

Almansi 型分割に基づいた重調和方程式に対する 基本解近似解法

Method of fundamental solutions for biharmonic equation based on Almansi-type decomposition

榊原 航也 (Koya SAKAKIBARA)

東京大学大学院 数理科学研究科

(Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

本論文では、重調和方程式に対する境界値問題を、基本解近似解法により計算することを考える。特に、重調和関数の Almansi 型分割に基づくスキームを考え、領域が 2 次元領域内の円板である時に、近似解が一意に存在すること、および誤差が近似点の個数に関して指数的に減衰することを証明する。また、数値実験により、得られた誤差評価が近似誤差の振る舞いをよく捉えていることを確かめる。

1 導入

基本解近似解法 (Method of Fundamental Solutions, MFS) は、線型同次偏微分方程式に対するメッシュフリー解法であり、数学の文献では、Kupradze and Aleksidze [14], Kupradze [13] で初めてそのアイデアが提示されたとされている。まず、MFS の基本概念をここで説明しておこう。Ω を 2 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^2 内の、滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし、次の境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}u = f & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし、 \mathcal{L} は 2 階線型楕円型偏微分作用素、 $\mathcal{B}u$ は Dirichlet, Neumann, Robin 境界条件などを表し、 f は $\partial\Omega$ 上で与えられた関数である。この問題に対して、MFS は次の手順によりその近似解を与える。

- (i) 特異点 $\{y_k\}_{k=1}^N$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ から “適当に” 選んでとる。
- (ii) 近似解 $u^{(N)}$ を次で定める：

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N Q_k E(x - y_k).$$

ただし、 E は作用素 \mathcal{L} の基本解である。

- (iii) 係数 $\{Q_k\}_{k=1}^N$ は選点法により決定する。つまり、選点 $\{x_j\}_{j=1}^N$ を $\partial\Omega$ から “適当に” 選び、次の “近似” 境界条件を課す：

$$u^{(N)}(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

以上が、MFSの1つのアルゴリズムである。すなわち、対象の偏微分作用素 \mathcal{L} の基本解を使って近似解を構成するわけである。これが、基本解近似解法と呼ばれている由縁でもある。また、上では、選点法を用いて線型結合の係数を決定しているが、例えば最小二乗法など、他の手法で係数を決定する数値計算例も多数存在する。しかしながら、本稿では、あくまでも選点法に対象を限定し、その上で数学解析を進めていくこととする。数値解析の面から見て、MFSにどのようなメリット・性質があるのかをここでまとめてみたい。

- 領域のメッシュ分割が不要である。有限要素法、有限体積法、差分法など、よく用いられている数値計算法では、領域のメッシュ分割が必要である。一般に、メッシュ分割は、数値計算において計算コストが大きく、例えば、移動境界問題など、領域が変形するごとにメッシュ再分割が必要とされる問題に適用すると、かなりの計算時間を要する。一方で、MFSでは、領域の外部および境界上に点を取るだけなので、計算コストは非常に軽く、移動境界問題などへの応用にも適している。
- 適当な条件下で誤差が N に関して指数的に減衰する。特異点、選点を“適当に”配置すれば、境界データが解析的であるときに、近似誤差が点の数 N に関して指数的に減衰することが知られている。これは、誤差がメッシュサイズに関して代数的に減衰する、有限要素法、有限体積法、差分法などと比べて大きく異なる、MFSの特徴である。
- 点の“適当な”配置のための決定的な指針が存在しない。上で、点を“適当に”配置すれば、誤差が N に関して指数的に減衰すると述べたが、何が“適当な”配置なのかは、未だに解明されていない問題である。また、点を与えたときに、そもそも近似解 $u^{(N)}$ が存在するか否かも、非自明な問題である。例えば、円板領域または円環領域ならば、同心円上の等分点として特異点、選点を与えれば、近似解が一意に存在しかつ誤差が N に関して指数的に減衰することが示される[10, 6, 16, 18]。また、解析的な境界を持つJordan領域、二重連結領域ならば、等角写像を用いて点配置を行うことで、近似解が一意に存在し、誤差が指数的に減衰することが知られている[7, 8, 11, 9, 17, 20]。解析が困難になっている理由としては、有限要素法、有限体積法、差分法などで用いられている、領域のメッシュ分割に基づいた議論を用いることができないことが挙げられる。先行研究に見られるように、MFSの数学解析には、数値解析的というよりは、むしろ純粋数学的な議論が必要となる。

上記の事実に鑑みて、MFSの数学解析に要求されることは、次のようにまとめられる。

特異点・選点を何らかの規則により与えたときに、近似解が一意に存在すること、および誤差が指数的に減衰することを示すこと。

近似解の一意存在を示す代わりに、近似関数空間がある空間で稠密であることを示すことで、MFSの有用性を示している論文もあるが([22, 23]など)、それはあくまでも稠密性を示しているだけに過ぎないので、近似解の存在そのものは保証していないことに気をつけなければならない。

本稿では、対象とする方程式を重調和方程式にし、MFSの数学解析を行う。つまり、次の問題を考える：

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ は平面上の重調和作用素、 f, g は $\partial\Omega$ 上で定義された既知函数、 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ は u の $\partial\Omega$ 上での外向き法線微分を表す。上では、2階楕円型方程式の境界値問題に対する近似解の構成法を

述べたが、4階方程式に対しては、その基本解、および次数が2だけ下がった作用素（今の場合は Laplace 作用素 Δ ）の基本解を用いることで、近似解を構成する。つまり、重調和方程式の境界値問題 (1) に対しては、次の形の近似解を求めることになる [5, 4].

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N \left(Q_k^{(1)} E(x - y_k) + Q_k^{(2)} F(x - y_k) \right). \quad (2)$$

ただし、 $E(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$, $F(x) = \frac{1}{8\pi} |x|^2 \log|x|$ はそれぞれ Laplace 作用素 Δ , 重調和作用素 Δ^2 の基本解である。そして、選点法により係数を決定する。

$$u^{(N)}(x_j) = f(x_j), \quad \frac{\partial u^{(N)}}{\partial \nu}(x_j) = g(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

これが通常の MFS のスキームである。しかしながら、実際にこのスキームの解析を行おうとすると、近似解の一意存在を示す際に困難な点が生じる。また、後で数値実験 (§4) で示すように、実は、これから示す別のスキームの方が計算精度がよくなる。そこで、まずは、通常の MFS を多少変形した別の数値計算スキームを導入しよう。そのための鍵となるのは、重調和関数の Almansi 型分割である。

Goursat [2] において、重調和関数 u が与えられた時、2つの正則関数 φ, ψ が存在して、次が成り立つことが示された：

$$u(x, y) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(z) + z\psi(z) + z\bar{\psi}(z) = 2\Re(\varphi(z) + z\psi(z)).$$

つまり、 $\gamma(x, y) = 2\Re\varphi(z)$, $\alpha(x, y) = 2\Re\psi(z)$, $\beta(x, y) = 2\Im\psi(z)$ と定義すれば、

$$u(x, y) = \gamma(x, y) + x\alpha(x, y) + y\beta(x, y)$$

と書けるので、重調和関数を求める問題は、3つの調和関数でそのうちの2つが共役調和であるものを求める問題に帰着できる。さらに、Krakowski and Charnes [12], Bock and Gürlebeck [1] において、調和関数の数は実は2つで良いことが示された。すなわち、与えられた重調和関数 u に対して、調和関数 $p, q, \bar{p}, \bar{q}, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}}$ が存在して、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= p(x, y) + (x^2 + y^2)q(x, y) \\ u(x, y) &= \bar{p}(x, y) + x\bar{q}(x, y) \\ u(x, y) &= \bar{\bar{p}}(x, y) + y\bar{\bar{q}}(x, y). \end{aligned} \quad (4)$$

特に、(4) は重調和関数の Almansi 型分割と呼ばれる。よって、2つの調和関数の適切な近似を求めることができれば、そこから問題 (1) の近似解を得られると期待できる。本稿では、特に、Almansi 型分割 (4) を考え、それに基づいた MFS のスキームの数学解析を行う。つまり、Almansi 型分割 (4) における調和関数 p, q の近似 $p^{(N)}, q^{(N)}$ を次式で与える。

$$p^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N Q_k^p E(x - y_k), \quad q^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N Q_k^q E(x - y_k).$$

その結果として、問題 (1) の近似解 $u^{(N)}$ を、次の形で求めることになる [3]：

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N \left(Q_k^p E + |x|^2 Q_k^q \right) E(x - y_k). \quad (5)$$

そして、係数 $\{Q_k^p\}_{k=1}^N, \{Q_k^q\}_{k=1}^N$ は選点法 (3) により定める。Li et al. [15] では、Almansi 型分割に基づいた MFS のスキーム (5) の解析を行っているが、そこでは、選点法ではなく Trefftz 法 (ある種のエネルギー最小化法) を扱っている。従って、Almansi 型分割に基づいた MFS のスキーム (1), ならびに選点法 (3) を用いた際の数学解析を、領域 Ω が円板 $D_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \rho\}$ である場合に行う。

2 主結果

以降、断りなしに、 \mathbb{R}^2 と \mathbb{C} とを同一視した表現を用いる。特異点 $\{y_k\}_{k=1}^N$, ならびに選点 $\{x_j\}_{j=1}^N$ を次で与える。

$$\begin{aligned} y_k &= R\omega^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ x_j &= \rho\omega^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

ただし、 $R > \rho$, $\omega = \exp(2\pi i/N)$ である。

定理 2.1. 選点方程式 (3) を満たす, (5) で定義される近似解 $u^{(N)}$ が一意に存在するためには、 $R^N - \rho^N \neq 1$ であることが必要十分である。

条件 $R^N - \rho^N \neq 1$ は、円板領域における Laplace 方程式を考えた際にも登場したものである ([10, Theorem 1] を見よ)。つまり、Almansi 型分割を用いて解析を行うことで、Laplace 方程式に対する MFS の性質が、重調和方程式に対しても引き継がれているのである。

定理 2.2. 条件 $R^N - \rho^N \neq 1$, および $R \neq 1$ も成り立つと仮定する。さらに、境界データ f, g は解析的であるとす。つまり、 f, g の Fourier 係数 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は、ある定数 C および $b \in]0, 1[$ について、次を満たすとす：

$$|f_n|, |g_n| \leq Cb^{|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

このとき、次の評価が成り立つ：

$$\|u - u^{(N)}\|_{L^\infty(\Omega)} = \begin{cases} O(Nb^{N/2}) & \text{if } b\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 > 1, \\ O\left(N^2\left(\frac{\rho}{R}\right)^N\right) & \text{if } b\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = 1, \\ O\left(N\left(\frac{\rho}{R}\right)^N\right) & \text{if } b\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 < 1. \end{cases}$$

Laplace 方程式に対する結果と比べると、 N が 1 つだけ余分に登場していることがわかる ([10, Theorem 2] を見よ)。これは、重調和函数を Almansi 型分割していることに起因するものであると考えられる。

3 主結果の証明

本節では、主結果の証明の概略を述べる。詳しい内容は、S. [21] に発表する予定である。

3.1 定理 2.1 の証明

まず、選点方程式 (3) は、次の形に書き換えられることに注意しよう：

$$GQ = b. \quad (6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}, \\ G_{11} &= (E(x_j - y_k) \mid j, k = 1, 2, \dots, N) \in \mathbb{R}^{N \times N}, \\ G_{12} &= (\rho^2 E(x_j - y_k) \mid j, k = 1, 2, \dots, N) = \rho^2 G_{11} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \\ G_{21} &= \left(\frac{1}{2\pi} \Re \left(\frac{\omega^{j-1}}{x_j - y_k} \right) \mid j, k = 1, 2, \dots, N \right), \\ G_{22} &= \left(2\rho E(x_j - y_k) + \frac{\rho^2}{2\pi} \Re \left(\frac{\omega^{j-1}}{x_j - y_k} \right) \mid j, k = 1, 2, \dots, N \right) = 2\rho G_{11} + \rho^2 G_{21} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \\ Q &= \begin{pmatrix} Q^p \\ Q^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad Q^{p,q} = (Q_1^{p,q}, Q_2^{p,q}, \dots, Q_N^{p,q})^T \in \mathbb{R}^N, \\ b &= \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T \in \mathbb{R}^N, \quad g = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_N))^T \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

各ブロック行列 $G_{\mu\nu}$ は巡回行列であるから、離散 Fourier 変換 W を

$$W = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{(j-1)(k-1)} \mid j, k = 1, 2, \dots, N \right)$$

により定義し、また

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} W & O \\ O & W \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$$

と定めれば、適当な置換行列 P を用いて、係数行列 G は次のようにブロック対角化される：

$$P^{-1} \tilde{W} G \tilde{W} P = \text{diag}(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{N-1}), \quad \Phi_l = \begin{pmatrix} \gamma_{11l} & \gamma_{12l} \\ \gamma_{21l} & \gamma_{22l} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

ただし、

$$\gamma_{11l} = \varphi_l(\rho), \quad \gamma_{12l} = \rho^2 \varphi_l(\rho), \quad \gamma_{21l} = \psi_l(\rho), \quad \gamma_{22l} = 2\rho \varphi_l(\rho) + \rho^2 \psi_l(\rho) \quad (8)$$

であり、関数 φ_l, ψ_l は次で定義される：

$$\varphi_l(z) = \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{ml} E(z - R\omega^m), \quad \psi_l(z) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\omega^{ml}}{2\pi} \Re \left(\frac{z/|z|}{z - R\omega^m} \right).$$

ブロック対角化 (7) より、 G の行列式は

$$\det G = \prod_{l=0}^{N-1} \det \Phi_l$$

と計算される。よって、 G が非特異であるためには、すべての Φ_l が非特異であることが必要十分である。また、(8) より、

$$\det \Phi_l = \gamma_{11l} \gamma_{22l} - \gamma_{21l} \gamma_{12l} = 2\rho \varphi_l(\rho)^2$$

となるため、 G が非特異であるためには、 $\varphi_l(\rho) \neq 0$ ($l = 0, 1, \dots, N-1$) が成り立つことが必要十分であることがわかった。この主張、および後の誤差解析のために、関数 φ_l, ψ_l をより扱いやすい形で表現しておこう。

補題 3.1. $z = re^{i\theta}$ ($r \in [0, R[, \theta \in \mathbb{R}$) に対して、

$$\varphi_l(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |z^N - R^N| & (l = 0), \\ -\frac{N}{4\pi} \sum_{n \equiv l} \frac{1}{|n|} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\theta} & (l = 1, 2, \dots, N-1) \end{cases}$$

が成り立つ。また、 $z = re^{i\theta}$ ($r \in]0, R[, \theta \in \mathbb{R}$) に対して、

$$\psi_l(z) = -\frac{N}{4\pi r} \sum_{\substack{n \equiv l \\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\theta}$$

が成り立つ。ただし、 \equiv 記号は、いつでも N を法として成り立つものとする。

φ_l に関しては、[10, Lemma 1] に同様の主張が示されている。 ψ_l の級数展開も、 φ_l のそれを得るための手続きを踏襲することで得られる。

さて、この補題より、

$$\varphi_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \log |\rho^N - R^N|, \quad \varphi_l(\rho) = -\frac{N}{4\pi} \sum_{n \equiv l} \frac{1}{|n|} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|n|} < 0 \quad (l = 1, \dots, N-1)$$

が成り立つ。従って、 G が非特異であるためには、 $R^N - \rho^N \neq 1$ が成り立つことが必要十分であり、こうして、定理 2.1 が示された。

3.2 定理 2.2

まずは、問題 (1) の厳密解の陽的な表示を、Almansi 型分割 (4) を用いて求める。 p, q はともに円板領域 D_ρ で調和なので、次のように Fourier 級数展開可能である。

$$p(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in\theta}, \quad q(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in\theta} \quad (0 \leq r \leq \rho, \theta \in \mathbb{R}).$$

係数 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は境界条件により、次のように決定される。

$$a_n = \left(1 + \frac{|n|}{2}\right) f_n - \frac{\rho}{2} g_n, \quad b_n = \frac{1}{2\rho^2} (\rho g_n - |n| f_n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

こうして、厳密解 u を具体的な形で求めることができた。

次に、近似解の具体的な表示を求める。つまり、選点方程式 (3) を解き、係数 $\{Q_k^p, Q_k^q\}_{k=1}^N$ を求める。 $G' = P^{-1}GP, W' = P^{-1}\tilde{W}P$ とすれば、

$$P^{-1}\tilde{W}^{-1}G\tilde{W}P = (W')^{-1}G'W'$$

であるから、(7) より次が成り立つ：

$$(W')^{-1}G'W' = \text{diag}(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{N-1}). \quad (9)$$

これらの行列を用いれば、元々の連立一次方程式 (5) は、等価な次の連立一次方程式に書き換えられる。

$$G'Q' = b'.$$

ただし、

$$\begin{aligned} Q' &= P^{-1}Q = (Q_1^p, Q_1^q, Q_2^p, Q_2^q, \dots, Q_N^p, Q_N^q)^T, \\ b' &= P^{-1}f = (f(x_1), g(x_1), f(x_2), g(x_2), \dots, f(x_N), g(x_N))^T. \end{aligned}$$

(9) より、 G' の逆行列は

$$(G')^{-1} = (((G')^{-1})_{kj} \mid k, j = 1, 2, \dots, N), \quad ((G')^{-1})_{kj} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \omega^{(k-j)(l-1)} \Phi_{l-1}^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

と求められる。よって、境界データ f, g の Fourier 係数 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を用いて、係数 $\{Q_k^{p,q}\}_{k=1}^N$ は次のように表現される。

$$\begin{pmatrix} Q_k^p \\ Q_k^q \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \omega^{(k-j)(l-1)} \Phi_{l-1}^{-1} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \omega^{(j-1)n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega^{(k-1)n} \Phi_n^{-1} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}.$$

故に、近似解 $u^{(N)}$ は次のように具体的に書かれる：

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N E(x - y_k) (1 - |x|^2) \begin{pmatrix} Q_k^p \\ Q_k^q \end{pmatrix} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi_n(x)}{\det \Phi_n} [\gamma_{22n} - \gamma_{12n}g_n + |x|^2(-\gamma_{21n}f_n + \gamma_{11n}g_n)].$$

従って、誤差 $\|u - u^{(N)}\|_{L^\infty(\Omega)}$ は上から次のように評価される。

$$\begin{aligned} \|u - u^{(N)}\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_{\substack{0 \leq r < \rho \\ \theta \in \mathbb{R}}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\left(1 + \frac{|n|}{2}\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in\theta} - \gamma_{22n} \frac{\varphi_n(re^{i\theta})}{\det \Phi_n} \right) \right. \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \left(-\frac{\rho}{2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in\theta} + \gamma_{12n} \frac{\varphi_n(re^{i\theta})}{\det \Phi_n} \right) \\ &\quad + r^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(-\frac{|n|}{2\rho^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in\theta} + g_{21n} \frac{\varphi_n(re^{i\theta})}{\det \Phi_n} \right) \\ &\quad \left. + r^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \left(\frac{1}{2\rho} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in\theta} - \gamma_{11n} \frac{\varphi_n(re^{i\theta})}{\det \Phi_n} \right) \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (|f_n|e_{1n} + |g_n|e_{2n} + \rho^2|f_n|e_{3n} + \rho^2|g_n|e_{4n}). \end{aligned} \tag{10}$$

ただし、

$$\begin{aligned} e_{jn} &= \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \gamma_{jn}(\theta), \\ \alpha_{1n}(\theta) &= \left| \left(1 + \frac{|n|}{2}\right) e^{in\theta} - \gamma_{22n} \frac{\varphi_n(\rho e^{i\theta})}{\det \Phi_n} \right|, \quad \alpha_{2n}(\theta) = \left| -\frac{\rho}{2} e^{in\theta} + \gamma_{12n} \frac{\varphi_n(\rho e^{i\theta})}{\det \Phi_n} \right|, \\ \alpha_{3n}(\theta) &= \left| -\frac{|n|}{2\rho^2} e^{in\theta} + \gamma_{21n} \frac{\varphi_n(\rho e^{i\theta})}{\det \Phi_n} \right|, \quad \alpha_{4n}(\theta) = \left| \frac{1}{2\rho} e^{in\theta} - \gamma_{11n} \frac{\varphi_n(\rho e^{i\theta})}{\det \Phi_n} \right| \end{aligned}$$

である。上の評価で大事なのは、Almansi 型分割により重調和関数が調和関数に分解されているので、調和関数に対する最大値原理を用いることができている点である。一般には、重調和関数は最大値原理を満たさないで、上のような評価は不可能であることを注意しておく。

(10) を評価するためには、 e_{jn} の大域的、ならびに局所的な評価が必要であり、それらはそれぞれ以下の補題に示される。

補題 3.2. ある正定数 $C = C(\rho, R)$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して以下の評価が成り立つ。

$$e_{1n}, e_{3n} \leq C(1 + |n|), \quad e_{2n}, e_{4n} \leq C.$$

補題 3.3. ある正定数 $C = C(\rho, R)$ が存在して、十分大きな N に対して、

$$e_{10}, e_{30} \leq C \left(\frac{\rho}{R} \right)^N, \quad e_{20}, e_{40} \leq CN^{-1} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N$$

および、 $1 \leq n \leq N/2$ に対して

$$e_{1n}, e_{3n} \leq Cn \left(\frac{\rho}{R} \right)^{N-2n}, \quad e_{2n}, e_{4n} \leq \frac{Cn}{N-n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{N-2n}$$

が成り立つ。

これら補題の一部は、[10, Lemma 2] に示されている。これら 2 つの補題を用いることで、(10) から、定理 2.2 が従う。

4 数値実験

本節では、簡単な数値実験の結果を報告する。

4.1 Ω : 円板

まずは、 Ω が単位円板 D_1 の場合を考える。境界データ f, g は次で与えることにする。

$$f(x) = x_1^4 - x_2^4, \quad g(x) = 4(x_1^3, -x_2^3)^T \cdot \nu, \quad x = (x_1, x_2)^T. \quad (11)$$

この時、 $u(x) = x_1^4 - x_2^4$ が (1) の厳密解になる。特異点を配置するためのパラメータ R を 2 にとった場合の結果を、図 1 に示す。結果からわかるように、我々の誤差評価は、近似誤差の振る舞いを非常によく捉えている。さらに、Almansi 型分割に基づいた MFS の収束の速さは、通常スキームのそれよりも速いことが数値的にわかる。これにより、結果として、精度の差が生じている。このような現象を理解するためには、後退誤差解析が必要とされられると思われるが、それは今後の課題としたい。

4.2 Ω : 多項式曲線により囲まれた内部単連結領域

次に、境界 $\partial\Omega$ が多項式曲線 $\Psi_{4,8}(\gamma_1)$ により与えられる場合を考える。ただし、

$$\Psi_{l,r}(z) = z + \frac{z^l}{r}$$

であり、 $\Psi_{l,r}$ は $D_{l-\sqrt{r/l}}$ で等角である。この場合、先行研究において、Laplace 方程式に対する MFS や DSM (MFS の派生版の 1 つである双極子法) に対しては、近似解が一意に存在し、かつ誤差が指数的に減衰

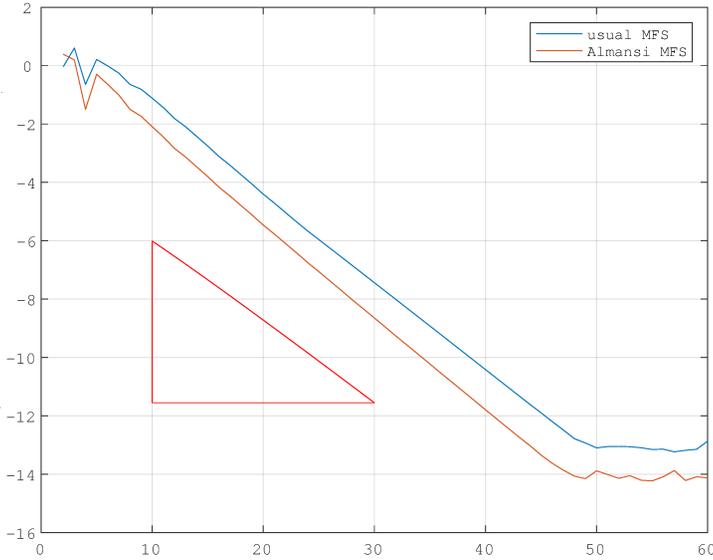


図1 境界データ f, g が (11)2 より与えられ, 特異点を配置するためのパラメータ R を 2 にとった時の数値実験結果. 青色の線は通常スキーム (2), 赤色の線は Almansi 型分割に基づいたスキーム (5) の結果である. そして, 赤色の三角形の斜辺の傾きは, 理論的な収束の速さを表す.

することが示されている [9, 19]. 従って, Almansi 型分割に基づいた MFS に対しても, 同様の結果が成り立つことが期待される. そこで, ここでは数値的にそれが成り立つことを確認する. 特異点 $\{y_k\}_{k=1}^N$ ならびに選点 $\{x_j\}_{j=1}^N$ は, 等角写像 $\Psi_{4,8}$ を用いて次で与える.

$$\begin{cases} y_k = \Psi_{4,8}(R\omega^{k-1}), & k = 1, 2, \dots, N, \\ x_j = \Psi_{4,8}(\rho\omega^{j-1}), & j = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

ただし, $R = 1.2$ とした. 結果を図 2 に示す. この場合にも, Almansi 型分割に基づいた MFS の精度の方が, 通常スキームよりも良いことがわかり, また, 収束の速さは, MFS ならびに DSM に対する先行研究の結果から期待されるものであることがわかった. 従って, Ω が解析的な正則 Jordan 曲線により囲まれる場合にも, 理論誤差評価が示されることが期待される.

5 まとめ

本論文では, 重調和方程式の典型的な境界値問題を考え, その近似解を重調和函数の Almansi 型分割に基づく MFS で与えた. 結果として, 近似解が一意に存在するための必要十分条件を導き, 近似誤差が N に関して指数的に減衰することを証明した. 数値実験の結果は, 我々の誤差解析の精密さを例証した.

ここで注意しておくこととして, Almansi 型分割の考えは多重調和函数に対しても成り立つ. 従って, 本論文での我々のアプローチは, 多重調和方程式に対する境界値問題にも適用できる. この研究の発展の方向性としては, 次の 2 つが考えられる. 1 つ目は, 本論文の結果を一般の Jordan 領域に拡張することである. §4 の数値実験結果は, MFS や DSM に対する数学解析の結果と同様のことが, Almansi 型分割に基づいた MFS

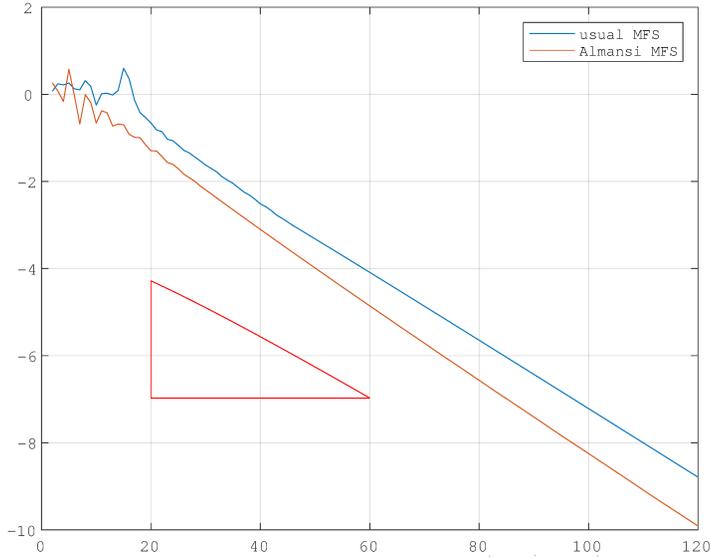


図2 境界データ f, g が (11)より与えられ、特異点を配置するためのパラメータ R を 2 にとった時の数値実験結果。青色の線は通常スキーム (2), 赤色の線は Almansi 型分割に基づいたスキーム (5) の結果である。そして、赤色の三角形の斜辺の傾きは、MFS ならびに DSM に対する先行研究の結果から期待される収束の速さを表す。

に対しても成り立つことを強く示唆している。2つ目は、Stokes 流れに対する流れ関数の数値計算への応用である。Stokes 流れに対する流れ関数は重調和方程式を満たすので、Almansi 型分割に基づいた MFS を、その数値計算に応用できる可能性が存在する。

謝辞

本講演の機会を与えてくださった、齊藤宣一先生ならびに柏原崇人先生に感謝申し上げる。また、本研究は、博士課程教育リーディングプログラムの助成を受けたものである。

参考文献

- [1] S. Bock and K. Gürlebeck, *On a spatial generalization of the Kolosov-Muskhelishvili formulae*, Math. Methods Appl. Sci. **32** (2009), no. 2, 223–240.
- [2] E. Goursat, *Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$* , Bull. Soc. Math. France **26** (1898), 236–237.
- [3] A. Karageorghis and G. Fairweather, *The Almansi method of fundamental solutions for solving biharmonic problems*, Int. J. Numer. Methods Eng. **26** (1988), no. 7, 1665–1682.
- [4] A. Karageorghis, *The method of fundamental solutions for elliptic problems in circular domains with mixed boundary conditions*, Numer. Algor. **68** (2015), 185–211.
- [5] A. Karageorghis and G. Fairweather, *The method of fundamental solutions for the numerical solution of the biharmonic equation*, J. Comput. Phys. **69** (1987), 434–459.

- [6] M. Katsurada, *A mathematical study of the charge simulation method II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **36** (1989), no. 1, 135–162.
- [7] M. Katsurada, *Asymptotic error analysis of the charge simulation method in a Jordan region with an analytic boundary*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1998), no. 8, 195–212.
- [8] M. Katsurada, *Charge simulation method using exterior maing functions*, Jpn. J. Indust. Appl. Math. **11** (1994), no. 1, 47–61.
- [9] M. Katsurada, *A mathematical study of the charge simulation method by use of peripheral conformal mappings*, Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ. **35** (1998), no. 3, 195–212.
- [10] M. Katsurada and H. Okamoto, *A mathematical study of the charge simulation method I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **35** (1988), no. 3, 507–518.
- [11] M. Katsurada and H. Okamoto, *The collocation oints of the fundamental solution method for the potential roblem*, Comput. Math. Appl. **31** (1996), no. 1, 123–137.
- [12] M. Krakowski and A. Charnes, *Stokes' paradox and biharmonic flows*, Report **37**, Carnegie Institute of Technology, Department of Mathematics, Pittsuburgh, PA (1953).
- [13] V. D. Kupradze, *Approximate solution of problems of mathematical physics*, Uspehi Mat. Nauk **22** (1967), no. 2, 59–107.
- [14] V. D. Kupradze and M. A. Aleksidze, *The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary-value problems*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **4** (1964), 683–715.
- [15] Z.-C. Li, M.-G. Lee, J. Y. Chiang and Y. P. Liu, *The Trefftz method using fundamental solutions for biharmonic equations*, J. Comput. Appl. Math. **235** (2011), no. 15, 4350–4367.
- [16] K. Murota, *On “invariance” of schemes in the fundamental solution method* (Japanese), Information Processing Society of Japan **34** (1993), no. 3, 533–535.
- [17] H. Ogata and M. Katsurada, *Convergence of the invariant scheme of the method of fundamental solutions for two-dimensional potential problems in a Jordan region*, Jpn. J. Ind. Appl. Math. **31** (2014), no. 1, 231–262.
- [18] K. Murota, *Comparison of conventional and “invariant” schemes of fundamental solutions method for annular domains*, Jpn. J. Indust. Appl. Math. **12** (1995), no. 1, 61–85.
- [19] K. Sakakibara, *Analysis of the dipole simulation method for two-dimensional Dirichlet problems in Jordan regions with analytic boundaries*, BIT Numer. Math. **56** (2016), no. 4, 1369–1400.
- [20] K. Sakakibara, *Asymptotic analysis of the conventional and invariant schemes for the method of fundamental solutions applied to potential problems in doubly-connected regions*, submitted revised version.
- [21] K. Sakakibara, *Method of fundamental solutions for biharmonic equation based on Almansi-type decomposition*, submitted.
- [22] Y.-S. Smyrlis, *Applicability and applications of the method of fundamental solutions*, Math. Comp. **78** (2009), no. 267, 1399–1434.
- [23] Y.-S. Smyrlis, *Density results with linear combinations of translates of fundamental solutions*, J. Approx. Theory **161** (2009), no. 2, 617–633.