

# 主値積分の形状微分を用いた定常渦斑の数値計算 Numerical computation for vortex patch equilibria with new shape derivative formula

宇田 智紀 (京都大学数学教室) \*

Tomoki Uda (Department of Mathematics, Kyoto University)

## 1 導入

2次元 Euler 方程式の解として、一定渦度領域をもつ渦斑が知られ、渦力学におけるもっとも基本的な解の一つとして活発に研究が行われている。渦斑領域は流れの速度場にしがたって時間発展しその形状を変えるが、定常渦斑の問題は時間発展で渦斑の形状が変化しないような解を求める自由形状問題である。これは、渦斑境界の運動を記述する等高線力学 [2] の定式化のもとで (相対的) 平衡状態を求めることに相当し、積分路を未知とする積分方程式に帰着できる。

複素平面  $\mathbb{C}$  全体を流れ領域とする Euler 流において、渦度の強さ  $\omega$  の渦斑  $D$  が誘導する複素速度場は

$$u - iv = \frac{\omega}{2\pi i} \iint_D \frac{dw_1 dw_2}{z - w} = \frac{-\omega}{4\pi} \text{p.v.} \oint_{\partial D} \log(z - w) d\bar{w} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、記号 p.v. は Cauchy の主値を意味する。一般に、渦斑が誘導する速度場は、このような特異積分によって記述される。

等高線力学の (相対的) 平衡状態の数学解析・数値解析を行う上で、(1) の積分路  $\partial D$  に関する形状微分が重要な役割を果たすと考えるのは自然であろう。しかしながら、従来よく知られている領域積分型あるいは境界積分型の形状微分公式は、被積分関数に十分な滑らかさを仮定するものであり、(1) には適用できない。そこで本研究では、(1) のようなパラメータ依存の特異性をもった積分に対して適用可能な形状微分公式を導出し、さらにこれを用いて定常渦斑問題に対する数値計算も行った。数値計算では、Pierrehumbert 渦斑対や Crowdy の解析的渦斑などを精度良く再現できることを確認した。また、従来法では計算するのが難しい二重周期の設定においても、定常渦斑を計算することに成功した。

## 2 形状微分公式

まず被積分関数が滑らかな場合の形状微分公式について述べる。複素平面  $\mathbb{C}$  において領域  $\Omega$  内の閉曲線  $C$  上の周回積分を考える。すなわち、 $C^1$  級写像  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  を被積分関数とし、積分  $\oint_C \varphi(z, \bar{z}) dz$  を考える。曲線  $C$  の媒介変数表示として  $S^1 := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  から  $\Omega \setminus \mathbb{H}$  の  $C^1$  級写像  $f$  をとり、媒介変数表示を明示するために  $C(f) := C$  と表記する。このとき、形状依存の写像  $\mathcal{F}$  を以下で定義する：

$$\mathcal{F}(f) := \oint_{C(f)} \varphi(z, \bar{z}) dz.$$

\* uda@math.kyoto-u.ac.jp

初等的な計算により、媒介変数表示  $f$  に関する  $\mathcal{F}$  の Gâteaux semiderivative (方向微分) が求まる:

$$d\mathcal{F}(f; \delta f) := \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \mathcal{F}(f + h\delta f) = 2i \oint_{C(f)} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) \operatorname{Re} [\delta z \overline{(-i dz)}]. \quad (2)$$

ここで  $\delta f$  は媒介変数表示の摂動方向を表す  $C^1$  級写像であり、また便宜的に  $z = f(s)$  における局所的な摂動方向を表す変数を  $\delta z := \delta f(s)$  とおいた。

いくつか例を挙げて幾何学的な観点から公式を説明する。まず、被積分関数  $\varphi$  が正則関数ならば、 $\varphi_{\bar{z}} = 0$  が成り立ち (2) は常に 0 である。すなわち、正則関数の複素積分は (ホモトピックである限り) その積分路に依存しない。また、摂動方向が曲線に接するならば、 $\operatorname{Re} [\delta z \overline{(-i dz)}] = 0$  が成り立ちやはり形状微分は 0 である。ゆえに、媒介変数表示をとりかえても (連続変形しても)、複素積分の値は変化しない。最後に、反時計周りに向きづけられた Jordan 曲線  $C$  が囲む領域の面積は  $\frac{1}{2i} \oint_C \bar{z} dz$  であるから、この形状微分は  $\operatorname{Re} \oint_C \delta z \overline{(-i dz)}$  となる。これは、法線方向  $-if'$  への摂動が面積の  $L^2$  勾配であることを意味する。

公式 (2) の考え方を応用して、渦力学にあらわれる積分 (1) のような特異性も考慮すると次の定理を得る (証明や詳細な主張は [5] に投稿中である)。

**定理 1 (特異な周回積分の形状微分)**  $z, w \in \Omega$ ,  $z \neq w$  に対して定義された  $C^1$  級複素数値関数  $\varphi(z, \bar{z}, w, \bar{w})$  を考える。  $\Omega$  内の任意の曲線の上で  $z$  が  $w$  に近づくときに  $\varphi|z-w|$ ,  $\varphi_w|z-w|$ ,  $\varphi_{\bar{w}}|z-w|$  が連続修正をもつと仮定する。  $C(f)$  が Jordan 曲線であるような媒介変数表示  $f$  に対し、形状依存の写像  $\mathcal{F}$  を次で定める:

$$\mathcal{F}(f): S^1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}(f)(s) := \left[ \text{p.v.} \oint_{C(f)} \varphi(z, \bar{z}, w, \bar{w}) dw \right]_{z=f(s)}$$

このとき、 $\mathcal{F}$  の  $\delta f$  方向への Gâteaux semiderivative は以下で与えられる:

$$d\mathcal{F}(f; \delta f) = \text{p.v.} \oint_C d\varphi(z, w; \delta z, \delta \bar{z}) dw + 2i \oint_C \varphi_{\bar{w}} \operatorname{Re} [(\delta w - \delta \bar{z}) \overline{(-i dw)}].$$

ただし、 $C$  上の点  $z, w$  における局所的な摂動方向を表す変数をそれぞれ  $\delta z := \delta f \circ f^{-1}(z)$  および  $\delta w := \delta f \circ f^{-1}(w)$  と表記した。また、 $d\varphi(z, w; \delta z, \delta \bar{z})$  は  $\varphi$  の  $(z, w)$  における  $(\delta z, \delta \bar{z})$  方向微分である。

$\log$  程度の特異性をもった被積分関数は定理の仮定を満たす。特に、被積分関数を  $\varphi = \overline{\log(z-w)}$  とおけば定理の仮定を満たしており、したがって渦斑  $D$  が誘導する速度場 (1) の渦斑境界  $\partial D$  に関する摂動の式が得られる:

$$d(u-iv)(f; \delta f) = -\frac{\omega}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{\operatorname{Re} [(\delta z - \delta w) \overline{(-i dw)}]}{z-w}. \quad (3)$$

被積分関数は連続修正をもつため、この積分は通常の台形則で精度良く数値計算できる。

### 3 数値計算

簡単のため全平面において渦斑が 1 つある場合の数値計算法について述べる (複数ある場合も解くべき方程式は本質的に同様である)。速度場  $u-iv$  には、渦斑が誘導する速度場 (1) のほかに、背景流などの形状  $D$  に依存しない流れの項も考える (解く問題の設定による)。渦斑境界  $\partial D$  上で速度場の法線方向成分が消えてい

れば、等高線力学は平衡状態にある（渦斑形状は時間変化しない）、すなわち、解くべき方程式は形状  $\partial D$  を未知とする以下の零点問題である：

$$\operatorname{Re}[(u - iv)\nu] = 0 \quad \text{on } \partial D. \quad (4)$$

ただし  $\nu$  は境界  $\partial D$  の法ベクトルを表し、ここでは  $\partial D = C(f)$  に対して  $\nu := -if'$  を用いる。複素平面  $\mathbb{C}$  を  $\mathbb{R}^2$  と同一視するときの標準的なユークリッド内積が  $(z, w)_{\mathbb{R}^2} = \operatorname{Re}(z\bar{w})$  と書けることに注意せよ。

$\partial D$  の媒介変数表示が一意的に定まるように、媒介変数表示として以下に述べる形のものに制限して考える。滑らかな Jordan 曲線  $C_0$  を一つ固定しその媒介変数表示を  $f_0$ 、その法ベクトルを  $\nu_0 := -if'_0$  とする。このとき、滑らかな  $2\pi$  周期実関数  $r$  に対して、 $Z(r) := f_0 + r\nu_0$  は新たな Jordan 曲線  $C(Z(r))$  を定める。

零点問題 (4) の近似解を Newton 法で求める。実周期関数を  $2N + 1$  次の Fourier 級数によって離散化し、 $\mathbb{R}^{2N+1}$  への離散 Fourier 変換を  $(\cdot)^\wedge$  で表記する。Fourier 係数の対応  $F: \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1}$  を

$$F(\hat{r}) := \operatorname{Re}[(u - iv)\nu]^\wedge_{f=Z(r)}$$

で定める。Jacobian 行列  $DF$  は形状微分の式 (3) と連鎖律によって計算できる。積分は台形則で近似する。 $DF$  は正則とは限らないため、係数  $\hat{r}$  の Newton 反復には特異値分解による擬逆行列  $DF^\dagger$  を用いる：

$$\hat{r}_{n+1} := \hat{r}_n - DF^\dagger F(\hat{r}_n).$$

この手法を用いて得られた数値結果をいくつか紹介する。まず、よく知られる定常渦斑である Pierrehumbert 渦斑対および Crowdy 解析的渦斑に対する再現結果を示す。その後、格子状配置の定常渦斑に関する新しい数値結果について簡単に述べる。

### 3.1 Pierrehumbert 渦斑対

Deem&Zabusky は等高線力学定式化に基づく時間発展シミュレーションによっていくつかの定常渦斑の存在を示唆した [2]。そのうちの 하나가、軸対称に配置された渦度の強さ  $\pm\omega$  の渦斑の対から成り、形を変えずに軸方向に並行移動する相対的平衡状態に至るものである。Pierrehumbert は平衡状態を計算する反復スキームを導出してそのような解をいくつも見つけ、これらが連続な 1-パラメータ族を成すことを発見した [3]。方程式 (4) を移動フレーム内において考える（つまり、速度場から一定の並行移動速度分を差し引く、あるいは同じことだが、並進方向とは逆向きの一様背景流を課す）。提案手法で Pierrehumbert 渦斑対を計算した結果を図 1 (左) に示す。

### 3.2 Crowdy 解析的渦斑

Crowdy は、 $N$  個の点渦に囲まれて剛性回転する渦斑の形状を、等角写像の手法を用いて厳密に書き下した [1]。方程式 (4) を回転フレーム内において考え（つまり速度場から一定の回転速度を差し引いた方程式を考え）、提案手法で Crowdy 解析的渦斑を計算した結果を図 1 (右) に示す。得られた数値解と厳密解で、形の特徴量であるモーメントを比較したところ、 $N$  の倍数次モーメントの誤差は  $O(10^{-8})$ 、その他のモーメントの誤差は  $O(10^{-16})$  と良好な結果を得た。

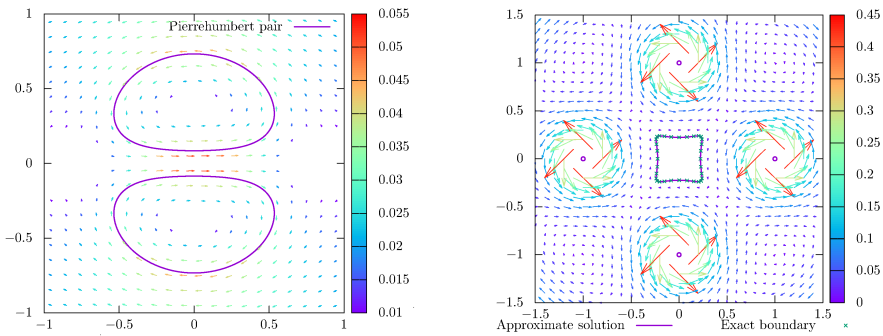


図1 (左) Pierrehumbert 渦斑対と移動フレーム内におけるその速度場。実線は渦斑対の境界を示している。境界における速度が境界に接していることから、並行移動しつつ渦斑形状が変わらないことがわかる。(右) Crowdy 解析的渦斑と回転フレーム内におけるその速度場。厳密解の渦斑境界を示すマーカーと数値解の渦斑境界を示す実線が重なっていることがわかる。またその内側で速度が消えており、渦斑が剛性回転することがわかる。

### 3.3 格子状配置の定常渦斑

Tkachenko は、格子状に配置された点渦が誘導する流れを Weierstrass の  $\zeta$  関数を用いて記述した [4]。その拡張として格子状配置の渦斑系を考えると、積分核を  $\zeta$  関数で置き換えた式が得られるが、この場合にも定理 1 は適用可能であり、したがって同様の数値スキームを実現できる。詳細は [5] に投稿中である。

## 4 結論

積分核が  $\log$  型特異性をもつ特異周回積分に適用可能な形状微分公式を導出した。形状微分公式を用いることで定常渦斑問題の数値計算法を確立した。これによって Pierrehumbert 渦斑対や Crowdy の解析的渦斑といった定常渦斑を数値的に再現した。また二重周期的な設定では積分核に Weierstrass の  $\zeta$  関数が現れるが、この場合にも形状微分公式は適用可能であり、同様に数値計算が実現できる。

謝辞：本研究は JSPS 科研費 16J08319 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] D. G. Crowdy. Exact solutions for rotating vortex arrays with finite-area cores. *Journal of Fluid Mechanics*, 469:209–235, 2002.
- [2] Gary S. Deem and Norman J. Zabusky. Contour dynamics for the euler equations in two dimensions. *Physical Review Letters*, 40(13):859–861, January 1978.
- [3] R. T. Pierrehumbert. A family of steady, translating vortex pairs with distributed vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, 99(1):129–144, July 1980.
- [4] V. K. Tkachenko. On vortex lattices. *Sov. Phys. JEPT*, 22(6):1282–1286, December 1966.
- [5] Tomoki Uda. Shape calculus for vortex patch equilibria and its application to lattice configurations. Submitted.