数理解析研究所講究録
第2037巻 2017年 57-60

佐藤超函数論に基づく数値積分

Numerical integration based on the hyperfunction theory

緒方秀教 (Hidenori Ogata)
電気通信大学 (The University of Electro-Communications)
(e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

1 はじめに

本研究では，佐藤超函数論に基づく数値積分法を提案する．佐藤超関数論は複素関数論に基づく一般化関数論であり [4]，極，不連続性など特異性を持つ関数を複素解析関数を用いて表現する．本研究では佐藤超函数論のこの側面に着目し，特に端点特異性の強い積分に有効な数値積分法を提案する．そして，理論・数値実験両面から本方法の有効性を検証する．

2 佐藤超函数論

（佐藤）超函数 (hyperfunction) は一言で言えば，複素解析函数の境界値の差で表される一般化関数である．詳しく述べると，実軸上の開区間 $I=(a,b)$ 上の超函数とは，D を I のある複素近傍（$\overline{I}=[a,b]$ を含む複素領域）として，$D\setminus I$ 上のある複素解析関数 $F(z)$ の I における境界値の差

$$f(x):=F(x+\mathrm{i}0)-F(x-\mathrm{i}0),\quad x\in I \tag{1}$$

として表される一般化関数 $f(x)$ である．そして，複素解析関数 $F(z)$ を超函数 $f(x)$ の定義関数と呼び，$f(x)=[F(z)]$ と記す．

I 上の超函数 $f(x)=[F(z)]$ に対し，I 上の実解析関数 $\varphi(x)$ との積 $\varphi(x)f(x)$ を $\varphi(x)f(x)=[\varphi(z)F(z)]$ で定義する．

I 上の超函数 $f(x)=[F(z)]$ の積分を

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x:=-\oint_C F(z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

で定義する．ここで，C は $\overline{I}$ を正の向きに囲み領域 D に含まれる積分路である（図 1 参照）．

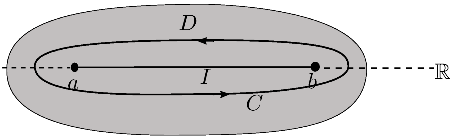


図 1: 閉積分路 C.

超函数の例として，デルタ関数 $\delta(x)=[-1/(2\pi\mathrm{i}z)]$ がある．$\varphi(x)$ を原点 $x=0$ を含む閉区間 $[a,b]$ 近傍の実解析関数とすると，超函数 $\varphi(x)\delta(x)=[-\varphi(z)/(2\pi\mathrm{i}z)]$ の区間 (a,b) 上の積分は，上の積分の定義と Cauchy の積分公式より

$$\int_a^b \varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$$

となる．これはデルタ関数の初等的な定義に他ならない．

3 数値積分に対する超函数法

3.1 有限区間積分の場合

次の有限区間 $I=(a,b)$ 上の積分を考える．

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x\quad(-\infty<a<b<+\infty), \tag{3}$$

ここで，$f(x)$ は $\overline{I}$ 近傍の実解析関数，$w(x)$ は重み関数である．このとき，積分 (3) の被積分関数は，

$$\chi_I(x)f(x)w(x)=\left[-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}f(z)\Psi(z)\right], \tag{4}$$

$$\chi_I(x):=\begin{cases}1 & :\ x\in I\\ 0 & :\ x\notin\overline{I},\end{cases}\qquad \Psi(z):=\int_I\frac{w(x)}{z-x}\mathrm{d}x \tag{5}$$

と超函数と見なすことができる．ここで，主な重み関数 $w(x)$ に対する関数 $\Psi(z)$ の具体形は表 1 で与えられる[1]．したがって，超函数の積分の定義 (2) より

表 1: 積分 (3) の主な重み関数 $w(x)$ に対する関数 $\Psi(z)$ の具体形．

区間 I	重み関数 $w(x)$	関数 $\Psi(z)$
$(-1,1)$	1	$\log\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$
$(0,1)$	$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$B(\alpha,\beta)z^{-1}$
	$(\alpha,\beta>0)$	$\times F(\alpha,1;\alpha+\beta;z^{-1})$

積分 (3) は

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\Psi(z)\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{u_{\mathrm{period}}} f(\varphi(u))\Psi(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{6}$$

と表される．ここで，C は $\overline{I}$ の周りを正の向きに囲み，$f(z)$ が正則であるような領域に含まれる積分路であり，周期関数 $z=\varphi(u)$（周期 u_{period}）でパラメータ表示される．式 (6) の最右辺を台形則で近似することにより，数値積分公式

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x\\ &\simeq \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{N-1} f(\varphi(kh))\Psi(\varphi(kh))\varphi'(kh),\quad h=\frac{u_{\mathrm{period}}}{N}\end{aligned} \tag{7}$$

を得る [3]．これを「超函数法」とよぶ[2]．なお，$f(x)$ が実軸上実数値である場合，鏡像の原理より $f(\overline{z})=\overline{f(z)}$ が成り立つことを利用して，標本点数 N を半減することができる．

数値積分公式 (7) は周期関数の一周期区間積分に対する台形則近似であるので，関数 $\varphi(u)$ が実解析的であるならば，[1]4.6.5 項の定理を用いて，超函数法による近似積分値は真値に指数関数的収束することが示される．

[1] 複素対数関数 $\log z$ は $\log x \in \mathbb{R}$ $(x>0)$ なる主値を取ることにする．

[2] 数値積分公式 (7) は本研究より前に [2] で提案されている．しかし，[2] では佐藤超函数論との関係について言及していない．

3.2 半無限区間積分の場合

超函数法は半無限区間積分に対しても構成できる．次の半無限区間積分を考える．

$$\int_0^{\infty} f(x)w(x)\mathrm{d}x, \tag{8}$$

ここで，$f(x)$ は $[0,+\infty)$ 上の実解析関数，$w(x)$ は重み関数である．この積分も，被積分関数を次のように超函数と見なすことができる．

$$\chi_{(0,+\infty)}(x)f(x)w(x) = \left[-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}f(z)\Psi(z)\right],$$

ここで，主な重み関数 $w(x)$ に関して関数 $\Psi(z)$ は表 2 で与えられる．したがって，超函数積分の定義 (2) より積分 (8) は

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(x)w(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\Psi(z)\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(u))\Psi(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{9}$$

と複素積分表示される．ここで，C は $[0,+\infty)$ を正の向きに囲み，$f(z)$ が正則であるような領域に含まれる積分路（図 2 参照）であり，$z=\varphi(u)$, $-\infty<u<+\infty$ でパラメータ表示される．式 (9) 最右辺を刻み幅 h の台形則で近似することにより，数値積分公式

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} f(x)w(x)\mathrm{d}x\\ &\qquad\simeq \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=-N_2}^{N_1} f(\varphi(kh))\Psi(\varphi(kh))\varphi'(kh)\end{aligned} \tag{10}$$

を得る．ここで，N_1, N_2 は正の整数で，被積分関数は $k=-N_2, N_1$ のとき絶対値が十分小さくなるものとする．これも超函数法と呼ぶことにする．なお，有限区間積分の場合と同様，$f(x)$ が実軸上実数値である場合，鏡像の原理を用いて標本点数を半減することができる．

数値積分公式 (10) は全無限区間積分の台形則近似であり，被積分関数が実軸全体で実解析関数であるならば精度が良い．[1]3.4.6 項の定理を用いることにより，数値積分公式 (2) による積分近似値は台形則の刻み幅 h を小さくしていくにつれて積分の真値に指数関数的収束することが示される．

表 2: 積分 (8) の主な重み関数 $w(x)$ に対する関数 $\Psi(z)$ の具体形.

重み関数 $w(x)$	1	$x^{\alpha-1}$ ($\alpha>0,\ \alpha\notin\mathbb{Z}$)
関数 $\Psi(z)$	$\log(-z)$	$-\pi(-z)^{\alpha-1}/\sin(\pi\alpha)$

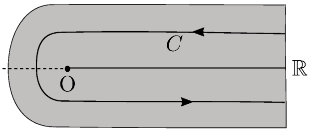


図 2: $[0,+\infty)$ を正の向きに囲む積分路 C.

4 数値例

次の端点特異性をもつ積分に対し，(N を半減した) 超函数法および DE 公式により積分近似値を計算し，その誤差を比較した.

$$\int_0^1 e^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = B(\alpha,\beta)F(\alpha;\alpha+\beta;1), \tag{11}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \Gamma(\alpha). \tag{12}$$

なお，超函数法の複素積分路は，有限区間積分 (11) に対しては楕円

$$z = 0.5 + 2.525\cos u + i2.475\sin u \tag{13}$$

をとり，半無限区間積分 (12) に対しては，式 (9) 最右辺の被積分関数が二重指数関数的に減衰するよう

$$z = \frac{w(u)}{i\pi}\log\left(\frac{1+iw(u)}{1-iw(u)}\right), \quad w(u) = \sinh u + 0.5i \tag{14}$$

ととった（図 3 参照）. すべての数値計算は C++プログラムを用いて倍精度計算で行った.

超函数法および DE 公式の誤差の標本点数 N に対する変化を図 4，5 に，誤差の減衰率を表 3，4 に示す. 有限区間積分 (11) について，$\alpha=\beta=0.5$ の場合，両公式とも指数関数的収束するが，超函数法の方が収束が速い. そして，端点特異性の極めて強い $\alpha=\beta=10^{-4}$ の場合，超函数法は指数関数的収束するのに対し，DE 公式は積分計算が全くできていない. 半無限区間積分 (12) について，両公式は指数関数的収束するが，α を小さくする（端点特異性を強くする）につれて DE 公式は収束が遅くなる一方，超函数法は収束の速さが全く変わっていない.

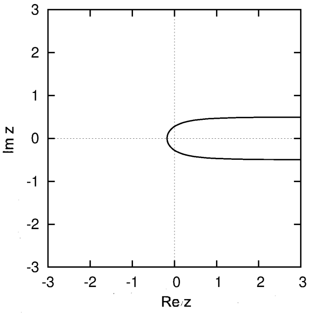


図 3: 超函数法の積分路 (14).

超函数法は，佐藤超函数が特異性のある関数を解析関数で表しているという側面を活かした数値積分法であり，それ故，上の数値例でわかるように，端点特異性の強い積分に対して有効である.

謝辞

本研究を始めるきっかけを与えた平山弘氏（神奈川工科大学教授）に深く感謝する. 本研究は日本学術振興会科研費 16K05267 の助成を受けている.

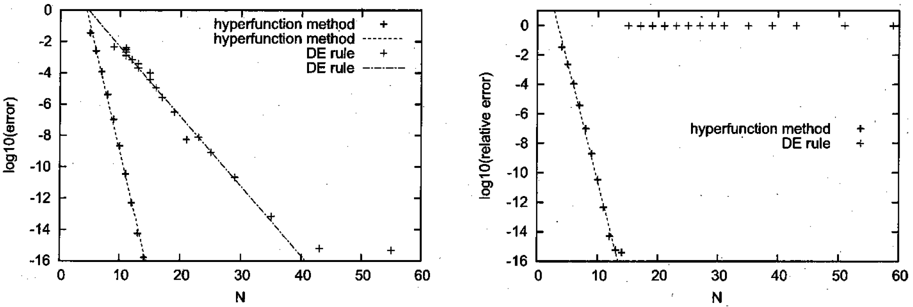
参考文献

[1] P. J. Davis and P. Rabinowitz, Methods of Numerical Integration, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1984.

[2] 平山弘，周回積分変換法による数値積分法，第 44 回数値解析シンポジウム予稿集，(2015) 21–24.

[3] 緒方秀教，平山弘，数値積分に対する超函数法，日本応用数理学会論文誌，**26** (2016) 33–43.

[4] 佐藤幹夫，超函数の理論，数学，**10** (1958–1959) 1–27.

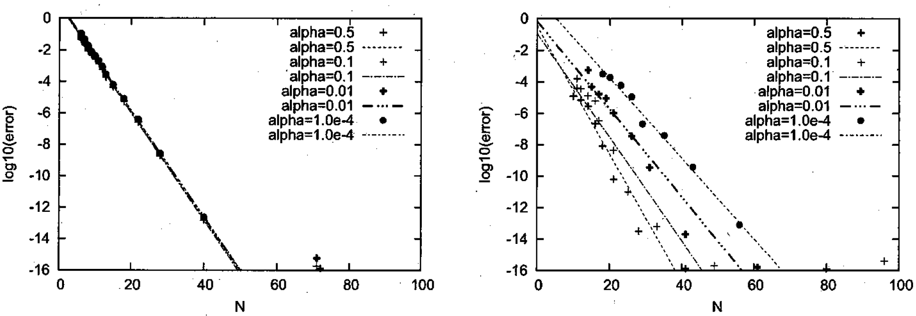


$\alpha = \beta = 0.5$ $\qquad$ $\alpha = \beta = 10^{-4}$

図 4: 有限区間積分 (11) に対する超函数法，DE 公式の数値積分誤差.

表 3: 有限区間積分 (11) に対する超函数法，DE 公式の誤差の減衰率.

$\alpha = \beta$	0.5	10^{-4}
超函数法	$O(0.025^N)$	$O(0.025^N)$
DE 公式	$O(0.36^N)$	–



超函数法 $\qquad$ DE 公式

図 5: 半無限区間積分 (12) に対する超函数法，DE 公式の数値積分誤差.

表 4: 半無限区間積分 (12) に対する超函数法，DE 公式の誤差の減衰率.

α	0.5	0.1	0.01	10^{-4}
超函数法	$O(0.46^N)$	$O(0.46^N)$	$O(0.46^N)$	$O(0.46^N)$
DE 公式	$O(0.39^N)$	$O(0.47^N)$	$O(0.53^N)$	$O(0.55^N)$