体研究の新展開 (磁性流体連合講演会講演論文集), **1**, p.5 (2014).