数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 84-91

最良のJames定数を持つバナッハ空間の特徴付けとそのLassak問題への応用

田中 亮太朗 (Ryotaro Tanaka)
斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)
小室 直人 (Naoto Komuro)

1 導入

バナッハ空間論は, 関数解析学の様々な分野に基本的な概念と重要な結果を提供してきた. 特に, バナッハ空間の幾何学的な性質を単位球の形状等を通して研究するバナッハ空間の幾何学は, 不動点理論や最短距離問題の研究等に広く応用されている. バナッハ空間の幾何学の研究には, バナッハ空間の幾何的な特徴を定量化した幾何学的定数が有用である場合が多くある. 本論文では, バナッハ空間の幾何学的定数の中でも最もよく知られたもののひとつである James 定数を取り扱う.

X をバナッハ空間としたとき, S_X は X の単位球面を表すものとする. すなわち, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. James 定数は, Gao-Lau [6] によって, バナッハ空間の単位球の四角さを表す指標として導入された. バナッハ空間 X の James 定数 $J(X)$ を,

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S_X\}$$

によって定める. $J(X)$ の基本的な性質としては次が挙げられる.

(i) $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$ ([6]).

(ii) H がヒルベルト空間ならば, $J(H) = \sqrt{2}$.

(iii) $J(X) < 2$ のとき, またそのときに限って, X は uniformly non-square である. ここで X が uniformly non-square であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x, y \in S_X$ に対して

$$\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq 2(1-\delta)$$

が成立することをいう.

ここで, (ii) の逆が一般には成立しないことに注意する. 実際, 次の結果を持つ.

Proposition 1.1 (Gao and Lau [6]). *Let* $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ *be a two-dimensional normed space whose unit ball is invariant under* $\pi/4$*-rotation. Then* $J(X) = \sqrt{2}$.

これにより, 例えば, $\mathbb{R}^2$ 上のノルムを

$$\|(a,b)\| = \max\{|a|, |b|, (|a|+|b|)/\sqrt{2}\}$$

によって定めることで, このノルムに関する単位球は正八角形となり, James 定数が $\sqrt{2}$ であることを得る. しかしながら, 容易にわかるように, この空間はヒルベルト空間とはならない.

このことから, 次の問題が自然に提起される.

Problem 1.2. What conditions on Banach spaces X are necessary and sufficient for $J(X) = \sqrt{2}$?

本論文では, この問題について考える. 結論は $\dim X \geq 3$ の場合と $\dim X = 2$ の場合で大きく異なり, 後者についての結果は Lassak [13] によって提起された問題に応用を持つ.

上記の問題を考えるにあたり, James 定数を別の形式で表しておくことは有用である. ノルム空間の二つの元 x, y に対して, それらが互いに isosceles 直交するとは, $\|x+y\| = \|x-y\|$ であることをいい, $x \perp_I y$ で表される. この概念を用いることで次を得る.

Proposition 1.3 (Gao and Lau [6]). *Let X be a Banach space. Then*

$$J(X) = \sup\{\|x+y\| : x, y \in S_X,\ x \perp_I y\}.$$

2 $\dim X \geq 3$ の場合

まず, $\dim X \geq 3$ の場合を考える. この場合は, Nordlander's conjecture [14] との関連が強い. バナッハ空間 X に対して, その modulus of convexity $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ を

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| : x, y \in S_X,\ \|x-y\| = \varepsilon\right\}$$

によって定める. この関数は, uniform convexity 及び uniform smoothness 等の研究において重要であるが, その正確な値を求めることは一般には困難である. しかし, ヒルベルト空間に対しては, 中線定理を用いることで, 各 $\varepsilon \in [0,2]$ に対して

$$\delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

を得る. この値は, バナッハ空間の modulus of convexity において, 次の意味で最良である.

Theorem 2.1 (Nordlander [14]). *Let X be a Banach space. Then $\delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ for each ε.*

一方, この最良関数は, バナッハ空間の中でヒルベルト空間を特徴付けることが知られている.

Theorem 2.2 (Day [5]). *Let X be a Banach space. If $\delta_X(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ for ALL $\varepsilon \in (0,2)$, then X is a Hilbert space.*

この結果の改良として, Nordlander [14] は次のことを予想した. X がある $\varepsilon \in (0,2)$ に対して $\delta_X(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$ を満たすならば, X はヒルベルト空間である. この問題は, $\dim X = 2$ の場合については Alonso-Benítez [2] により 1988 年に否定的に解決されていたが, $\dim X \geq 3$ の場合は 2009 年の Chelidze [4] を待たねばならない.

Theorem 2.3 (Chelidze [4]). *Let X be a Banach space with $\dim X \geq 3$. If $\delta_X(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$ for SOME $\varepsilon \in (0,2)$, then X is a Hilbert space.*

一方, Alonso-Benítez [2] において,

$$\delta_X(\sqrt{2}) = 1 - 1/\sqrt{2}$$

であることと, $x \perp_I y$ であるような $x, y \in S_X$ に対して $\|x+y\| = \sqrt{2}$ が成立することとが同値であることが示された. したがって, 次を得る.

Lemma 2.4. *Let X be a Banach space with $\dim X \geq 3$. Then X is a Hilbert space if and only if $\|x+y\| = \sqrt{2}$ whenever $x, y \in S_X$ and $x \perp_I y$.*

この補題を用いることで, 本節の主定理を得る.

Theorem 2.5 (Komuro, Saito and Tanaka [10]). *Let X be a Banach space with $\dim X \geq 3$. If $J(X) = \sqrt{2}$, then X is a Hilbert space.*

したがって, $\dim X \geq 3$ の場合は, $J(X) = \sqrt{2}$ であることと X がヒルベルト空間であることとは同値である.

3 $\dim X = 2$ の場合

本節では, 特に断らない限り, $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ とする. 各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$x(\theta) = \frac{(\cos\theta, \sin\theta)}{\|(\cos\theta, \sin\theta)\|}$$

及び

$$r(\theta) = \|x(\theta)\|_2 = \frac{1}{\|(\cos\theta, \sin\theta)\|}$$

とおく.

次は単純だが重要である.

Lemma 3.1 (Gao and Lau [6]; Alonso [1]). *Let $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Then, for each $\theta \in \mathbb{R}$, there exists a unique $\omega(\theta) \in (\theta, \theta+\pi)$ such that $x(\theta) \perp_I x(\omega(\theta))$.*

$\mathbb{R}$ 上の自己同相写像 α が rotation であるとは, 各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $|\alpha(\theta+2\pi) - \alpha(\theta)| = 2\pi$ が成立することをいう.

次は本節の主結果を述べる上で重要な役割を果たす.

Proposition 3.2. *Let $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Then, there exist a pair of increasing rotations ω and η on $\mathbb{R}$ satisfying the following properties:*

(i) $\theta < \eta(\theta) < \omega(\theta) < \theta + \pi$ *for each* $\theta \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $x(\theta) \perp_I x(\omega(\theta))$ *for each* $\theta \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $\omega^2(\theta) = \theta + \pi$ *for each* $\theta \in \mathbb{R}$*;*

(iv) *the equation*

$$x(\eta(\theta)) = \frac{x(\theta) + x(\omega(\theta))}{\|x(\theta) + x(\omega(\theta))\|}$$

holds for each $\theta \in \mathbb{R}$*; and*

(v) $\eta^2 = \omega$*. In particular,* $\omega \circ \eta = \eta \circ \omega$*.*

Moreover, ω *and* η *are uniquely determined by* (i), (ii) and (iv).

この命題を用いることで, $\dim X = 2$ の場合について, $J(X) = \sqrt{2}$ となるための形式的な必要十分条件を得る.

Theorem 3.3 (Komuro, Saito and Tanaka [12]). $J(X) = \sqrt{2}$ *if and only if*

$$r(\theta)^2 + r(\omega(\theta))^2 = r(\eta(\theta))^2 + r((\omega \circ \eta)(\theta))^2$$

for each $\theta \in [0, 2\pi]$*.*

この定理の一つの応用として, Proposition 1.3 の部分的逆を得る. $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が θ-rotation invariant であるとは, θ 回転作用素

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

が $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ 上で等距離となることをいう. これは, 各 φ に対して $r(\varphi + \theta) = r(\varphi)$ が成立することと同値である.

次は $\pi/2$-rotation invariant norm の重要な特徴を示す.

Lemma 3.4. *Let* $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ *be* $\pi/2$*-rotation invariant. Then* $\omega(\theta) = \theta + \pi/2$ *and* $\eta(\theta) = \theta + \pi/4$ *for each* θ*.*

Theorem 3.3 を用いることで, 次を得る.

Corollary 3.5 (Komuro, Saito and Tanaka [11]). *Let* $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ *be* $\pi/2$*-rotation invariant. Then* $J(X) = \sqrt{2}$ *if and only if* X *is* $\pi/4$*-rotation invariant.*

4 Lassak問題への応用

本節では, 前節の結果のLassak問題への応用を考える. Lassak問題はHadwiger [7] の凸体被覆に関する未解決問題に関連して提起された.

K を $\mathbb{R}^n$ の凸体, すなわち, 内点を持つコンパクト凸集合とする. $x \in \mathbb{R}^n$ 及び $\lambda \in (0,1)$ に対して,

$$x + \lambda K := \{x + \lambda y : y \in K\}$$

は K の smaller homothetic copy と言われる.

$c(K)$ を K を被覆するために必要な K の smaller homothetic copy の最小数とする. そのとき, Hadwiger は次のことを予想した.

Conjecture 4.1 (Hadwiger's conjecture). Let K be a convex body of $\mathbb{R}^n$. Then $c(K) \leq 2^n$, and the equality holds if and only if K is a parallelotope.

この予想の真偽は $n = 2$ の場合を除いて不明である.

Hadwiger の予想に関連して, Lassak [13] は凸体の m-covering number の概念を導入した. $\mathbb{R}^n$ の凸体 K 及び $m(\geq c(K))$ に対して, $h_m(K)$ を m 個の K の smaller homothetic copy で K を被覆し得る最小の positive ratio とする. そのとき, Lassak は次のことを予想した.

Conjecture 4.2 (Lassak's conjecture). Let K be a convex body in $\mathbb{R}^2$ with $h_4(K) = 1/\sqrt{2}$. Then K is an affine image of a convex body whose boundary $r(\theta)$ satisfies $r(\theta + \pi/4) = r(\theta)$.

一見 James 定数とは関係の薄そうな問題であるが, K が原点対象, すなわち, ある $\mathbb{R}^2$ 上のノルムの単位球として表せるとき, 次の定理により直接的かつ密接な関係が生じる.

Theorem 4.3 (He, Martini and Wu [8]). *Let $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ be a normed space. Then*

$$h_4(B_X) = \frac{1}{J(X)}$$

この定理により, ある $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ に対して $K = B_X$ と表せる場合の Lassak 問題は次のようになる. $J(X) = \sqrt{2}$ ならば X は $\pi/4$-rotation invariant. これは, Proposition 1.3 の逆が無条件で成立することに他ならない.

本節の残りでは, 前節の主結果の応用により得られる次の命題を用いて, Lassak 問題を否定的に解決する.

Proposition 4.4. *Let $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ be a normed space. Then $J(X) = \sqrt{2}$ if $\theta \mapsto r(\theta)$ satisfies the following conditions:*

(i) $r(\theta)^2 + r(\theta + \pi/2)^2 = 2$ *for each* $\theta \in [0, \pi/4]$*; and*

(ii) $r(\theta) = 1$ *for each* $\theta \in [\pi/4, \pi/2] \cup [3\pi/4, \pi]$.

このような特殊なノルムについては, 次が言える.

Proposition 4.5. *Let $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ be a normed space. Suppose that $\theta \mapsto r(\theta)$ satisfies the conditions (i) and (ii) set out in Proposition 4.4.*

Then X is isometrically isomorphic to some $\pi/2$-rotation invariant normed space if and only if $r(\theta) = 1$ for ALL $\theta \in [0, 2\pi]$.

今, $0 < b < 1/2$ に対して,

$$s_b(\theta) = \begin{cases} \sqrt{1 + b(1 - \cos 16\theta)} & (\theta \in [0, \pi/8]) \\ \sqrt{1 - b(1 - \cos 16\theta)} & (\theta \in [\pi/8, \pi/4]) \\ 1 & (\theta \in [\pi/4, \pi/2]) \end{cases}$$

とする. この曲線を $\theta \in [\pi/2, \pi]$ に対して

$$s_b(\theta) := \sqrt{2 - s_b(\theta - \pi/2)^2}$$

とおくことで $[0, \pi]$ に拡張し, さらに $\theta \in [\pi, 2\pi]$ に対して $s_b(\theta) := s_b(\theta - \pi)$ と定めることで単純閉曲線を構成する. その内部領域

$$C_b = \{s(\cos\theta, \sin\theta) : 0 \leq s \leq s_b(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$$

は absorbing, balanced and closed であるから, $\|\cdot\|^{(b)}$ を C_b の Minkowski 汎関数とすると, $\|\cdot\|^{(b)}$ は C_b が凸であるとき $\mathbb{R}^2$ 上のノルムを定める. このための条件として次がわかる.

Proposition 4.6. *Let $0 < b \leq 1/130$. Then C_b is convex. Consequently, $\|\cdot\|^{(b)}$ is a norm on $\mathbb{R}^2$.*

曲線の構成法から, $r(\theta)(= s_b(\theta)) \neq 1$ となる θ が存在することは明らかであり, また Proposition 4.4 の条件 (i), (ii) を満たすことがわかる. したがって, 次を得る.

Theorem 4.7 (Komuro, Saito and Tanaka [12]). *Let $0 < b \leq 1/130$. Then $J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|^{(b)})) = \sqrt{2}$, and $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|^{(b)})$ is NOT isometric to any $\pi/2$-rotation invariant normed space.*

これは Lassak の予想に対する反例を与える. 結論として, Lassak の予想は, その範囲を原点対象な凸体 K に制限したとしても正しくないことがわかる.

参考文献

[1] J. Alonso, *Uniqueness properties of isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Ann. Sci. Math. Québec **18** (1994), 25–38.

[2] J. Alonso and C. Benítez, *Some characteristic and noncharacteristic properties of inner product spaces*, J. Approx. Theory **55** (1988), 318–325.

[3] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[4] G. Z. Chelidze, *On Nordlander's conjecture in the three-dimensional case*, Ark. Mat. **47** (2009), 267–272.

[5] M. M. Day, *Uniform convexity in factor and conjugate spaces*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 375–385.

[6] J. Gao and K.-S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Aust. Math. Soc. Ser. A **48** (1990), 101–112.

[7] H. Hadwiger, *Ungelöste probleme, No. 20*, Elem. Math. **12** (1957), 121.

[8] C. He, H. Martini and S. Wu, *On covering functionals of convex bodies*, J. Math. Anal. Appl. **437** (2016), 1236–1256.

[9] D. Ji, J. Li and S. Wu, *On the uniqueness of isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Results Math. **59** (2011), 157–162.

[10] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the class of Banach spaces with James constant* $\sqrt{2}$, Math. Nachr. **289** (2016), 1005–1020.

[11] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the class of Banach spaces with James constant* $\sqrt{2}$*: Part II*, Mediterr. J. Math., **13** (2016), 4039–4061.

[12] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the class of Banach spaces with James constant* $\sqrt{2}$ *III*, to appear in Math. Inequal. Appl.

[13] M. Lassak, *Covering a plane convex body by four homothetical copies with the smallest positive ratio*, Geom. Dedicata **21** (1986), 157–167.

[14] G. Nordlander, *The modulus of convexity in normed linear spaces*, Ark. Mat. **4** (1960), 15–17.

Ryotaro Tanaka
Faculty of Mathematics,
Kyushu University,
Fukuoka 819-0395, Japan
E-mail: r-tanaka@math.kyushu-u.ac.jp

Naoto Komuro
Department of Mathematics,
Hokkaido University of Education, Asahikawa Campus,
Asahikawa 070-8621, Japan

E-mail: komuro.naoto@a.hokkyodai.ac.jp

Kichi-Suke Saito
Department of Mathematical Sciences,
Institute of Science and Technology,
Niigata University,
Niigata 950-2181, Japan
E-mail: saito@math.sc.niigata-u.ac.jp