

合流型ホインの微分方程式で記述される確率母関数の積分表示とアクセサリパラメータ

筑波大学・名誉教授 金野秀敏

Hidetoshi Konno

Emeritus Professor, University of Tsukuba, Tsukuba

1 はじめに

近年, 位相特異点のダイナミクスの確率過程による記述が盛んに行われるようになってきた [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. 特異点の生成・死滅過程が非平衡系のダイナミクスに重要な役割を果たしていることは以下に列記する系の解析でも指摘されている:

(1) 心臓不整脈や心室細動時の電氣的時空変動 (2011) [4, 5, 6], (2) プラチナ表面上での一酸化炭素の酸化反応 (2006) [7], (3) 傾斜のある系でのレイリー・ベナル対流の欠陥のダイナミクス (2004) [8], (4) 回転シリンダー中でのレイリー・ベナル対流の欠陥のダイナミクス (2003) [9], (5) てんかん脳波 (Freeman, 1998) [10, 11], (6) アメーバーなどの大変形 (Takeuchi, 2013) [12], (7) Directional Percolation (DP) と非平衡相転移 (2009) [13], (8) 量子乱流 (2013) [14].

これらの諸現象の位相特異点の相互作用は位相特異点の右巻きと左巻きの区別 (所謂, topological charge) を無視すれば素粒子相互作用の場の理論 (Reggeon Field Theory) あるいは化学反応の一般化 Schrögl モデルと呼ばれる範疇に分類されるようにみえる [15, 16].

$$0 \xrightarrow{k_1} 2X \text{ (pair breaking)}; 2X \xrightarrow{k_2} 0 \text{ (pair merging)}; X \xrightarrow{k_3} 2X \text{ (wave break)};$$

$$2X \xrightarrow{k_4} X \text{ (wave merge)}; 0 \xrightarrow{k_5} X \text{ (birth)}; X \xrightarrow{k_6} 0 \text{ (death and loss)}.$$

前報では, 上記の相互作用のうち線形の生成死滅率を有する Fractional マスター方程式

$${}_0D_t^\alpha p(n, t) = [c_1(n-1) + c_0]p(n-1, t) + [a_1(n+1) + a_0]p(n+1, t) - [(c_1+a_1)n + (c_0+a_0)]p(n, t), \quad (1)$$

ここで, Caputo 型のフラクショナル微分で記憶効果を表現している:

$${}_0D_t^\alpha X(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{D_\tau X(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha \leq 1). \quad (2)$$

に対応するラプラス変換後の確率母関数が複素領域でホインの微分微分方程式に従うことを示した. 通常の可解なモデルはガウスの超幾何方程式を解く問題に帰着できるが, ホインの微分方程式に帰着できる問題が解ければ応用範囲が拡大できる. また, このクラスのマスター方程式 (1) のモデルでは微分  $\frac{d}{dt}$  をフラクショナル微分  ${}_0D_t^\alpha$  に拡張し記憶効果を導入しているので, 定性的には3次元のスクロール波の数値計算結果 [17] の定性的な説明は可能であることを簡単に示した.

上記のような特異点ダイナミクスを拡張して多くの非平衡系で解析に利用できるように非線形項を導入する前に, 非定常マスター方程式とフラクショナルマスター方程式の違いや, 応用の守備範囲を明らかにしておく. 非線形項を陽に含まない生成死滅過程のマルコフ・マスター方程式 ( $\alpha = 1$ ) の場合には解析解が存在し, [A] 量子光学 (Shimoda, Takahashi, Towns, 1957) [18], [B] QCD ハドロン相互作用 (Suzuki and Biyajima, 1996) [19], [C] 金融市場のマクロダイナミクスを支配するトレーダーの市場への出入りの確率過程 (Aoki and Yoshikawa, 2004) [20], [D] PSD-95 などの細胞内輸送現象の確率モデル (Tsigankov and Eule, 2011) [21], [E] 生態学 (Pigolotti, Flammini, Marsili and Maritan, 2005) [22] や感染症の確率ダイナミクス (Stollenwerk and Jansen, 2007) [23] 等の解析に用いられた.

しかし、近年、[A] optical rogue wave では裾の厚い光強度分布や長期待ち時間分布が観測されている [24,25,26]; [B] では長期記憶を有するスケーリングモデルが実験の特性と対応することが報告されている [27]; [C] 金融市場でもトレーダーの市場への参入・退出のダイナミクスの記憶効果を反映して、時系列データに長期記憶効果が現れており [28], Fractional ARIMA-GARCH model[29] 等が使われるようになってきている; [D] 膜タンパク質の静的 corral 存在下でのセル内輸送等 (Brown et al., 2000)[30] や神経細胞内の物質輸送でも長期記憶効果の重要性が指摘され、モデル化 [31] が試みられている、もちろん、[E] プラズマ中の 2 次元 vortex soliton ではマルコフ生成・死滅過程 [32] が提案されてきたが、最近のシミュレーションでは記憶のある異常拡散 (Cisternas, 2016) の存在が報告されている [33], [F] てんかん脳波の生成・死滅過程も記憶のある確率過程で記述されるようである; [G] 生態学や感染症のモデリングでも数値シミュレーションでは空間拡散の効果が無視されるが空間拡散の効果は  $(t-t')^{1/2}$  型等のベキ状の記憶効果として効くから、現実にはフラクショナル微分を用いた記憶関数の導入は物理的に妥当であり、実データ解析にはこの効果を考慮する必要があると考えられる。

一般に、記憶効果を導入した場合や任意の初期条件では解析解が得られないことが多い。このような場合でもホインの微分方程式を解く問題に帰着できれば、応用範囲が広がると期待される。しかし、ホインの微分方程式には特性指数と無関係な「アクセサリパラメータ」が含まれているため、問題が難しくなるとの数学者の指摘がある。本報では (1) よりさらに簡単ではあるがフラクショナル生成死滅マスター方程式の確率母関数の従う合流型ホインの方程式及びホインの微分方程式に拘る問題の所在を明らかにする。

## 2 合流型ホインの微分方程式

ホインの微分方程式は確定特異点が 4 個 ( $z = 0, 1, a, \infty$ ) の線形微分方程式 [34] であるが、そのうちの一個を合流させると確定特異点が 3 個 ( $z = 0, 1, \infty$ ) の合流型ホインの微分方程式 [34,35] が得られる。

### 2.1 カノニカル型

カノニカル型の合流型微分方程式は次式で与えられる:

$$D_x^2 y(x) + \left( \alpha + \frac{\beta+1}{x} + \frac{\gamma+1}{x-1} \right) D_x y(x) + \frac{(2\delta + \alpha(\beta + \gamma + 2))x + 2\eta + \beta + (\gamma - \alpha)(\beta + 1)}{2x(x-1)} y(x) = 0, \quad (3)$$

ここで、微分演算子  $D_x = \frac{d}{dx}$  は通常の微分演算子であり、パラメータは  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta)$  の 5 個である。

### 2.2 Factorization による形式解

カノニカル型のホインの微分方程式の演算子  $\mathcal{H}$  を次式で定義する:

$$\mathcal{H} \equiv 2x(x-1)D_x^2 + [2\alpha x^2 + 2(\beta + \gamma + 2 - \alpha)x - (\beta + 1)]D_x + [(2\delta + \alpha(\beta + \gamma + 2))x + 2\eta + \beta + (\gamma - \alpha)(\beta + 1)]. \quad (4)$$

因子分解の結果は次式で与えられる:

$$\mathcal{H} = (LD_x + M)(\bar{L}D_x + \bar{M}) = L\bar{L}D_x^2 + (L\bar{L}' + L\bar{M} + M\bar{L})D_x + L\bar{M}' + M\bar{M}. \quad (5)$$

すなわち、次式に従って形式解が求められる:

$$\bar{L}(x)y_1'(x) + \bar{M}(x)y_1(x) = 0 \quad (6)$$

及び

$$\bar{L}(x)y_2'(x) + \bar{M}(x)y_2(x) = u(x) \quad (7)$$

ここで、 $u$  は

$$L(x)u'(x) + M(x)u(x) = 0. \quad (8)$$

このような因子分解による合流型ホインの微分方程式 (CHE) の解法は Hounkonnou, Ronveaux and Sodoga [35] らによって提唱された。しかし、彼らのカノニカル型の方程式にはミスプリが含まれているので修正した表を以下に示した。

Table 1: 合流型ホインの方程式の因子分解

Cl.	$L$	$\bar{L}$	$M$	$\bar{M}$
$A_1$	$2x$	$x-1$	$2(\beta+1)$	$\alpha x + \gamma - \alpha$
$A_2$	$x-1$	$2x$	$\gamma+1$	$2\alpha x + 2\beta$
$B_1$	$2x$	$x-1$	$2\alpha x + 2(\beta+1)$	$\gamma$
$B_2$	$x-1$	$2x$	$\alpha x + \gamma + 1 - \alpha$	$2\beta$
$D$	$2$	$x(x-1)$	$2\alpha$	$(\beta+\gamma)x - \beta$
$E$	$x(x-1)$	$2$	$(\beta+\gamma+2)x - (\beta+1)$	$2\alpha$

Table 2: 合流型ホイン方程式の形式解

Cl.	$y_1(x)$	$y_2(x)$
$A_1$	$(x-1)^{-\gamma} \exp(-\alpha x)$	$(x-1)^{-\gamma} \exp(-\alpha x) \int (x-1)^{\gamma-1} \exp(\alpha x) x^{-1-\beta} dx$
$A_2$	$x^{-\beta} \exp(-\alpha x)$	$x^{-\beta} \exp(-\alpha x) \int x^{\beta-1} \exp(\alpha x) (x-1)^{-1-\gamma} dx$
$B_1$	$(x-1)^{-\gamma}$	$(x-1)^{-\gamma} \int \exp(-\alpha x) (x-1)^{\gamma-1} x^{-1-\beta} dx$
$B_2$	$x^{-\beta}$	$x^{-\beta} \int \exp(-\alpha x) x^{\beta-1} (x-1)^{-1-\gamma} dx$
$D$	$x^{-\beta} (x-1)^{-\gamma}$	$x^{-\beta} (x-1)^{-\gamma} \int \exp(-\alpha x) x^{\beta-1} (x-1)^{\gamma-1} dx$
$E$	$\exp(-\alpha x)$	$\exp(-\alpha x) \int \exp(\alpha x) (x-1)^{-1-\gamma} x^{-1-\beta} dx$

カノニカル型の合流型微分方程式 (3) の一般解は次式で与えられる:

$$y_2(x) = c_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, x) + c_2 x^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta, x). \quad (9)$$

### 2.3 リーマンスキーム, 可解性及び積分表示

因子分解で形式解が求まったが [35] 数理解析の観点からはこれでは十分ではない。可解条件や積分表示の存在が重要である。特に、積分表示が得られないと解析表現も得られないことになる。これらの事柄を明らかにする必要がある。

ガウスの超幾何微分方程式の場合,

$$x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)] \frac{du}{dx} - \alpha \beta u = 0 \quad (10)$$

にはリーマンスキームは次式で与えられている:

$$\begin{pmatrix} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{pmatrix}, \quad (11)$$

ここで、1行目は複素平面内の確定特異点の位置であり、続く2行が特性指数をあらわす。すなわち、ガウスの超幾何微分方程式の場合にはリーマンスキーム (11) が特性指数のみで書かれている。

一方、合流型ホインの微分方程式の場合,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left( \alpha + \frac{\beta+1}{x} + \frac{\gamma+1}{x-1} \right) \frac{du}{dx} + \frac{\alpha x - q}{x(x-1)} u = 0, \quad (12)$$

にはリーマンスキームは

$$\begin{pmatrix} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & p \\ -\beta & -\gamma & \beta+\gamma+2-p \end{pmatrix}, \quad (13)$$

となっており、アクセサリパラメータ  $q$  の存在のために特性指数のみでは書けていない。この理由から、数学者はアクセサリパラメータを含まないフックス型の方程式を勢力的に研究している。

### 3 生成死滅のマスター方程式

#### 3.1 フラクショナル・マスター方程式

(1)式よりもさらに簡単な次の形のフラクショナル・マスター方程式を考えよう:

$${}_0D_t^\alpha p_\alpha(n, t) = \nu[p_\alpha(n-1, t) - p_\alpha(n, t)] + \mu[(n+1)p_\alpha(n+1, t) - np_\alpha(n, t)], \quad (14)$$

ここで、 ${}_0D_t^\alpha$  は Caputo 型のフラクショナル微分であり、次式で定義される Riemann-Liouville 型のフラクショナル微分とは異なることに注意する:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D_t \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} f(\tau) d\tau. \quad (15)$$

「このような簡単なモデルで複雑系の非平衡状態の何を記述出来るのか」と疑問を持たれる方もあろうかと思われるので説明を加えておく。[A] Arecchi ら [34] は optical rogue wave の強度揺らぎの厚い裾を持つ分布を Beck-Cohen 流の重ね合わせで同定している。しかし、実験によって得られた rogue wave の「待ち時間分布」が「対数ポアソン分布」になることは Beck-Cohen 流の重ね合わせでは説明できていない。極値事象としての rogue wave の生成・死滅過程のモデリングが必要である。[B] QCD のスケーリング関数の解析では初期値を適切に調整しないと実験と整合するスケーリング関数が出現しないことが報告されている (Nakajima, Biyajima and Suzuki, 1996) が任意の初期値の解が求まらないので初期値依存性が解析出来ていない。[C] 現実の金融データのデータ解析では長期記憶が存在するので、FARIMA-GARCH モデルを用いた解析が行われている (Ling and Li, 2002) が市場参加者のマスター方程式に記憶効果の導入はなされていない。[D] 細胞内輸送問題では動的 corral モデルの解析が主流となってきたが、細胞内輸送に体液のフィードバック効果が存在するときや細胞異常の発生には記憶項が効くとの認識が高まりモデル化 [31] が行われている。[E, F, G] 生態学や感染症の現実問題と記憶効果導入の関連は上記に説明したとおりである。

注意すべき点は粒子数や事象数の揺らぎで非平衡現象の全ての側面を記述できないので、強度、速度や位置等の確率モデルを併用した数理解析を実行する必要があることは言うまでもない。このように上記のモデルは最も簡単な記憶のある生成死滅過程モデルのひとつであるが、依然として多くの分野で利用可能であると考えられる。

さて、確率母関数は次式で定義される:

$$g_\alpha(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_\alpha(n, t), \quad (16)$$

ただし、初期条件は  $p_\alpha(n, 0) = \delta_{n, n_0}$  とする。

母関数の従う方程式は次式で与えられる。

$${}_0D_t^\alpha g_\alpha(z, t) = c_0(z-1)g_\alpha(z, t) - a_1 \frac{\partial}{\partial z} g_\alpha(z, t). \quad (17)$$

確率母関数  $g_\alpha(z, t)$  の従う方程式は次式のようになる:

$${}_0D_t^\alpha g_\alpha(z, t) = -\mu(z-1) \frac{\partial}{\partial z} g_\alpha(z, t) + \nu(z-1)g_\alpha(z, t). \quad (18)$$

マルコフ極限  $\alpha = 1$  では、解は [36, 37] 次式で与えられる:

$$g_1(z, t) = [1 + (z-1) \exp(-\mu t)]^{n_0} \exp \left[ \frac{\nu}{\mu} (z-1)(1 - \exp(-\mu t)) \right]. \quad (19)$$

記憶のある  $0 < \alpha < 1$  の場合においては、特性曲線法を適用した求解は容易に実行出来ない。確率母関数のラプラス変換は  $g_\alpha[z, s]$  次式のように求められる:

$$\mu(z-1)\frac{d}{dz}g_\alpha[z, s] + (s^\alpha - \nu(z-1))g_\alpha[z, s] = s^{\alpha-1}z^{n_0}. \quad (20)$$

これは複素領域の線形微分方程式であるから  $g_\alpha[z, s]$  は次のように求まる:

$$g_\alpha[z, s] = \left(\frac{s^{\alpha-1}}{\mu}\right) \cdot (z-1)^{-\frac{s^\alpha}{\mu}} e^{\frac{\nu}{\mu}z} \int_{z_b}^z \omega^{n_0} (\omega-1)^{\frac{s^\alpha}{\mu}-1} e^{-\frac{\nu}{\mu}\omega} d\omega. \quad (21)$$

積分の上限と下限  $z_b$  は物理的な考察により適切に設定する必要がある。

表 1 及び 2 でわかるように、6 つのクラスのうち  $A_1$  に演算子は分類されることがわかる:

$$L = 2z, \bar{L} = z-1, M = -2n_0, \bar{M} = \frac{s^\alpha}{\mu} - \frac{\nu}{\mu}(z-1) \text{ 及び } u(z) = \frac{s^{\alpha-1}}{\mu} z^{n_0} \quad (22)$$

(cf. Hounkonnou et al [35]). しかし、(21) 式の積分表示はモーメントや待ち時間分布 (又は、寿命分布) を計算するには便利でない。

まず、 $z_b = 0$  として変数変換

$$\frac{\omega z - 1}{z \omega - 1} = 1 - x, \quad (23)$$

して、母関数をとって次の形を選択する:

$$\begin{aligned} g_\alpha[z, s] &= -\left(\frac{s^{\alpha-1}}{\mu}\right) z^{n_0+1} e^{\frac{\nu}{\mu}(z-1)} \int_0^1 (1-x)^{n_0} (1-xz)^{-n_0-\frac{s^\alpha}{\mu}-1} e^{\frac{\nu}{\mu}\frac{1-x}{1-xz}} dx, \\ &\equiv -\left(\frac{s^{\alpha-1}}{\mu}\right) z^{n_0+1} e^{\frac{\nu}{\mu}(z-1)} f_{01}\left(1, n_0-1, n_0 + \frac{s^\alpha}{\mu} + 1; z\right). \end{aligned} \quad (24)$$

これが合流型ホインの微分方程式 (CHE) の閉じた形での積分表示である (CHE).

$$f_{pq}(a, b, c; z) = \int_p^q x^{a-1} (1-x)^{c-a-1} (1-xz)^{-b} e^{\frac{\nu}{\mu}\frac{1-x}{1-xz}} dx \quad (25)$$

ここで、 $p, q = \{0, 1, \infty\}$  は一般化超幾何関数の積分表示である。

(20) 式の母関数の従う方程式を  $z$  についてもう一度微分すると、(12) 式に示した標準形の合流型の微分方程式が得られ、係数は次式で与えられる:

$$\alpha = -\frac{\nu}{\mu}, \beta = -n_0 - 1, \gamma = \frac{s^\alpha}{\mu}, p = 1 - n_0 \text{ 及び } q = n_0 \left(\frac{\nu}{\mu} + \frac{s^\alpha}{\mu}\right) \quad (26)$$

また、(3) 式のカノニカル型の方程式の場合に対応する係数は次式で与えられる:

$$\alpha = -\frac{\nu}{\mu}, \beta = -n_0 - 1, \gamma = \frac{s^\alpha}{\mu}, \delta = \frac{\nu}{2\mu} \left(n_0 - 1 + \frac{s^\alpha}{\mu}\right) \text{ 及び } \eta = \frac{1}{2} \left[-n_0 \left(\frac{\nu}{\mu} + \frac{s^\alpha}{\mu}\right) + n_0 + 1\right]. \quad (27)$$

標準形方程式 (12) のアクセサリパラメータ  $q$  または カノニカル方程式 (3) のパラメータ  $\eta$  で、それらは固定されていることが確認できる。ただし、 $p_\alpha(n, 0) = \delta_{n, n_0}$ . 初期値が  $n_0 = 0$  なら、アクセサリパラメータは  $q = 0$  となる。

### 3.2 $n_0 = 0$ の場合の平均と分散

初期値が  $n_0 = 0$  の場合の平均と分散の表式が次のように求められる:

$$\langle n(T) \rangle = \frac{\nu}{\mu} \left(1 - E_\alpha(-\mu T^\alpha)\right) \quad (28)$$

及び

$$\sigma_n^2(T) = \frac{\nu}{\mu} \left(1 - E_\alpha(-\mu T^\alpha)\right) + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2 \left\{ E_\alpha(-2\mu T^\alpha) - [E_\alpha(-\mu T^\alpha)]^2 \right\}, \quad (29)$$

ここで, Mittag-Leffler 関数  $E_\alpha(z)$  は次式で定義される:

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha n + 1)} z^n. \quad (30)$$

時間依存性は数値計算により簡単に評価できる. その結果,  $\alpha$  の値が小さくなると分散項の存在のために揺らぎの増大が観察されることになる. 非定常の定式化によるモデル化ではこのような増大は観測されず, 分散と平均は任意の時間で同じ値をとる.

消滅確率や待ち時間分布 (寿命分布) を計算するために, 特異点  $z=0$  のまわりの振る舞いを  $f_{0\infty}(a, b, c; z)$  で評価しよう.

$$g_\alpha[z, s] = -\left(\frac{s^{\alpha-1}}{\mu}\right) z e^{\frac{\nu}{\mu}(z-1)} f_{01}\left(1, -1, 1 + \frac{s^\alpha}{\mu}; z\right) - \left(\frac{s^{\alpha-1}}{\mu}\right) z e^{\frac{\nu}{\mu}(z-1)} f_{1\infty}\left(1, -1, 1 + \frac{s^\alpha}{\mu}; z\right), \quad (31)$$

ラプラス逆変換により次式が得られる:

$$g_\alpha(z, t) = e^{\frac{\nu}{\mu}(z-1)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{\nu}{\mu}(z-1))^n}{n!} E_\alpha(-\mu n t^\alpha). \quad (32)$$

$z=0$  と置いて, 消滅確率は次式で与えられる:

$$g_\alpha(0, t) = p_\alpha(0, t) = e^{-\frac{\nu}{\mu}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^n E_\alpha(-n\mu t^\alpha). \quad (33)$$

同様に, 寿命分布は次式で与えられる:

$$f_\alpha(\tau) = -\frac{d}{d\tau} p_\alpha(0, \tau) = e^{-\frac{\nu}{\mu}\tau} \nu \tau^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^n E_{\alpha,\alpha}(-(n+1)\mu\tau^\alpha), \quad (34)$$

ここで, 一般化 Mittag-Leffler 関数  $E_{\alpha,\beta}(z)$  は次式で定義される:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha n + \beta)} z^n. \quad (35)$$

任意の初期値  $n_0 \neq 0$  のときの解析解も得られるがここでは省略する.

## 4 Discussions

### 4.1 モデル (1) の母関数の積分表示とアクセサリパラメータ

モデル (1) で  $\epsilon=0$  とした場合の確率母関数の従う方程式を考えよう.

$${}_0D_t^\alpha g_\alpha(z, t) = (\lambda z - \mu)(z-1) \frac{\partial}{\partial z} g_\alpha(z, t) + \nu(z-1) g_\alpha(z, t) \quad (36)$$

ラプラス変換を施し, 上式をさらに  $z$  について微分することにより, 次のようなホインの微分方程式を得る:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} g_\alpha[z, s] + \left(\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta+1}{z-1} + \frac{\gamma+1}{z-w}\right) \frac{\partial}{\partial z} g_\alpha[z, s] + \frac{-pz+q}{z(z-1)(z-w)} g_\alpha[z, s] = 0 \quad (37)$$

ここで,

$$\alpha = -n_0, \beta = -\frac{s^\alpha}{\lambda-\mu}, \gamma = \frac{s^\alpha}{\lambda-\mu} + \frac{\nu}{\lambda}, p = \frac{\nu}{\lambda}(n_0-1), q = \frac{n_0}{\lambda}(s^\alpha + \nu), w = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (38)$$

これから, 初期値がゼロである場合にはアクセサリパラメータ  $q$  がゼロとなり, (37) 式はガウスの超幾何微分方程式に帰着できることになる. 同様に,  $\lambda=0$  の場合も結果だけ示すと, この場合には母関数は合流型のホインの微分方程式  $g_\alpha[z, s] = z^{-\frac{s}{\mu}} H_\alpha[z, s]$  で表現できるようになる:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_\alpha[z, s] + \left(\alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma+1}{z-1}\right) \frac{\partial}{\partial z} H_\alpha[z, s] + \frac{p\alpha z + q}{z(z-1)} H_\alpha[z, s] = 0 \quad (39)$$

ここで,

$$\alpha = -\frac{\nu}{\mu}, \beta = -\frac{\epsilon}{\mu} - n_0 - 1, \gamma = \frac{s^\alpha}{\mu}, p = 2, q = n_0 + 1 + \frac{\nu + \epsilon + s^\alpha}{\mu}. \quad (40)$$

しかし, この場合には初期値をゼロにしてもガウスの超幾何微分方程式には帰着できないことがわかるが, 積分表示が得られるので解析的な取り扱いが可能になる.

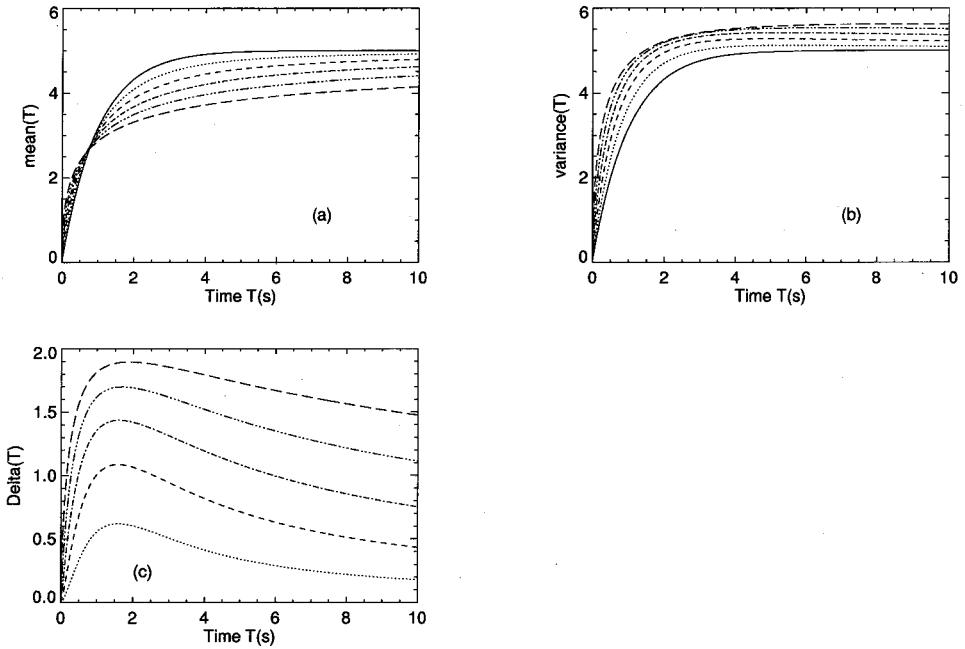


図 1: 初期値を  $n_0 = 0$  としたときの平均と分散の発展の様子: パラメータは  $\nu = 5, \mu = 1$  であり, フラクショナル微分の値を次のように変化させている  $\alpha$ : (a) 1 (solid line), (b) 0.9 (dotted line), (c) 0.8 (dashed line), (d) 0.7 (dash-dot line), (e) 0.6 (dash-three-dots line) 及び (f) 0.5 (long-dashed line).  $\Delta(T)$  は  $\Delta(T) \equiv \sigma_n^2(T) - \langle n(T) \rangle$  で定義し両者の変化を図示した. 異常な揺らぎの大きさは  $\nu/\mu$  の比が大きくなるほど拡大する.  $\alpha$  が小さくなるほど, 定常値に至までの時間が長くなることから  $\langle n(\infty) \rangle = \sigma_n^2(\infty) = 5$ .

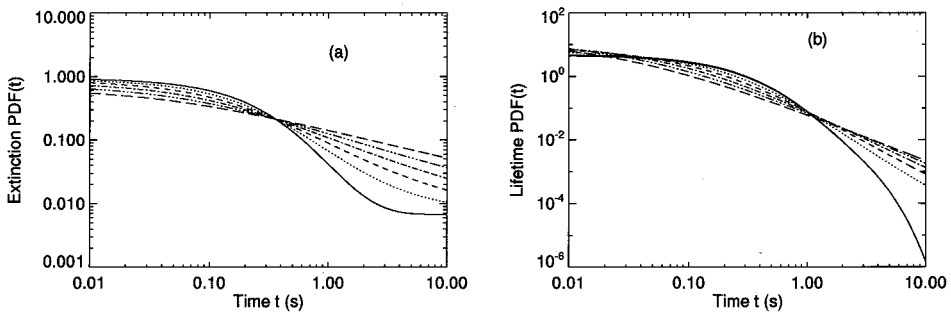


図 2: 初期値がゼロ  $n_0 = 0$  の場合の (a) 絶滅確率  $p_\alpha(0, t)$  及び (b) 待ち時間分布 (寿命分布)  $f_\alpha(\tau)$  (但し, パラメータが  $\nu = 5, \mu = 1$  とした場合): (i)  $\alpha = 1$  (solid line) (ii)  $\alpha = 0.9$  (dotted line) (iii)  $\alpha = 0.8$  (dashed line), (iv)  $\alpha = 0.7$  (dash-dot line), (v)  $\alpha = 0.6$  (dash-three-dots line) 及び  $\alpha = 0.5$  (long-dashed line).

## 4.2 フォッカー・プランク方程式の固有値問題とアクセサリパラメータ

上では2種類(1), (2)のマスター方程式に関連したHeunC, HeunGの微分方程式のアクセサリ・パラメータが初期値と密接に関連していることを明らかにした。以下では、素粒子場の理論(Reggeon Field Theory)に関連したモデルのフォッカー・プランク近似について考えることにする。マスター方程式の解析では1変数であることが多く、また、マスター方程式を用いた解析の困難さの理由から、ランジュバン方程式による記述やフォッカー・プランク方程式による記述が行われる。これらを書き下してみると、

$$\frac{d}{dt}x(t) = c + ax - bx^2 + xF(t), \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = c + ax - bx^2 + \sqrt{x}F(t), \quad (42)$$

及び

$$\frac{d}{dt}x(t) = c + ax - bx^2 + F(t), \quad (43)$$

の3種類の確率微分方程式が導かれる。但し、 $\langle F(t)F(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ とし、議論の簡単化のために、何れもIto型の確率微分方程式とし、ストラットノビッチ解釈によるNoise補正は行わない。従って、この3つに対応するフォッカー・プランク方程式は、それぞれ次式で表される:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}[(c + ax - bx^2)P(x, t)] + D\frac{\partial}{\partial x^2}[x^2P(x, t)], \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}[(c + ax - bx^2)P(x, t)] + D\frac{\partial}{\partial x^2}[xP(x, t)] \quad (45)$$

及び

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}[(c + ax - bx^2)P(x, t)] + D\frac{\partial}{\partial x^2}[P(x, t)]. \quad (46)$$

対応する後退方程式  $Q(x, t) = \exp(-\Lambda t)\phi(x)$  ( $P(x, t) = P_s(x)Q(x, t)$ ) の従う方程式はそれぞれ、(Double confluent Heun equation; HeunD)

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + (\gamma + \alpha x - \beta x^2) \frac{d}{dx}\phi(x) + \lambda\phi(x) = 0 \quad (47)$$

(Biconfluent Heun equation; HeunB)

$$x \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + (\gamma + \alpha x - \beta x^2) \frac{d}{dx}\phi(x) + \lambda\phi(x) = 0 \quad (48)$$

(Triconfluent Heun equation; HeunT)

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + (\gamma + \alpha x - \beta x^2) \frac{d}{dx}\phi(x) + \lambda\phi(x) = 0 \quad (49)$$

の各クラスの微分方程式が得られる。但し、 $\alpha = \frac{c}{D}, \beta = \frac{b}{D}, \gamma = \frac{c}{D}$  及び  $\lambda = \frac{\Lambda}{D}$ 。ちなみに、フォッカー・プランク方程式の特殊性に起因し、固有値がアクセサリパラメータになっていることも理解できよう。ちなみに、固有値の値はHeunDで表現される場合では  $\gamma = 0$  の場合以外は厳密には求まらないと考えられる。

## 5 まとめ

本報では合流型ホインの微分方程式に於ける確率母関数の積分表示と関連したアクセサリパラメータの問題について考察した。初期値がゼロである簡単な場合には積分表示が合流型の超幾何級数に帰着することがわかった。初期値がゼロでない場合には超幾何微分方程式の和として書けるので、解析的な取り扱いが可能であることも明らかになった。ホインの微分方程式になる場合も、初期値がゼロの場合には超幾何の微分方程式となるので、解析的な扱いは可能となる。また、フォッカー・プランク方程式に帰着できる素粒子場の理論(Reggeon Field Theory)で表現されている相互作用に限定した場合にはHeunD, HeunB, HeunTなどのホインのクラスに分類される微分方程式が得られるが、確率母関数の積分表示は得られていないし、アクセサリパラメータは固有値入に一致し、数値計算で数値的にしか決まらないようである。



## 謝辞

本研究は科学研究費補助金 (JSPS, 挑戦的萌芽研究, 課題番号 15K11993) の援助を受けている。

## 参考文献

- [1] L. Kramer, I. Aranson, *Rev. Mod. Phys.* **74**, **99** (2002).
- [2] Y. Uchiyama and H. Konno, *Phys. Lett. A*, **378**, 1350 (2014).
- [3] L. Gil, J. Lega and J. L. Meunier, *Phys. Rev. A*, **41**, 1138 (1990).
- [4] R. Harada and H. Konno, *Asia-Pacific Reviews*, **12**, 208 (2011).
- [5] A. Suzuki and H. Konno, *AIP Advances*, **1**, 032103 (2011).
- [6] H. Konno and A. Suzuki, *Int. J. of Mech., Indust. Sci. and Eng.*, **7**, 32 (2013).
- [7] C. Beta, A. S. Mikhailov, H. H. Rotermund and G. Ertl, *Europhys. Lett.*, **75**, 868 (2006).
- [8] C. Huepe, H. Riecke, K. Daniels and E. Bodenschatz, *Chaos*, **14**, 864 (2004).
- [9] Y.-N. Young and H. Riecke, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 134502 (2003).
- [10] W. J. Freeman, *Neural Networks*, **21**, 257 (2008).
- [11] W. J. Freeman, *Neural Networks*, **22**, 491 (2009).
- [12] D. Takeuchi, S. Ishihara, T. Oonuki, Mai-Honda-Kitahara, K. Kaneko and S. Sawai, *PNAS*, **110**, 5016 (2013).
- [13] K. A. Takeuchi, M. Kuroda, H. Chate and M. Sano, *Phys. Rev. E*, **80**, 051116 (2009).
- [14] M. Tsubota, M. Kobayashi and H. Takeuchi, *Phys. Rep.*, **522**, 191 (2013).
- [15] P. Grassberger and A. De La Torre, *Ann. Phys.*, **122**, 373 (1979).
- [16] K. J. McNeil and D. F. Walls, *J. Sm. Phys.* **10**, 439 (1974).
- [17] R. H. Clayton, *Physica D*, **238**, 951 (2009).
- [18] K. Shimoda, H. Takahashi and C. H. Towns, *Fluctuation in Amplification of Quanta with Application to Maser Amplifiers*, *J. Phys. Soc. Jpn* **12**, 686 (1957).
- [19] N. Nakajima, M. Biyajima, and N. Suzuki, *Phys. Rev. D* **54**, 4333 (1996).
- [20] M. Aoki and H. Yoshikawa, *Reconstructing Macro-econodynamics*, Cambridge, UK, (2007).
- [21] D. Tsigankov and S. Eule, *A stochastic model describing transport of PSD-95 molecules in spiny dendrites provides the basis for synaptic plasticity*, *BMC Neuroscience*, **12**, 96 (2011).
- [22] S. Pigolotti, A. Flammini, M. Marsili and A. Maritan, *PNAS*, **102**, 15747(2005).
- [23] N. Stollenwerk and V. A. A. Jansen, *From Critical Birth-Death Processes to Self-Organized Criticality in Mutation Pathogen Systems: The mathematics of critical phenomena in application to medicine and biology*, (Imperial College Press, London, 2007).

- [24] F. T. Arecchi, U. Bortozzo, A. Montina and S. Residori, Granularity and Inhomogeneity are the Joint Generators of Optical Rogue Waves, *Phys. Rev. Lett.***106**, 153901 (2011).
- [25] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath and B. Jalali, Optical Rogue Waves, *Nature*, **450**, 1054 (2007).
- [26] C. J. Gibson, A. M. Yao and G.-L. Oppo, Optical Rogue Waves in Vortex Turbulence, *Phys. Rev. Lett.***116**, 043903 (2016).
- [27] N. Suzuki and M. Biyajima, Fractional Fokker-Planck equation and oscillatory behavior of cumulant moments, *Phys. Rev. E* **65** 016123 (2001).
- [28] T. Lux, Long-term Stochastic Dependence in Financial Markets: evidence from the German stock market, *Applied Economics Letters*, **3**, 701 (1996).
- [29] S. Ling and W. K. Li, On Fractionally Integrated Autoregressive Moving-Average Time Series Model with Conditional Heteroscedasticity, *J. Amer. Stat. Assoc.*, **92**, 1194 (1997).
- [30] F.L.H. Brown, D. M. Leitner, J. A. McCammon and K. R. Wilson, *Biophysical Journal* **78**, 2257 (2000).
- [31] S. Fedotov and V. Mendez, Non-Markovian Model for Transport and Reactions of Particles in Spiny Dendrites, *Phys. Rev. Lett.*,**101**, 218102 (2008).
- [32] K. Nozaki, Vortex Solitons of Drift Waves and Anomalous Diffusion, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 184 (1981).
- [33] J. Cisternas, O. Descalzi, T. Albers and G. Radons, *Phys. Rev. Lett.*,**116** (2016).
- [34] A. Ronveaux (Ed.), *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford (1995).
- [35] M. N. Hounkonnou, A. Ronveaux and Komi Sodoga, *Appl. Math. Comp.***189**, 816 (2007).
- [36] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, Berlin (1983).
- [37] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, NY (1968).