数理解析研究所講究録
第2039巻 2017年 50-58


# $p$-飽和マヤゲームと対称群の既約表現

千葉大学大学院 理学研究科　入江 佑樹
Yuki Irie
Graduate School of Science,
Chiba University

マヤゲームと対称群の既約表現の関係を与える. 本稿の詳細は [6] にある.

## 1　佐藤の予想：ゲームと表現の関係

佐藤 [12] は対称群の既約表現とマヤゲームとは何らかの関係があると予想した. その根拠から話をはじめる. $\lambda$ を $n$ の分割とする. $\rho^{\lambda}$ で 対称群 $\mathrm{Sym}(n)$ の $\lambda$ に対応する既約表現を表す. フック公式 [4] より, $\rho^{\lambda}$ の次数は次で求められる：

$$\deg(\rho^{\lambda})=\frac{n!}{\prod_{h\in H(\lambda)} h}. \tag{1.1}$$

ただし, $H(\lambda)$ は $\lambda$ のフック長全体の多重集合を表す. さて, 分割 $\lambda$ はマヤゲームの局面と思うことができる. また, 一般にゲームの局面はエネルギーと呼ばれるものによって解析できる (次節で述べる). 佐藤 [9, 10, 11] は $\lambda$ のエネルギーは次のように表せることを示した：

$$\mathrm{eg}(\lambda)=\bigoplus_{h\in H(\lambda)}{}_2\, N_2(h). \tag{1.2}$$

ただし, $\oplus_2$ は2進展開での繰り上がりのない足し算を表し, $N_2(h)=h\oplus_2(h-1)$ である. 例えば, $5\oplus_2 7=(1+4)\oplus_2(1+2+4)=2$ である. 式 (1.1) と (1.2) は見かけがよく似ている. これが佐藤予想の根拠の 1 つである. これ以外にも佐藤 [12] はゲームと表現の様々な類似を指摘した.

本稿では, $p$-飽和マヤゲームというゲームを与える. ここで $p$ は素数であり, 2-飽和マヤゲームは普通のマヤゲームになる. $p$-飽和マヤゲームの局面は, マヤゲームの局面と同じであり, 分割と思うことができる. 主結果は次である.

**定理 1.1.** $\lambda$ を $p$-飽和マヤゲームの局面とする. すなわち, $n$ の分割とする.

(1) $\lambda$ のエネルギーは次である:

$$\mathrm{eg}(\lambda) = \bigoplus_{h \in H(\lambda)} {}_p\, N_p(h). \tag{1.3}$$

ただし, $\oplus_p$ は $p$ 進展開での繰り上がりのない足し算, $N_p(h) = h \ominus_p (h-1)$, $\ominus_p$ は $p$ 進展開での繰り下がりのない引き算を表す.

(2) $\mathrm{eg}(\lambda) = n$ となる必要十分条件は $\rho^\lambda$ の次数が $p$ と素であることである.

(3) $\rho^\lambda$ の $\mathrm{Sym}(\mathrm{eg}(\lambda))$ への制限は次数が $p$ と素な既約成分を持つ. ただし, $\mathrm{Sym}(0) = \mathrm{Sym}(1)$ とする.

定理 1.1 の証明について述べる *1. (2) と (3) の主張の $\mathrm{eg}(\lambda)$ を (1.3) の右辺で置き換えた主張を (2') と (3') としよう. (1) の証明の鍵は, (3') を (2') を使ってゲームの言葉に翻訳した結果である *2. (3') を証明することさえできれば, (1) を示すことができ, ここから (2) と (3) が従う. なお, 一般に $\mathrm{eg}(\lambda) \leqslant n$ のため, (2) の条件はこの上限を達成していることを表す.

**例 1.2.** 定理 1.1 の具体例をみる. $p = 2, \lambda = (4,3,2)$ とする. このとき $|\lambda| = 4+3+2 = 9$ であり, (1) から $\mathrm{eg}(\lambda) = 7$ がわかる. よって (2) から, $\rho^\lambda$ の次数は偶数である. 実際, その値は 168 である. 以下, (3) が成立していることをみる. まず, $\rho^\lambda$ の $\mathrm{Sym}(8)$ への制限は, 3 つの既約成分 $\rho^{(3,3,2)}, \rho^{(4,2,2)}, \rho^{(4,3,1)}$ を持つ. 得られた 3 つの既約成分の次数は, それぞれ 42, 56, 70 であり, 全て偶数である. ここで, $\rho^{(3,3,2)}$ の $\mathrm{Sym}(7)$ への制限は 2 つの既約成分 $\rho^{(3,2,2)}$ と $\rho^{(3,3,1)}$ を持つ. この 2 つの既約成分の次数はどちらも 21 であり, 奇数, 言い換えると 2 と素である. これが (3) の主張である. また, (2) から局面 $(3,2,2)$ と $(3,3,1)$ のエネルギーが 7 であることもわかる.

本稿の残りでは, ゲーム理論を紹介した後, $p$-飽和について述べる.

---

*1 公式 (1.3) は佐藤の公式 (1.2) の一般化になっている. 佐藤の公式は偶奇性を用いて証明されており, 今回の証明方法とは大きく異なる.

*2 (2') の証明には Macdonald による次数が $p$ と素な既約表現 $\rho^\lambda$ の特徴付け [8] を用いる.

# 2 ゲーム理論

ゲームを有向グラフとして定義し, ニムとマヤゲームを紹介する. そして, どのようにゲームとして遊ぶかを述べた後, 必勝戦略を与えるために, エネルギーを定義する. 最後にニムとマヤゲームのエネルギー公式をみる.

## 2.1 定義と例

$\Gamma$ を有向グラフ $(V,A)$ とする. すなわち, $V$ は集合で, $A$ は $V\times V$ の部分集合である. $V$ を $\Gamma$ の **頂点集合**, $A$ を $\Gamma$ の **辺集合** と呼ぶ. $X^0,\ldots,X^n$ を $\Gamma$ の頂点, すなわち, $X^0,\ldots,X^n\in V$ とする. 列 $(X^0,\ldots,X^n)$ が $X^0$ から $X^n$ への長さ $n$ の **パス** とは $i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ に対して $(X^i,X^{i+1})$ が $\Gamma$ の辺, すなわち, $(X^i,X^{i+1})\in A$ であることを表す. また $X^0$ をこのパスの **始点** と呼ぶ. $\Gamma$ の頂点 $X$ に対して, $\mathrm{lg}(X)$ で $X$ を始点に持つパスの最大の長さを表す.

本稿では, 有向グラフ $\Gamma$ が **ゲーム** とは, 全ての $X\in V$ に対して $\mathrm{lg}(X)$ が有限であることと定義する *3. $\Gamma$ をゲームとする. $\Gamma$ の頂点集合 $V$ を $\Gamma$ の **局面集合**, $\Gamma$ の頂点を **局面** と呼ぶ. $X$ と $Y$ が $\Gamma$ の局面で $(X,Y)$ が $\Gamma$ の辺のとき, $Y$ を $X$ の **オプション** と呼ぶ. $X$ がオプションを持たないとき, $X$ を **終局面** と呼ぶ.

**例 2.1.** 図 1 の 2 つのグラフを考えよう. 左のグラフの頂点は lg がそれぞれ 2, 1, 0 のため, ゲームである. 一方, 右のグラフの頂点は lg がどちらも $\infty$ のため, ゲームではない.

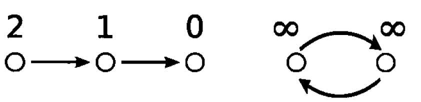


図 1　左はゲームだが, 右はゲームでない.

**例 2.2** (ニム). $m$ を非負整数, $V$ を $\mathbb{N}^m$ とする ( $\mathbb{N}^0=\varnothing$ とする). $\mathbb{N}$ は非負整数全体である. $X\in V$ に対して, $X_i$ で $X$ の $i$ 番目の成分を表す. すなわち, $X=(X_1,\ldots,X_m)$ である. この記法は本稿を通して用いる.

$$A=\left\{(X,Y)\in V^2 : X_i\geqslant Y_i\ (i=1,\ldots,m)\ \text{and}\ \mathrm{dist}(X,Y)=1\right\}$$

*3 ゲーム理論では, このようなゲームは有限な不偏ゲームと呼ばれている.

としよう. ただし, $\mathrm{dist}(X,Y)$ は $X$ と $Y$ の Hamming 距離を表す. すなわち

$$\mathrm{dist}(X,Y) = |\{ i \in \{1,2,\ldots,m\} : X_i \neq Y_i \}|.$$

$\mathscr{N}^m = (V,A)$ とする. $\mathscr{N}^m$ はゲームであり, ニム と呼ばれる. このゲームは Bouton [2] によって解析された.

**例 2.3** (マヤゲーム)**.** $V'$ を $\mathbb{N}^m$ の元で成分が全て異なるもの全体とする:

$$V' = \{ X \in \mathbb{N}^m : X_i \neq X_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant m) \}.$$

$\mathscr{M}^m$ を $\mathscr{N}^m$ の $V'$ への誘導部分グラフとする. すなわち, 局面集合が $V'$ であり, 辺集合が $\{ (X,Y) \in A : X,Y \in V' \}$ である. ただし, $A$ は $\mathscr{N}^m$ の辺集合を表す. このゲーム $\mathscr{M}^m$ は **マヤゲーム** または **佐藤-Welter ゲーム** と呼ばれる.

マヤゲームの局面 $X$ は, 次のように分割と思える. $\sigma$ を $X_{\sigma(1)} > X_{\sigma(2)} > \cdots > X_{\sigma(m)}$ を満たす置換とする. このとき分割 $\lambda(X)$ を $(X_{\sigma(1)} - m + 1, X_{\sigma(2)} - m + 2, \ldots, X_{\sigma(m)})$ で定義する. 例えば, $X = (5,3,2)$ のとき $\lambda(X) = (3,2,2)$ である. なお, $Y$ が $X$ のオプションである必要十分条件は, $\lambda(Y)$ が $\lambda(X)$ から 1 つのフックを抜いて得られることである. そのため, マヤゲームはフックを抜くゲームとも思える. この文脈で, 川中 [7] はマヤゲームを含む平明アルゴリズムというゲームのクラスを構成し, エネルギー公式や必勝手順を求める効率的な方法といった, 多様な結果を得ている.

## 2.2 ゲームの遊び方

ゲーム $\Gamma$ の遊び方を紹介する. このゲームは 2 人対戦のゲームである. 対戦する 2 人を Player 1 と Player 2 と呼ぼう. ゲームの前に局面を 1 つ選び, この局面からゲームを始める. 2 人は, Player 1・Player 2 の順番で, 現在の局面からその局面のオプションへ交互に移動する. 交互に移動していき, 終局面に到達した方が勝ちである.

**例 2.4.** それではニムで遊んでみよう. 局面 $(2,2)$ から始める. 図 2 を参照してほしい. 最初は Player 1 の番であり, 彼には 4 つのオプション $(2,1),(2,0),(1,2),(0,2)$ がある. $(1,2)$ に移動したとしよう. 次は Player 2 の番であり, 3 つのオプション $(1,1),(1,0),(0,2)$ がある. $(1,1)$ を選んだとしよう. この手は必勝の手になっている. 実際, 次は Player 1 の番であるが, $(1,0)$ か $(0,1)$ に移動するしかない. 仕方なく $(0,1)$ に移動したとしよう. すると, Player 2 は $(0,0)$ に移動することができるため, Player 2 の勝ちである.

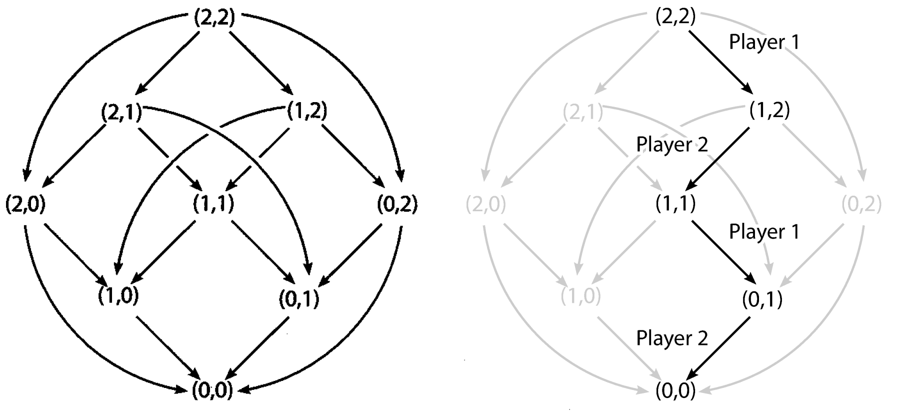


図 2　Player 2 の勝ち

さて, どうして Player 2 は勝つことができたのだろうか？実は, 彼には必勝の戦略があったのだ.

## 2.3　エネルギー (Sprague-Grundy 数)

必勝戦略を与えるために, エネルギーを定義しよう (エネルギーは Sprague-Grundy 数とも呼ばれる). $\mathbb{N}$ の真の部分集合 $S$ に対して, $\mathrm{mex}\,S$ で $S$ に入らない最小の非負整数を表す. 例えば, $\mathrm{mex}\,\varnothing = 0, \mathrm{mex}\{0,1,3\} = 2$ である. $X$ をゲーム $\Gamma$ の局面とする. $X$ のエネルギーを次で再帰的に定義する：

$$\mathrm{eg}(X) = \mathrm{mex}\{\mathrm{eg}(Y) : Y \text{ は } X \text{ のオプション}\}. \tag{2.1}$$

$X$ が終局面のとき, $\mathrm{eg}(X) = \mathrm{mex}\,\varnothing = 0$ である. エネルギーは終局面から lg が小さい順に (2.1) によって定義される. 定義から $\mathrm{eg}(X) \leqslant \mathrm{lg}(X)$ が示せる. 特にマヤゲームの場合, $\mathrm{eg}(X) \leqslant \mathrm{lg}(X) = |\lambda(X)|$ であり, 等号が成立するときが定理 1.1 の (2) の場合である.

## 2.4　必勝戦略

それでは必勝戦略を与える. $X$ をゲーム $\Gamma$ の局面とする. Grundy [5] と Sprague [13] は, $X$ が後手必勝局面 (下で詳細を述べる) である必要十分条件は $X$ のエネルギーが 0 であることを独立に示した. さらに, 彼らは $X$ が ニムの局面 $(\mathrm{eg}(X))$ と「同値」であることを示した. 詳細は例えば [1, 3] を参照して欲しい.

エネルギー 0 の局面が後手必勝局面であることをみよう．すなわち，エネルギー 0 の局面 $X$ から始めると，Player 2 が必ず勝てることを示す．エネルギーの定義から $X$ のオプションは全てエネルギーが 1 以上である．よって Player 1 は，エネルギーが 1 以上のオプションにしか移動できない．また，次の番の Player 2 は必ずエネルギーが 0 のオプションに移動できる．ここで，終局面はエネルギー 0 であることと，ゲームの定義から有限回の移動で終局面に到達することから，エネルギー 0 のオプションに移動していけば，Player 2 は必ず勝てる．

## 2.5 エネルギー公式

エネルギーの定義は再帰的なため，一般のゲームでは全ての局面のエネルギーを求めることは困難である．しかし，一部の良いゲームはエネルギー公式があり，簡単にエネルギーを計算できる．ニムとマヤゲームはその代表例である．両者の公式を表 1 にまとめる．ニムの公式は Sprague [5] と Grundy [13] が独立に与えた．マヤのエネルギーは前述の (1.2) で表せる．ここではニムとの比較のため，別の形を紹介する．マヤの表 1 の形のエネルギー公式は Welter [14] と佐藤 [9, 10, 11] が独立に与えた．

表 1　エネルギー公式

| | $\mathrm{eg}(X)$ |
|---|---|
| ニム | $X_1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X_m$ |
| マヤ | $X_1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X_m \oplus_2 \bigoplus_{1 \leqslant i<j \leqslant m} {}_2\, N_2(X_i - X_j)$ |

ニムやマヤのようにエネルギー公式を持つゲームは，ゲームの中で最も良いクラスということができ，また希少である．このようなエネルギー公式を持つゲームはどうしたら構成できるだろうか？以下では，その 1 つの方法として $p$-飽和を与える．

# 3 $p$-飽和

$p$-飽和を定義する前に記号を用意する．整数 $x$ に対して，$\mathrm{ord}_p(x)$ で $x$ の $p$-adic order を表す．すなわち

$$\mathrm{ord}_p(x) = \begin{cases} \max\left\{L \in \mathbb{N} : x \text{ is divisible by } p^L\right\} & \text{if } x \neq 0, \\ \infty & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

次にゲーム $\mathcal{N}_k^m$ を定義する. まず, $\mathcal{N}_2^m$ で普通のニム $\mathcal{N}^m$ を表す. $\mathcal{N}_3^m$ を $X$ と $Y$ の距離が $1,2$ のいずれか, かつ

$$X-Y \in \left\{ D \in \mathbb{N}^m : \mathrm{ord}_p\left(\sum_{i=1}^m D_i\right) = \min\{\mathrm{ord}_p(D_i) : 1 \leqslant i \leqslant m\} \right\} \qquad (*p)$$

のときに $X$ から $Y$ に結んだゲームとしよう. 一般に $\mathcal{N}_k^m$ を $X$ と $Y$ の距離が $1,2,\ldots,k-1$ のいずれか, かつ $(*p)$ のときに結んだゲームとする. $\mathcal{N}_k^m (k \geqslant m+1)$ は全て $\mathcal{N}_{m+1}^m$ と一致するため, $\mathcal{N}_2^m, \mathcal{N}_3^m, \ldots \mathcal{N}_{m+1}^m$ を得る. ここで $(*p)$ は $\mathcal{N}_2^m$ では自明に成立するため, $k$ が大きくなるほど, どんどん辺の数が増えることに注意しよう.

**例 3.1.** $p=2$ として, ニムの対戦例で見た図 2 の場合を再び考えよう. 距離が 2 の辺は次の 3 通りある.

(1) $X-Y=(1,1)$
(2) $X-Y=(1,2),(2,1)$
(3) $X-Y=(2,2)$

この内, (2) のみ $(*2)$ を満たす. そのため, $\mathcal{N}_3^2$ では図 3 のように辺が 4 本増える.

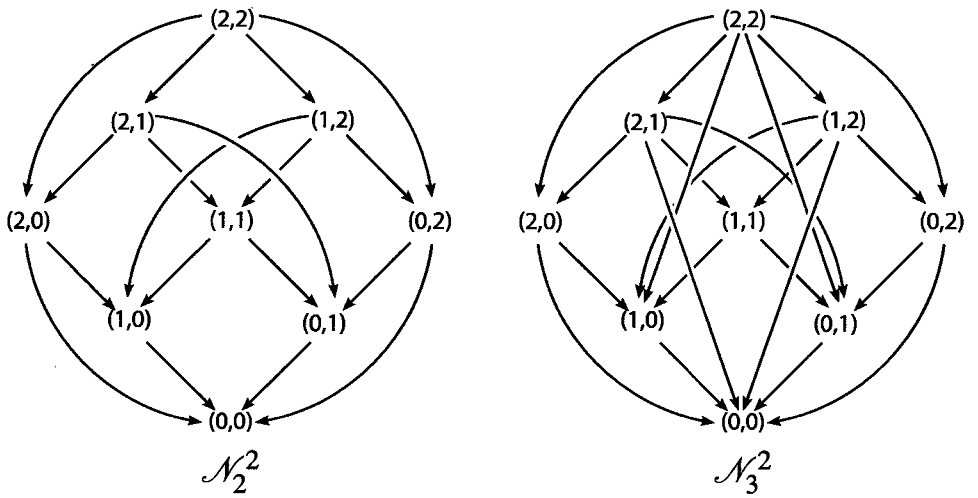


図 3　$p=2$ の場合の $\mathcal{N}_2^2$ と $\mathcal{N}_3^2$

それでは $p$-飽和を定義する. 大雑把にいうと, $p$-飽和とは辺をどんどん増やしてもエネルギーが変わらない状態を指す. ニム $\mathcal{N}^m$ の $p$-飽和を定義した後, 一般の場合を定義

する. $\mathrm{eg}_k(X)$ で $\mathcal{N}_k^m$ での $X$ のエネルギーを表そう. すると $p=2$ のときはエネルギーが全ての局面で一致する. すなわち, 任意の $X \in \mathbb{N}^m$ に対して

$$\mathrm{eg}_2(X) = \mathrm{eg}_3(X) = \cdots = \mathrm{eg}_{m+1}(X)$$

である. 一方 $p=3$ のときは, $\mathcal{N}_2^m$ と $\mathcal{N}_3^m$ ではエネルギーが異なることがある. しかし, $\mathcal{N}_3^m$ 以降ではエネルギーが全ての局面で一致する. すなわち, 任意の $X \in \mathbb{N}^m$ に対して

$$\mathrm{eg}_3(X) = \cdots = \mathrm{eg}_{m+1}(X)$$

である. そこで $\mathcal{N}_k^m (k \geqslant 3)$ を $\mathcal{N}^m$ の **3-飽和** と呼ぶ. 一般の $p$ に対して, $\mathcal{N}_k^m$ 以降ではエネルギーが全ての局面で一致するとき, それらを $\mathcal{N}^m$ の ***p*-飽和** と呼ぶ [*4]. 定義から $\mathcal{N}_{m+1}^m$ は $\mathcal{N}^m$ の $p$-飽和である.

例えば, $p=2$ のときはニム $\mathcal{N}^m$ 自身を含めた $\mathcal{N}_k^m (k \geqslant 2)$ が $\mathcal{N}^m$ の 2-飽和になっている. また, 上で述べたように $p=3$ のときは $\mathcal{N}_k^m (k \geqslant 3)$ が 3-飽和である. 一般の $p$ に対して, $\mathcal{N}_k^m (k \geqslant p)$ が $p$-飽和になる.

$p$-飽和の定義は自然にニムの誘導部分グラフに拡張できる. 特に, $p$-飽和マヤゲームを考えることができる. 例えば, $p=2$ のときはニムと同様に, マヤゲーム $\mathcal{M}^m$ 自身が $\mathcal{M}^m$ の 2-飽和になる.

ニムとマヤゲームの $p$-飽和はエネルギー公式を持つ. 最後にそれらのエネルギー公式を表 2 にまとめる.

表 2　Energy formulas

| | $\mathrm{eg}(X)$ |
|---|---|
| $p$-飽和ニム | $X_1 \oplus_p \cdots \oplus_p X_m$ |
| $p$-飽和マヤ | $X_1 \oplus_p \cdots \oplus_p X_m \ominus_p \bigoplus_{p\,1 \leqslant i < j \leqslant m} N_p(X_i - X_j)$ |

# 参考文献

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.

---

[*4] $p$ が合成数の場合も $p$-飽和を定義でき, エネルギー公式も同様に成立する. しかし, この場合は定理 1.1 の (2) と (3) は成立しない.

[2] C. L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39, 1901.

[3] J. H. Conway. *On Numbers and Games*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.

[4] J. S. Frame, G. d. B. Robinson, and R. M. Thrall. The hook graphs of the symmetric group. *Canadian Journal of Mathematics*, 6(0):316–324, Jan. 1954.

[5] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.

[6] Y. Irie. p-saturations of Welter's Game and the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *arXiv:1604.07214*, 2016.

[7] 川中宣明. フック構造をもつゲームとアルゴリズム. 数学, 63(4):421–441, 2011.

[8] I. G. Macdonald. On the Degrees of the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 3(2):189–192, Jan. 1971.

[9] 佐藤幹夫 (上野健爾 記). あるゲームについて. 第 12 回代数分科会シンポジューム報告集, pp. 123–136, 1968.

[10] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). Maya game について. 数学のあゆみ, 15(1):73–84, 1970.

[11] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). マヤ・ゲームの数学的理論. 数理解析研究所講究録, 第 98 巻, pp. 105–135, 1970.

[12] 佐藤幹夫 (梅田亨 記). 佐藤幹夫講義録 (1984 年度・1985 年度 1 学期). 数理解析レクチャー・ノート刊行会, 1989.

[13] R. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41:438–444, 1935.

[14] C. P. Welter. The Theory of a Class of Games on a Sequence of Squares, in Terms of the Advancing Operation in a Special Group. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 57:194–200, 1954.