数理解析研究所講究録
第2039巻 2017年 90-105

Symplectic Q-Functions

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1 はじめに

Schur の Q 関数は，Schur 関数が対称群の線型表現の理論において果たす役割と同様な役割を，対称群の射影表現の理論において果たすものとして，Schur [16] によって導入された対称関数である．その後，Hall と Littlewood [7] によって，Schur 関数と Schur の Q 関数の共通の一般化として，現在では Hall–Littlewood 関数と呼ばれる対称関数（パラメータ t を含む）が定義された．Hall–Littlewood 関数は，n 個の変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ と長さ n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ に対して，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}; t) = \frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) \tag{1}$$

で与えられる．ここで，$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群であり，$m_j = \#\{i : 1 \le i \le n,\ \lambda_i = j\}$ とおくとき，

$$v_\lambda^{(n)}(t) = \prod_{j \ge 0} \prod_{k=1}^{m_j} \frac{1 - t^k}{1 - t}$$

である．このとき，$P_\lambda(\boldsymbol{x}; t) \in \mathbb{Z}[t][x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ であり，Schur 関数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$，Schur の P 関数 $P_\lambda(\boldsymbol{x})$，Schur の Q 関数 $Q_\lambda(\boldsymbol{x})$ は，パラメータ t を $t = 0, t = -1$ と特殊化することによって，

$$s_\lambda(\boldsymbol{x}) = P_\lambda(\boldsymbol{x}; 0), \quad P_\lambda(\boldsymbol{x}) = P_\lambda(\boldsymbol{x}; -1), \quad Q_\lambda(\boldsymbol{x}) = 2^{l(\lambda)} P_\lambda(\boldsymbol{x}; -1)$$

として得られる．Hall–Littlewood 関数の詳細については，[10, Chapter III] を参照されたい．(Schur の Q 関数は [10, Chapter III § 8] で扱われている．)

Schur の Q 関数は，Schur 関数と平行した形で，次のようなさまざまな場面に現れることが知られている：

Schur 関数	Schur の Q 関数
対称群の線型表現	対称群の射影表現 [16]
Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n)$ の既約指標	Lie 超代数 $\mathfrak{q}(n)$ の既約指標 [17]
Grassmann 多様体のコホモロジー	Lagrangian Grassmann 多様体のコホモロジー [15]
KP 階層の τ 関数	BKP 階層の τ 関数 [18]

Hall と Littlewood の与えた Hall–Littlewood 関数 $P_\lambda(\boldsymbol{x}; t)$ を A 型ルート系に対応するものとして，Macdonald [11] は一般のルート系に付随した Hall–Littlewood 関数を次

のように定義した.(この一般化された Hall–Littlewood 関数は，p 進代数群上の帯球関数として現れる．[8] を見よ.)

定義 1.1. ([11, §10]) Δ をルート系（簡単のため被約であると仮定する）とし，Δ^+ を正ルート系，P をウェイト格子，W を Weyl 群とする．このとき，支配的ウェイト $\lambda \in P$ に対して，

$$P_\lambda = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left(e^\lambda \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - te^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right) \tag{2}$$

と定義し，**ルート系 Δ に付随した Hall–Littlewood 関数**と呼ぶ．ここで，e^ν は $\nu \in P$ に対応する P の群環の元（形式的指数関数）であり，

$$W_\lambda = \{w \in W : w\lambda = \lambda\}, \quad W_\lambda(t) = \sum_{w \in W_\lambda} t^{l(w)}$$

（ただし $l(w)$ は Coxeter 群 W の元としての w の長さを表す）である．

このとき，$P_\lambda \in \mathbb{Z}[t][P]^W$（つまり，$P$ の $\mathbb{Z}[t]$ 上の群環における W 不変元）であり，P_λ において $t = 0$ を代入したものがルート系 Δ に対応する半単純 Lie 代数の既約指標（λ を最高ウェイトとする既約表現の指標）を与えることが知られている．上に述べた Schur 関数と Schur の Q 関数の関係を考慮すると，次の問題は自然である．

問題 1.2. ルート系 Δ に付随した Hall–Littlewood 関数 P_λ において $t = -1$ を代入したもの（**Δ に付随した P 関数**と呼ぶ）に対して，組合せ論，表現論などを展開せよ．

本稿では，C 型ルート系に付随した P 関数とそのスカラー倍である Q 関数（斜交 P 関数，斜交 Q 関数と呼ぶ）の組合せ論的な側面を解説する．

本稿の構成は以下の通りである．§2 では，Schur の P 関数，Q 関数や古典型ルート系に付随した P 関数，Q 関数を含むような枠組みとして，多項式列に付随して定まる一般化された P 関数を導入し，パフィアンを用いたいくつかの公式を与える．次に，§3 では，斜交 P 関数や斜交 Q 関数が §2 で導入した一般化された P 関数の特別な場合として得られることを示すとともに，斜交 Q 関数の半標準盤を用いた組合せ論的表示に関する King–Hamel の予想の証明を説明する．最後に，§4 では，斜交 P 関数の積の構造定数の正値性などの予想を提示する．

2　一般化された P 関数

Schur の P 関数，Q 関数，Ivanov の factorial P 関数，Q 関数や古典型ルート系に付随した P 関数，Q 関数に対して成り立つパフィアンの公式を統一的に扱う枠組みとして，一般化された P 関数を導入する．

2.1　一般化された P 関数と Nimmo 型公式

分割とは，非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ で $\sum_{i \geq 1} \lambda_i < \infty$ となるもののことである．分割 λ に対して，$|\lambda| = \sum_{i \geq 1} \lambda_i$ を λ の大きさ，$l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i > 0\}$ を λ

の長さと呼ぶ．また，分割 λ は $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{l(\lambda)} > 0$ をみたすとき，**ストリクト**であるという．

定義 2.1. 1 変数多項式の列 $\mathcal{G} = \{g_d(u)\}_{d=0}^{\infty}$ で

$$g_0(u) = 1, \quad \deg g_d(u) = d \quad (d \geq 1)$$

をみたすものと，長さ n 以下の分割 λ が与えられたとき，

$$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x};t) = \frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\prod_{i=1}^{n} g_{\lambda_i}(x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) \tag{3}$$

とおき，$\mathcal{G}$ に付随した **Hall–Littlewood 関数**と呼ぶ．また，ストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x};-1) \tag{4}$$

とおき，$\mathcal{G}$ に付随した P **関数**と呼ぶ．

この一般化は，次のように Schur の P 関数，Q 関数，Ivanov の factorial P 関数，Q 関数（[2, 3] を見よ）を含んでいる．

例 2.2. (1) 多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(u) = u^d$ $(d \geq 1)$ で与えられるとき，$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x})$ は Schur の P 関数である．

(2) 多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(u) = 2u^d$ $(d \geq 1)$ で与えられるとき，$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x})$ は Schur の Q 関数である．

(3) 多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(u) = (u|\boldsymbol{a})^d = \prod_{i=0}^{d-1}(u + a_i)$ $(d \geq 1)$ で与えられるとき，$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x})$ は Ivanov の factorial P 関数である．

(4) 多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(u) = 2(u|\boldsymbol{a})^d = 2\prod_{i=0}^{d-1}(u+a_i)$ $(d \geq 1)$ で与えられるとき，$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x})$ は Ivanov の factorial Q 関数である．

また，次の節（命題 3.2）で見るように，C 型ルート系に付随した P 関数，Q 関数も含まれている．

まず，Schur の P 関数をパフィアンの比として表す Nimmo の公式 [13, A12]（Schur 関数の行列式の比による定義に相当する）は，一般化された P 関数に対しても成り立つ．n 個の変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ に対して，

$$A(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \right)_{1 \leq i,j \leq n}, \quad D(\boldsymbol{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}$$

とおく．n が偶数であるとき，

$$\mathrm{Pf} \left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \tag{5}$$

であることに注意する．

定理 2.3. (Nimmo 型公式) 非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して,

$$V_\alpha^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = \left(g_{\alpha_j}(x_i)\right)_{1\le i\le n,\, 1\le j\le l}$$

とおく. このとき, 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})}\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & V_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tV_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n+l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})}\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & V_{\lambda^0}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tV_{\lambda^0}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n+l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases}$$

ここで, $\lambda^0 = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)}, 0)$ である.

証明. 証明は, Schur の P 関数の場合の Nimmo [13] による証明と同様である. $l = l(\lambda)$, $\mathfrak{S}_{n,\lambda} = \{w \in \mathfrak{S}_n : w\lambda = \lambda\}$ とおくと, $\mathfrak{S}_{n,\lambda} \cong \mathfrak{S}_{n-l}$ であり, [9, Theorem 2.8] を用いることにより,

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}; -1) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-l}} w\left(\prod_{i=1}^{l} g_{\lambda_i}(x_i) \prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i\le l}} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}\right) \tag{6}$$

となることがわかる. あとは, Schur の P 関数の場合と同様である. ([14, 定理 2.2 の証明] も参照されたい.) □

2.2 Schur 型公式

Nimmo 型公式が示されると, パフィアン版 Sylvester の公式 [6, (2.5)]

$$\operatorname{Pf}\left(\frac{\operatorname{Pf} X([n]\cup\{n+i, n+j\})}{\operatorname{Pf} X([n])}\right)_{1\le i<j\le l} = \frac{\operatorname{Pf} X}{\operatorname{Pf} X([n])} \tag{7}$$

(ここで, n, l は偶数, X は $(n+l)$ 次交代行列, $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$ であり, 部分集合 $I = \{i_1, \cdots, i_r\} \subset [n+l]$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ に対して $X(I) = \left(x_{i_p, i_q}\right)_{1\le p,q\le r}$ である) を用いることにより, 次の Schur 型公式が導かれる. (Schur の Q 関数の場合は, Schur [16] による Q 関数の定義の一部である.)

定理 2.4. (Schur 型公式) 非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して,

$$S_\alpha^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = \left(P_{(\alpha_i,\alpha_j)}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x})\right)_{1\le i,j\le l}$$

とおく. ただし, $P_{(0,0)}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = 0$ とし, 正整数 r, s に対して

$$P_{(r,s)}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = -P_{(s,r)}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}), \quad P_{(r,0)}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = -P_{(0,r)}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = P_{(r)}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x})$$

となるように, $P_{(r,s)}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x})$ の定義を非負整数の組に対して拡張しておく. このとき, 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \operatorname{Pf} S_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \operatorname{Pf} S_{\lambda^0}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases}$$

2.3 Józefiak–Pragacz 型公式

次に，Schur の歪 Q 関数に対する Józefiak–Pragacz の公式 [4, Theorem 1] が，一般化された P 関数に対しても成立することを示す．一般の $\mathcal{G}$ に付随した歪 P 関数を次のように定義する．

定義 2.5. 非負整数 r, k に対して，$P^{\mathcal{G}}_{r/k}(\boldsymbol{x}) = P^{\mathcal{G}}_{r/k}(x_1, \cdots, x_n)$ を

$$P^{\mathcal{G}}_{(r)}(x_1, \cdots, x_n, u) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{\mathcal{G}}_{r/k}(x_1, \cdots, x_n) g_k(u)$$

によって定義する．($0 \le k \le r$ でなければ $P^{\mathcal{G}}_{r/k}(\boldsymbol{x}) = 0$ である．) 非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ に対して，

$$M^{\mathcal{G}}_{\alpha/\beta}(\boldsymbol{x}) = \left(P^{\mathcal{G}}_{\alpha_i/\beta_{m+1-j}}(\boldsymbol{x})\right)_{1 \le i \le l,\, 1 \le j \le m}$$

とおく．そして，ストリクトな分割 λ, μ と非負整数 k に対して，$\mathcal{G}$ **に付随した歪** $\boldsymbol{P}$ **関数** $P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu,k}(\boldsymbol{x})$ を

$$P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu,k}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \equiv k,\ l(\mu) \equiv k \bmod 2 \text{ であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t M_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \equiv k,\ l(\mu) \not\equiv k \bmod 2 \text{ であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda^0/\mu}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t M^{\mathcal{G}}_{\lambda^0/\mu}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \not\equiv k,\ l(\mu) \equiv k \bmod 2 \text{ であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda^0/\mu^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t M^{\mathcal{G}}_{\lambda^0/\mu^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \not\equiv k,\ l(\mu) \not\equiv k \bmod 2 \text{ であるとき}) \end{cases}$$

によって定義する．

注意. 一般には，$P^{\mathcal{G}}_{r/k}(\boldsymbol{x}) \neq P^{\mathcal{G}}_{r-k}(\boldsymbol{x})$ であり，$P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\emptyset}(\boldsymbol{x}) \neq P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x})$ である．また，多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(0) = 0$ $(d \ge 1)$ をみたしているならば，k の偶奇によらずに

$$P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu,k}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) + l(\mu) \text{ が偶数であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) + l(\mu) \text{ が奇数であるとき}) \end{cases}$$

となる．

定理 2.6. （Józefiak–Pragacz 型公式）ストリクトな分割 λ と変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ に対して，

$$P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\mu} P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu, k}(\boldsymbol{x}) P^{\mathcal{G}}_{\mu}(\boldsymbol{y}).$$

ここで，μ はストリクトな分割全体をわたる．

証明. $l(\lambda) \equiv k \bmod 2$ であるときを考える．($l(\lambda) \not\equiv k$ の場合も同様である．) 次のパフィアン版 Cauchy–Binet の公式（[14, 命題 A.5] を見よ）を用いる．m, n, l を非負整数とし，$m+n$ は偶数であると仮定する．このとき，m 次交代行列 A，n 次交代行列 B，$m \times l$ 行列 S，$n \times l$ 行列 T に対して，

$$\sum_{K} (-1)^{\binom{\#K}{2}} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} A & S([m];K) \\ -{}^{t}S([m];K) & O \end{pmatrix} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} B & T([n];K) \\ -{}^{t}T([n];K) & O \end{pmatrix} = \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} A & S{}^{t}T \\ -T{}^{t}S & B \end{pmatrix}. \quad (8)$$

ここで，K は $[l]$ の部分集合で $m + \#K$（よって，$n + \#K$）が偶数となるもの全体をわたり，$K = \{k_1, \cdots, k_r\}$ $(k_1 < \cdots < k_r)$ のとき $S([m];K) = \left(s_{i,k_j}\right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le r}$, $T([n];K) = \left(t_{i,k_j}\right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le r}$ である．このパフィアン版 Cauchy–Binet の公式を

$$A = S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}), \quad S = \left(P^{\mathcal{G}}_{(\lambda_i/j)}(\boldsymbol{x})\right)_{1 \le i \le l, j \ge 0}, \quad B = A(\boldsymbol{y}), \quad T = \left(g_j(y_i)\right)_{1 \le i \le k, j \ge 0}$$

として適用すると，$S{}^{t}T$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k \ge 0} P^{\mathcal{G}}_{\lambda_i/k}(x_1, \cdots, x_n) g_k(y_j) = P^{\mathcal{G}}_{(\lambda_i)}(x_1, \cdots, x_n, y_j)$$

で与えられるから，この定理の証明は次の定理に帰着される． □

定理 2.7. 変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ を考え，非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して，

$$N^{\mathcal{G}}_{\alpha}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \left(P^{\mathcal{G}}_{(\alpha_i)}(\boldsymbol{x}, y_j)\right)_{1 \le i \le l, 1 \le j \le k}$$

とおく．このとき，ストリクトな分割 λ に対して，

$$Q^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{D(\boldsymbol{y})} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & N^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \\ -{}^{t}N^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) & A(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} & (l(\lambda) + k \text{ が偶数であるとき}), \\ \dfrac{1}{D(\boldsymbol{y})} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & N^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \\ -{}^{t}N^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) & A(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} & (l(\lambda) + k \text{ が奇数であるとき}). \end{cases} \quad (9)$$

この定理において，$n = 0$ の場合（変数 $\boldsymbol{x}$ がないとき）が Nimmo 型公式（定理 2.3）であり，$k = 0$ の場合（変数 $\boldsymbol{y}$ がないとき）が Schur 型公式（定理 2.4）である．

証明. 示すべき等式 (9) の右辺を $P'_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ とおくと，パフィアン版 Sylvester の公式 (7) を用いることにより，

$$P'_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \mathrm{Pf}\left(P'_{(\lambda_i,\lambda_j)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\right)_{1\le i,j\le r}$$

（ここで，$l(\lambda)$ が偶数のときは $r = l(\lambda)$，奇数のときは $r = l(\lambda)+1$ である）となることがわかる．よって，$P'_{(r)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = P^{\mathcal{G}}_{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $P'_{(r,s)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = P^{\mathcal{G}}_{(r,s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ となることを示せばよい．そのために，母関数

$$F_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{r\ge0} P^{\mathcal{G}}_{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})z^r, \quad G_{z,w}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{r,s\ge0} P^{\mathcal{G}}_{(r,s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})z^r w^s,$$
$$F'_z(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum_{r\ge0} P'_{(r)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})z^r, \quad G'_{z,w}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum_{r,s\ge0} P'_{(r,s)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})z^r w^s$$

を考え，

$$F_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = F'_z(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}), \quad G_{z,w}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G'_{z,w}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

となることを示す．

ここでは，$F_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = F'_z(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ の証明を説明する．($G_{z,w}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G'_{z,w}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ の証明のアイデアも同様である.）Nimmo 型公式（定理 2.3）とパフィアンの多重線型性，展開公式，Schur のパフィアン (5) を用いると，

$$F_z(x_1,\cdots,x_m) = \begin{cases} 1 - \displaystyle\sum_{i=1}^m \Pi(\widehat{\boldsymbol{x}}_i; x_i)F_z(x_i) & (m \text{ が偶数であるとき}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m \Pi(\widehat{\boldsymbol{x}}_i; x_i)F_z(x_i) & (m \text{ が奇数であるとき}) \end{cases} \tag{10}$$

と表されることがわかる．ここで，$\widehat{\boldsymbol{x}}_i = (x_1,\cdots,\widehat{x}_i,\cdots,x_m)$（$x_i$ を除く）であり，

$$\Pi(u_1,\cdots,u_r;v) = \prod_{i=1}^r \frac{u_i+v}{u_i-v}$$

である．一方，$P'_{(r)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ の定義から，同様にして，

$$\begin{aligned} &F'_z(x_1,\cdots,x_n|y_1,\cdots,y_k) \\ &= \begin{cases} F_z(x_1,\cdots,x_n) - \displaystyle\sum_{i=1}^k \Pi(\widehat{\boldsymbol{y}}_i; y_i)F_z(x_1,\cdots,x_n,y_i) & (k \text{ が偶数であるとき}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^k \Pi(\widehat{\boldsymbol{y}}_i; y_i)F_z(x_1,\cdots,x_n,y_i) & (k \text{ が奇数であるとき}) \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

となることが示される．

n, k の偶奇に応じて 4 つの場合を考える必要があるが，いずれの場合もほぼ同様なので，ここでは n, k はともに偶数であると仮定する．このとき，(10) より，

$$F_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1 - \sum_{a=1}^m \Pi(\widehat{\boldsymbol{x}}_a; x_a)\Pi(\boldsymbol{y}; x_a)F_z(x_a) - \sum_{b=1}^k \Pi(\boldsymbol{x}; y_b)\Pi(\widehat{\boldsymbol{y}}_b; y_b)F_z(y_b)$$

となり，(10), (11) より，

$$F'_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1 - \sum_{a=1}^{n} \Pi(\widehat{\boldsymbol{x}}_a; x_a)\Pi(\boldsymbol{y}; x_a)F_z(x_a)$$
$$- \sum_{b=1}^{k} \Pi(\widehat{\boldsymbol{y}}_b; y_b)\left(\sum_{a=1}^{n} \Pi(\widehat{\boldsymbol{x}}_a; x_a)\frac{y_b + x_a}{y_b - x_a}F_z(x_a) + \Pi(\boldsymbol{x}; y_b)F_z(y_b)\right)$$

となる．よって，$F_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $F'_z(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ における $F_z(x_a)$ の係数を比較することにより，

$$\Pi(\widehat{\boldsymbol{x}}_a; x_a)\Pi(\boldsymbol{y}; x_a) = \Pi(\widehat{\boldsymbol{x}}_a; x_a) + \sum_{b=1}^{k} \Pi(\widehat{\boldsymbol{y}}_b; y_b)\Pi(\widehat{\boldsymbol{x}}_a; x_a)\frac{y_b + x_a}{y_b - x_a}$$

となることを示せばよい．つまり，共通因子を取り去ると，

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{y_i + x_a}{y_i - x_a} = 1 + \sum_{b=1}^{k} \left(\prod_{i \neq b} \frac{y_i + y_b}{y_i - y_b}\right) \frac{y_b + x_a}{y_b - x_a}.$$

を示せばよいことになるが，この等式は Schur のパフィアン (5) において $n = k + 2$, $\boldsymbol{x} = (y_1, \cdots, y_k, 0, -x_a)$ としたものを最後の行・列で展開することによって得られる． □

3 斜交 Q 関数

この節では，C 型ルート系に付随した P 関数，Q 関数を考える．

3.1 斜交 Q 関数

Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の標準基底（正規直交基底）を $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ とするとき，C_n 型ルート系 Δ とその正ルート系 Δ^+ はそれぞれ

$$\Delta = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) : 1 \le i < j \le n\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i : 1 \le i \le n\},$$
$$\Delta^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \le i < j \le n\} \cup \{2\varepsilon_i : 1 \le i \le n\}$$

で与えられる．このとき，支配的ウェイト $\lambda = \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n$ は，長さ n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と同一視される．また，対応する Weyl 群を W とすると，$W \cong \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ である．よって，定義 1.1 で与えた定義 (2) から，C_n 型ルート系 Δ に付随した Hall–Littlewood 関数は，$x_i = e^{\varepsilon_i}$ $(1 \le i \le n)$ とおくことにより

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}; t) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - tx_i^{-2}}{1 - x_i^{-2}} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1 - tx_i^{-1}x_j}{1 - x_i^{-1}x_j} \frac{1 - tx_i^{-1}x_j^{-1}}{1 - x_i^{-1}x_j^{-1}}\right) \tag{12}$$

となる．これを**斜交 Hall–Littlewood 関数** (symplectic Hall–Littlewood function) と呼ぶ.（A 型の場合の Hall–Littlewood 関数 $P_\lambda(\boldsymbol{x}; t)$ と区別するために，$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}; t)$ と表記する.）

斜交 Hall–Littelwood 関数 $P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x};t)$ において $t=0$ を代入すると，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x};0)=s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})$$

と斜交 Schur 関数となる．ここで，**斜交 Schur 関数** (symplectic Schur function) $s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})$ は，

$$s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=\frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j+1}-x_i^{-(\lambda_j+n-j+1)}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n-j+1}-x_i^{-(n-j+1)}\right)_{1\le i,j\le n}}$$

によって定義され，斜交 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(2n)$ の最高ウェイト λ をもつ既約表現の指標となる．

定義 3.1. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x};-1),\quad Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=2^{l(\lambda)}P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

とおき，それぞれ**斜交 P 関数** (symplectic P-function)，**斜交 Q 関数** (symplectic Q-function) と呼ぶ．

斜交 P 関数，Q 関数は前節で導入した一般化された P 関数の一例となっている．

命題 3.2. (1) $\mathcal{G}=\{g_d(u)\}_{d\ge0}$ を

$$g_0(u)=1,\quad g_d(v+v^{-1})=(v+v^{-1})\frac{v^d-v^{-d}}{v-v^{-1}}$$

となる多項式列とする．このとき，長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{-1}). \tag{14}$$

ここで，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{-1}=(x_1+x_1^{-1},\cdots,x_n+x_n^{-1})$ である．

(2) $\mathcal{G}'=\{g'_d(u)\}_{d\ge0}$ を

$$g'_0(u)=1,\quad g'_d(v+v^{-1})=2(v+v^{-1})\frac{v^d-v^{-d}}{v-v^{-1}}$$

となる多項式列とする．このとき，長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=P_\lambda^{\mathcal{G}'}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{-1}). \tag{15}$$

証明. λ が長さ l のストリクトな分割であるとき，W_λ は C_{n-l} 型の Weyl 群と同型であり，[9, Theorem 2.8] により，

$$\sum_{w\in W_\lambda}w\left(\prod_{i=l+1}^n\frac{1-tx_i^{-2}}{1-x_i^{-2}}\prod_{l+1\le i<j\le n}\frac{1-tx_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}\frac{1-tx_i^{-1}x_j^{-1}}{1-x_i^{-1}x_j^{-1}}\right)=W_\lambda(t)$$

となる．よって，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x};-1)=\sum_{w\in W/W_\lambda}w\left(x^\lambda\prod_{i=1}^l\frac{1+x_i^{-2}}{1-x_i^{-2}}\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i\le l}}\frac{1+x_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}\frac{1+x_i^{-1}x_j^{-1}}{1-x_i^{-1}x_j^{-1}}\right).$$

ここで,

$$\sum_{w\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l} w\left(x^\lambda\prod_{i=1}^{l}\frac{1+x_i^{-2}}{1-x_i^{-2}}\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i\le l}}\frac{1+x_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}\frac{1+x_i^{-1}x_j^{-1}}{1-x_i^{-1}x_j^{-1}}\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{l}\left(x_i^{\lambda_i}\frac{1+x_i^{-2}}{1-x_i^{-2}}+x_i^{-\lambda_i}\frac{1+x_i^{2}}{1-x_i^{2}}\right)\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i\le l}}\frac{1+x_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}\frac{1+x_i^{-1}x_j^{-1}}{1-x_i^{-1}x_j^{-1}}$$

となるが,

$$x_i^d\frac{1+x_i^{-2}}{1-x_i^{-2}}+x_i^{-d}\frac{1+x_i^{2}}{1-x_i^{2}}=(x_i+x_i^{-1})\frac{x_i^d-x_i^{-d}}{x_i-x_i^{-1}}=g_d(x_i+x_i^{-1})$$

であり,

$$\frac{1+x_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}\frac{1+x_i^{-1}x_j^{-1}}{1-x_i^{-1}x_j^{-1}}=\frac{(x_i+x_i^{-1})+(x_j+x_j^{-1})}{(x_i+x_i^{-1})-(x_j-x_j^{-1})}.$$

よって, $W/((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l\times W_\lambda)\cong\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-l}$ に注意して, Nimmo 型公式 (定理 2.3) の証明中の (6) と比較すると, $P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{-1})$ となることがわかる. □

従って, 前節で与えた Nimmo 型公式 (定理 2.3), Schur 型公式 (定理 2.4), Józefiak–Pragacz 型公式 (定理 2.6) が, 斜交 P 関数, 斜交 Q 関数に対しても成立する. (命題 3.2 において $g_d(0)=g_d'(0)=0$ $(d\ge 1)$ であることに注意する.)

系 3.3. 非負整数列 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ に対して,

$$S_{\langle\alpha\rangle}(\boldsymbol{x})=\Big(Q_{\langle(\alpha_i,\alpha_j)\rangle}(\boldsymbol{x})\Big)_{1\le i,j\le l}$$

とおく. このとき, 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\operatorname{Pf}S_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda)\text{ が偶数であるとき}),\\ \operatorname{Pf}S_{\langle\lambda^0\rangle}(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda)\text{ が奇数であるとき}).\end{cases}$$

命題 3.2 で与えた多項式列 $g_d(u)$ の母関数が

$$1+\sum_{d\ge1}(v+v^{-1})\frac{v^d-v^{-d}}{v-v^{-1}}z^d=\frac{(1+vz)(1+v^{-1}z)}{(1-vz)(1-v^{-1}z)}$$

となることと, Nimmo 型公式 (定理 2.3) を用いると, 長さ 2 以下の分割に対応する斜交 Q 関数の母関数が, 次の命題のように表されることが示される.

命題 3.4. (1) $Q_{\langle(0)\rangle}(\boldsymbol{x})=Q_{\langle\emptyset\rangle}(\boldsymbol{x})=1$ と定義すると,

$$\sum_{r\ge0}Q_{\langle(r)\rangle}(\boldsymbol{x})z^r=\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x_iz)(1+x_i^{-1}z)}{(1-x_iz)(1-x_i^{-1}z)}. \tag{16}$$

(2) $Q_{\langle(0,0)\rangle}(\boldsymbol{x})=0$ とし，正整数 r, s に対して

$$Q_{\langle(r,s)\rangle}(\boldsymbol{x})=-Q_{\langle(s,r)\rangle}(\boldsymbol{x}),\quad Q_{\langle(r,0)\rangle}(\boldsymbol{x})=-Q_{\langle(0,r)\rangle}(\boldsymbol{x})=Q_{\langle(r)\rangle}(\boldsymbol{x}),$$

となるように $Q_{\langle(r,s)\rangle}(\boldsymbol{x})$ の定義を非負整数の組 (r,s) に対して拡張しておく．このとき，

$$\sum_{r,s\geq 0} Q_{\langle(r,s)\rangle}(\boldsymbol{x})z^r w^s$$
$$=\frac{(z-w)(1-zw)}{(z+w)(1+zw)}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x_iz)(1+x_i^{-1}z)}{(1-x_iz)(1-x_i^{-1}z)}\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x_iw)(1+x_i^{-1}w)}{(1-x_iw)(1-x_i^{-1}w)}-1\right). \tag{17}$$

特に，命題 3.4 (1) から，今の場合は Józefiak–Pragacz 型公式（定理 2.6）に現れる $P^{\mathcal{G}'}_{r/k}(\boldsymbol{x})$ が $P^{\mathcal{G}'}_{r-k}(\boldsymbol{x})=Q_{\langle r-k\rangle}(\boldsymbol{x})$ に等しいことがわかる．よって，

系 3.5. 非負整数列 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ に対して，

$$M_{\langle\alpha/\beta\rangle}(\boldsymbol{x})=\Big(Q_{\langle(\alpha_i-\beta_{m+1-j})\rangle}(\boldsymbol{x})\Big)_{1\leq i\leq l,\,1\leq j\leq m}$$

とおき，ストリクトな分割 λ, μ に対して，

$$Q_{\langle\lambda/\mu\rangle}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}S_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) & M_{\langle\lambda/\mu\rangle}(\boldsymbol{x})\\ -{}^tM_{\langle\lambda/\mu\rangle}(\boldsymbol{x}) & O\end{pmatrix} & (l(\lambda)+l(\mu)\text{ が偶数であるとき}),\\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix}S_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) & M_{\langle\lambda/\mu^0\rangle}(\boldsymbol{x})\\ -{}^tM_{\langle\lambda/\mu^0\rangle}(\boldsymbol{x}) & O\end{pmatrix} & (l(\lambda)+l(\mu)\text{ が奇数であるとき})\end{cases}$$

と定義する．このとき，ストリクトな分割 λ と変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_k)$ に対して，

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{\mu}Q_{\langle\lambda/\mu\rangle}(\boldsymbol{x})Q_{\langle\mu\rangle}(\boldsymbol{y}).$$

ここで，μ はストリクトな分割全体をわたる．

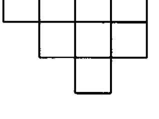
3.2 斜交 Q 関数の組合せ論的表示

Józefiak–Pragacz 型の公式（系 3.5）を用いることによって，斜交 Q 関数をある種の半標準盤の母関数として表す公式（King–Hamel [5] の予想）を証明することができる．

ストリクトな分割 λ に対して，

$$S(\lambda)=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 : 1\leq i\leq l(\lambda),\ i\leq j\leq\lambda_i+i-1\}$$

とおき，λ の**変形 Young 図形** (shifted Young diagram) と呼ぶ．また，Young 図形のときと同様に，正方形を並べて $S(\lambda)$ を図示する．例えば，$\lambda=(4,3,1)$ の変形 Young 図形は



となる.

定義 3.6. (King–Hamel [5]) ストリクトな分割 λ に対して，λ を枠とする**斜交プライムつき変形盤** (symplectic primed shifted tableau) とは，λ の変形 Young 図形 $S(\lambda)$ の各正方形に全順序集合

$$A_n = \{1' < 1 < \overline{1'} < \overline{1} < 2' < 2 < \overline{2'} < \overline{2} < \cdots < n' < n < \overline{n'} < \overline{n}\}$$

の元を 1 つずつ書き込んで次の 5 つの条件 (i) ～ (v) をみたすようにしたもののことである：

(i) 各行の成分は左から右に広義単調増加である.
(ii) 各列の成分は上から下に広義単調増加である.
(iii) k' も $\overline{k'}$ も各行に 2 回以上現れない.
(iv) k も $\overline{k}$ も各列に 2 回以上現れない.
(v) 第 k 行の成分は A_n の順序に関して k' 以上である.

このような λ を枠とする斜交プライムつき半標準盤全体のなす集合を $\mathrm{SpPSTab}(\lambda; n)$ と表す．盤 $T \in \mathrm{SpPSTab}(\lambda; n)$ に対して，文字 $\gamma \in A_n$ の T における出現回数を $m(\gamma)$ とし，

$$\boldsymbol{x}^T = \prod_{k=1}^{n} x_i^{m(k')+m(k)-m(\overline{k'})-m(\overline{k})}$$

と定義する.

例えば,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & \overline{2'} & 3' \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 2' & \overline{2'} & 3 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 4 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}$$

は斜交プライムつき変形盤であり，$\boldsymbol{x}^T = x_1^2 x_2^{-1} x_3^2 x_4$ である.

定理 3.7. （King–Hamel の予想 [5, Conjecture 3.1]）長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) = \sum_{T \in \mathrm{SpPSTab}(\lambda; n)} \boldsymbol{x}^T. \tag{18}$$

証明. 斜交 Q 関数に対する Józefiak–Pragacz 型公式（系 3.5）から

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{\mu} Q_{\langle\mu\rangle}(x_1, \cdots, x_{n-1}) Q_{\langle\lambda/\mu\rangle}(x_n)$$

と表される．ここで，$Q_{\langle\lambda/\mu\rangle}(\boldsymbol{x})$ のパフィアン表示と，パフィアンと行列式の基本関係

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & B \\ -{}^tB & O \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{m(m-1)/2} \det B & (r = m \text{ のとき}), \\ 0 & (r < m \text{ のとき}) \end{cases}$$

（ここで，A は r 次交代行列であり，B は $r \times (2m-r)$ 行列である）を用いると，

$$Q_{\langle\lambda/\mu\rangle}(x_n) = \begin{cases} \det\left(Q_{\langle(\lambda_i-\mu_j)\rangle}(x_n)\right)_{1\le i,j\le l(\lambda)} & (S(\lambda)\supset S(\mu) \text{ かつ } l(\lambda)-l(\mu)\le 1 \text{ であるとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となることがわかる．

一方，$S(\lambda)\supset S(\mu)$ となるストリクトな分割 λ,μ に対して，λ/μ を枠とする斜交プライムつき変形盤の母関数を

$$Q^{\mathrm{comb}}_{\langle\lambda/\mu\rangle}(\boldsymbol{x}) = \sum_{T\in\mathrm{SpPSTab}(\lambda/\mu)} \boldsymbol{x}^T$$

と定義すると，

$$Q^{\mathrm{comb}}_{\langle\lambda\rangle}(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n) = \sum_{\mu} Q^{\mathrm{comb}}_{\langle\mu\rangle}(x_1,\cdots,x_{n-1})Q^{\mathrm{comb}}_{\langle\lambda/\mu\rangle}(x_n)$$

である．また，斜交プライムつき変形盤の定義の条件 (v) に注意すると，$S(\lambda)\supset S(\mu)$ かつ $l(\lambda)-l(\mu)\le 1$ でない限り，$Q^{\mathrm{comb}}_{\langle\lambda/\mu\rangle}(x_n)=0$ でなければならない．さらに，lattice path method（[5] を参照）を用いると，$S(\lambda)\supset S(\mu)$ かつ $l(\lambda)-l(\mu)\le 1$ であるとき，

$$Q^{\mathrm{comb}}_{\langle\lambda/\mu\rangle}(x_n) = \det\left(Q^{\mathrm{comb}}_{\langle(\lambda_i-\mu_j)\rangle}(x_n)\right)_{1\le i,j\le l(\lambda)}$$

となることが示される．

従って，$n=1,\lambda=(r)$ の場合に $Q_{\langle(r)\rangle}(x)=Q^{\mathrm{comb}}_{\langle(r)\rangle}(x)$ となることを示せばよい．ところが，この場合は両辺を具体的に計算することができ，

$$Q_{\langle(r)\rangle}(x) = Q^{\mathrm{comb}}_{\langle(r)\rangle}(x) = 2x^r + 4x^{r-2} + 4x^{r-4} + \cdots + 4x^{-r+2} + 2x^{-r}$$

である． □

注意. $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,a_2,\cdots)$ を factorial パラメータとする斜交 factorial Hall–Littlewood 関数を

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a};t) = \frac{1}{W_\lambda(t)}\sum_{w\in W} w\left(\prod_{i=1}^n (x_i|\boldsymbol{a})^{\lambda_i}\prod_{i=1}^n \frac{1-tx_i^{-2}}{1-x_i^{-2}}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1-tx_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}\frac{1-tx_i^{-1}x_j^{-1}}{1-x_i^{-1}x_j^{-1}}\right)$$

（ここで，$(t|\boldsymbol{a})^d=\prod_{i=0}^{d-1}(t+a_i)$ である）とおいて定義し，斜交 factorial P 関数，Q 関数を

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}) = P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a};-1),\quad Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}) = 2^{l(\lambda)}P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$$

によって定める．すると，これらの斜交 factorial P 関数，Q 関数も前節で導入した一般化された P 関数の一例となる．さらに，斜交プライムつき変形盤 $T\in\mathrm{SpPSTab}(\lambda;n)$ の

重みを

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})^T = \prod_{(i,j)\in S(\lambda)} \mathrm{wt}(T(i,j);i,j), \quad \mathrm{wt}(\gamma;i,j) = \begin{cases} x_k - a_{j-i} & (\gamma = k' \text{ のとき}), \\ x_k + a_{j-i} & (\gamma = k \text{ のとき}), \\ x_k^{-1} - a_{j-i} & (\gamma = \overline{k'} \text{ のとき}), \\ x_k^{-1} + a_{j-i} & (\gamma = \overline{k} \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると，定理 3.7 の証明と同様にして，$a_0 = 0$ の場合には

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}) = \sum_{T\in \mathrm{SpPSTab}(\lambda;n)} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})^T$$

となることが示される．この右辺の母関数は Hamel–King [1] が組合せ論的に定義した斜交 Q 関数の factorial 類似（ただし $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ の場合）であり，上記の Hall–Littlewood 関数の表示を用いると，徳山型の公式 [1, Theorem 17] が容易に導かれる．

4 正値性予想

C_n 型 Weyl 群 W の作用で不変な Laurent 多項式全体のなす環を $\Lambda_n^C = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]^W$ とし，その部分環 Γ_n^C を

$$\Gamma_n^C = \{ f \in \Lambda_n^C : f(t, -t, x_3, \cdots, x_n) \text{ は } t \text{ によらない} \}$$

とおいて定める．このとき，斜交 Schur 関数 $\{s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) : \lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}\}$ は Λ_n^C の基底をなし，斜交 Q 関数 $\{Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) : \lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}\}$ は Γ_n^C の基底をなす．まず，Γ_n^C の積の構造定数について，

予想 4.1. 長さ n 以下のストリクトな分割 μ, ν に対して，

$$P_{\langle\mu\rangle}(\boldsymbol{x})P_{\langle\nu\rangle}(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda f_{\langle\mu\rangle,\langle\nu\rangle}^{\langle\lambda\rangle} P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})$$

と展開するとき，係数 $f_{\langle\mu\rangle,\langle\nu\rangle}^{\langle\lambda\rangle}$ は非負整数である．

例えば，$\nu = (1)$ であるときは，Nimmo 型公式（定理 2.3）を用いて次を示すことができる．

命題 4.2. 長さ n 以下のストリクトな分割 μ に対して，

$$P_{\langle\mu\rangle}(\boldsymbol{x})P_{\langle(1)\rangle}(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}).$$

ここで，λ は次の (i), (ii) のいずれかをみたす長さ n 以下の分割全体をわたる：

(i) $S(\lambda) \supset S(\mu)$, $|\lambda| = |\mu| + 1$，あるいは，
(ii) $S(\lambda) \subset S(\mu)$, $|\lambda| = |\mu| - 1$，$l(\lambda) = l(\mu)$.

次に，Schur の P 関数 $P_\lambda(x_1,\cdots,x_{2n})$ において，$x_{n+i}=x_i^{-1}$ $(1\leq i\leq n)$ と代入したものを考えると，$P_\lambda(x_1,\cdots,x_n,x_1^{-1},\cdots,x_n^{-1})\in\Gamma_n^C$ となる．よって，斜交 P 関数で展開することができる．

予想 4.3. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda(x_1,\cdots,x_n,x_1^{-1},\cdots,x_n^{-1})=\sum_\mu c_{\lambda,\langle\mu\rangle}P_{\langle\mu\rangle}(x_1,\cdots,x_n)$$

と展開するとき，係数 $c_{\lambda,\langle\mu\rangle}$ は非負整数である．

例えば，$l(\lambda)\leq 2$ であるときは，命題 3.4 を用いて次を示すことができる．

命題 4.4. (1) 正整数 r に対して，$P_{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{-1})=P_{\langle(r)\rangle}(\boldsymbol{x})$.

(2) 正整数 $r>s$ に対して，

$$P_{(r,s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{-1})=P_{\langle(r,s)\rangle}(\boldsymbol{x})+2\sum_{i=1}^{s-1}P_{\langle(r-i,s-i)\rangle}(\boldsymbol{x})+P_{\langle(r-s)\rangle}(\boldsymbol{x}).$$

さらに，

予想 4.5. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=\sum_\mu g_{\langle\lambda\rangle,\langle\mu\rangle}s_{\langle\mu\rangle}(\boldsymbol{x})$$

と展開するとき，係数 $g_{\langle\lambda\rangle,\langle\mu\rangle}$ は非負整数である．

例えば，$l(\lambda)=n$ であるときは，次の命題と斜交 Schur 関数に関する構造定数が非負整数であることから，予想 4.5 が成り立つことがわかる．

命題 4.6. $\delta_n=(n,n-1,\cdots,2,1)$ とおくと，長さ n 以下の分割 ν に対して，

$$P_{\langle\nu+\delta_n\rangle}(\boldsymbol{x})=s_{\langle\nu\rangle}(\boldsymbol{x})s_{\langle\delta_n\rangle}(\boldsymbol{x}).$$

参考文献

[1] A. M. Hamel and R. C. King, Factorial characters and Tokuyama's identity for classical groups, Proceedings of the 28th International Conference of Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Vancouver, July 4–8, 2016), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. proc. **BC** (2016), 623–634.

[2] V. N. Ivanov, Combinatorial formula for factorial Schur Q-functions, J. Math. Sci. (N.Y.) **107** (2001), 4195–4211.

[3] V. N. Ivanov, Interpolation analogues of Schur Q-functions, J. Math. Sci. (N.Y.) **131** (2005), 5495–5507.

[4] T. Józefiak and P. Pragacz, A determinantal formula for skew Q-functions, J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), 76–90.

[5] R. C. King and A. M. Hamel, Combinatorial realisation of Hall–Littlewood polynomials at $t = -1$, Proceedings of the 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Tianjin, July 2–6, 2007), available at `http://igm.univ-mlv.fr/~fpsac/FPSAC07/SITE07/PDF-Proceedings/Posters/75.pdf`

[6] D. E. Knuth, Overlapping Pfaffians, Electron. J. Combin. **3** (no. 2, The Foata Festschrift) (1996), #R5.

[7] D. E. Littlewood, On certain symmetric functions, Proc. London Math. Soc. **43** (1961), 485–498.

[8] I. G. Macdonald, Spherical functions on a group of p-adic type, Publications of the Ramanujan Institute, No. 2, University of Madras, 1971.

[9] I. G. Macdonald, The Poincaré series of a Coxeter group, Math. Ann. **199** (1972), 161–174.

[10] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition", Oxford Univ. Press, 1995.

[11] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, Sém. Lothar. Combin. **45** (2000/01), Art. B45a.

[12] A. O. Morris, A note on the multiplication of Hall functions, J. London Math. Soc. **39** (1964), 481–488.

[13] J. J. C. Nimmo, Hall–Littlewood symmetric functions and the BKP equation, J. Phys. A **23** (1990), 751–760.

[14] 岡田 聡一, Schur Q-functions and symplectic Q-functions, 2016 年度表現論シンポジウム講演集, 2016, pp. 111–132.

[15] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials, in "Topics in Invariant Theory", Séminaire d'Algèbre Dubreil-Malliavin 1989-90, Lecture Notes in Math. **1478**, Springer-Verlag, 1991, pp. 130–191.

[16] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[17] A. N. Sergeev, The tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras $\mathfrak{Gl}(n, m)$ and $Q(n)$, Math. USSR-Sb. **51** (1985), 419–427.

[18] Y. C. You, Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups, in "Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups", Adv. Ser. in Math. Phys. **7**, World Sci. 1989, pp. 449–466.