

負パラメータを持つ Tsallis relative operator entropy

大阪教育大学・教育 瀬尾 祐貴 (YUKI SEO)

(DEPARTMENT OF MATHEMATICS EDUCATION, OSAKA KYOIKU UNIVERSITY)

大阪教育大学・教育 藤井 淳一 (JUN ICHI FUJII)

(DEPARTMENT OF ARTS AND SCIENCES (INFORMATION SCIENCE), OSAKA KYOIKU UNIVERSITY)

Dedicated to the memory of late Professor Takayuki Furuta

ABSTRACT. The Tsallis relative entropy with negative parameters is the special case of the quasi-entropy due to Hiai and Petz. In this paper, we define the Tsallis relative operator entropy with negative parameters of positive operators on a Hilbert space and show some properties.

1. INTRODUCTION

本論文は、[10]の結果に基づいています。

作用素論の中で、ヒルベルト空間上の2個の正作用素に対する幾何平均は古くから定式化されていましたが(例えば、[2, 21])、長い間、3つ以上の正作用素に対する幾何平均の構成は未解決でした。それが、2004年に、安藤-Li-Mathias [3]の3人によって、新しい提案がなされ、この方向の議論が一挙に進展しました。それから、10年たった2014年に、Lawson-Lim-Pálfia [23, 22]によって、これまでの議論をまとめる形で、完全な定式化が行われ、幾何平均の持つべき性質も併せて証明されました。現在、この幾何平均がいろいろな意味で最良のものと考えられています(例えば、[28])。\$A_1, A_2, \dots, A_n\$をヒルベルト空間上の可逆な正作用素、\$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\$を加重ベクトルとします。そのとき、次のKarcher equation

$$(1.1) \quad \sum_{j=1}^n \omega_j \log \left(X^{-\frac{1}{2}} A_j X^{-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

を満たす可逆正作用素 \$X\$ がただ一つ存在します。それを \$A_1, \dots, A_n\$ に対する (weighted) Karcher mean と呼び、\$G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)\$ とかきます。ただ、Karcher equation の構成上、作用素の可逆性がどうしても必要になります。実は、\$G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)\$ は各作用素に対して単調性を持っていますので、可逆でない作用素に対しては、\$A_j + \varepsilon I\$ を考えて、

$$\text{s-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} G_K(\omega; A_1 + \varepsilon I, \dots, A_n + \varepsilon I)$$

とすると、この強極限はいつでも存在します。それを改めて、Karcher mean と呼び、\$G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)\$ とかくことはできません。しかし、それは一般的には可逆性を持ちませんから、Karcher equation (1.1) を考えることは意味がありません。応用上、Karcher equation を満たすことは重要です。そのためには、Karcher equation の枠組みを少し広げる必要があります。それには、相対作用素エントロピーの考えが有効であることがわかりました [9, 8, 6, 16, 11]。\$A\$ と \$B\$ を可逆な正作用素としたとき、\$A\$ と \$B\$ の相対作用素エントロピーは、藤井 - 亀井 [7] によって、

$$(1.2) \quad S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right) A^{\frac{1}{2}}$$

で、定義されました。しかも、 $S(A|B)$ は、 A や B に可逆性がない時も、存在する場合があります。そこで、Karcher equation を次のように拡張します [9]。

$$(1.3) \quad \sum_{j=1}^n \omega_j S(X|A_j) = 0 \quad \text{with} \quad \ker X = \bigcap_{\omega_j > 0} \ker A_j$$

私たちは、これを Extended Karcher equation と呼ぶことにします。 A_j が可逆の時は、(1.3) は、Karcher equation (1.1) と完全に一致します。また、 A_j がすべて射影作用素のときでも、(1.3) はただ一つの射影解を持つことがわかります。しかしながら、 A_j が可逆でないときに、 $G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)$ が一般的に (1.3) を満たすかどうか、また、それがユニークかどうか、わかっていません。今は、 $\sum_{j=1}^n \omega_j S(G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)|A_j) \geq 0$ までしか、わかっていません。これが、実際に等号になるのかどうか、一番肝心なところが、未解決です。だから、私たちは、相対作用素エントロピーを含む作用素版のエントロピーの議論がまだ十分ではないと考えました。そこで、表題のように、負の場合のエントロピーを考えることが、問題の解決にならないか。それが、本講演の大きな目的の一つです。そのために、負の場合のエントロピーの構成から考えることが必要になります。

もう一つは、情報理論の枠組みでも、負の場合の考察が欠かせないことがわかりました。1976年、荒木 [4] は一般的なフォンノイマン環の枠組みで、二つの状態 (states) の相対エントロピーを定義し、その性質を調べました。さらに、Petz [25] は、その相対エントロピー汎関数を一般化し、その凸性を議論しました。それを、quasi-entropy と呼び、行列やフォンノイマン環の枠組みで Csizsar の f -divergence の量子的一般化として定義しました。この概念は、Lieb の concavity と密接に関連しています [19]。さて、日合と Petz [18] は、2012年に、行列の枠組みで考察を続けます。正定値な密度行列 A と B 、関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、quasi-entropy は、

$$(1.4) \quad S_f^X(A|B) = \text{Tr} X^* f(L_A R_B^{-1}) R_B X$$

で定義されます。ただし、 Tr は、行列上のトレース、 L_D と R_D は行列上の左作用と右作用を表します。そして、大切なことは、量子情報理論における重要な量が、この quasi-entropy の特別な場合になっていることです。

例えば、 $X = I$ とおき、 $f(x) = x \log x$ とエントロピー関数にすると、

$$S_f^I(A|B) = \text{Tr} A(\log A - \log B) = S_U(A|B)$$

となり、これは、梅垣の相対エントロピーになります ([27])。これの作用素版が、藤井-亀井による相対作用素エントロピー (1.2) です。日合と Petz [17] は、これらのエントロピーの間に次の関係があることを示しました。

$$S_U(A|B) \leq -\text{Tr} S(A|B).$$

ここで、 $t \neq 1$ である実数に対して、一般化対数関数 \ln_t は、

$$\ln_t x = \frac{x^t - 1}{t}$$

で定義されます。

二つ目の例として、 $f(x) = \ln_t x$ と $X = I$ に対する quasi-entropy は、阿部 [1] による量子系の Tsallis 型相対エントロピーになります。

$$(1.5) \quad S_f^I(A|B) = -\frac{1 - \text{Tr}(B^{1-t} A^t)}{t} = -D_t(B|A)$$

ただし、 A と B は、正定値密度行列で $0 < t < 1$ です。柳 - 古市 - 栗山 [13, 14, 29] は、(1.5) の作用素版として、Tsallis 相対作用素エントロピーを定義しました。

$$(1.6) \quad T_t(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \ln_t \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right) A^{\frac{1}{2}} = \frac{A \sharp_t B - A}{t}$$

ただし、 t -加重な作用素幾何平均は、

$$A \sharp_t B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^t A^{\frac{1}{2}}$$

です。古市 [12] は Tsallis 相対エントロピーの言葉で梅垣相対エントロピーの一般化を定義しました。

$$D_t(A|B) = \text{Tr} A^{1-t} (\ln_t A - \ln_t B)$$

このとき、 $\lim_{t \rightarrow 0} D_t(A|B) = S_U(A|B)$ となり、さらに

$$D_t(A|B) \leq -\text{Tr} T_t(A|B)$$

がわかります。

3つ目の例として、 $f_t(x) = x \ln_t x$ と $X = I$ とおくと、その quasi-entropy は、負パラメーターをもつ Tsallis 型相対エントロピーになります。

$$(1.7) \quad S_{f_t}^I(A|B) = \frac{\text{Tr} A^{1+t} B^{-t} - 1}{t} = D_{-t}(A|B)$$

これまでの流れから、(1.7) の作用素版を考察することは自然でしょう。そこで、まず次の表記を用います。

$$A \natural_t B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^t A^{\frac{1}{2}}$$

これは、 \sharp_t と全く同じ式です。 $t \notin [0, 1]$ のとき、 $A \natural_t B$ は、作用素平均にはなりませんが、ある程度の作用素平均的な性質はあとでみるように持っています。そこで、 $A \natural_t B$ を quasi t -geometric mean と言うことにします。Tsallis 相対作用素エントロピーと同じ記号を用いて

$$T_t(A|B) = \frac{A \natural_t B - 1}{t} \quad \text{for } -1 \leq t < 0$$

とかくことにします。

本稿の目的は、ヒルベルト空間上の可逆性を仮定しない一般的な正作用素に対する負パラメーターを持つ Tsallis 相対作用素エントロピーを定義し、その性質を調べることにあります。そのためには、可逆でない正作用素に対して、quasi t -geometric mean の性質を調べる必要があります。次節で、そのことを詳しく見ていくことにしましょう。

2. QUASI t -GEOMETRIC MEAN \natural_t FOR $-1 \leq t < 0$

Quasi t -geometric mean \natural_t は、2番目の項に関しては、単調性を持ちます。可逆でない正作用素 A と B に対して、 $A \natural_t (B + \varepsilon)$ の強作用素極限が存在するときに、その正作用素で定義します。

$$A \natural_t B = \text{s-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} A \natural_t (B + \varepsilon)$$

さて、このとき、quasi t -geometric mean \natural_t の存在のもとで、簡単な性質をあげておきます。

Lemma 2.1. *Let A, B, C and D be positive operators. If $A \natural_t B$ and $C \natural_t D$ exist for some $t \in [-1, 0)$, then the following properties like operator means hold:*

- (i) **right reverse monotonicity:** $B \leq C$ implies $A \natural_t B \geq A \natural_t C$.
- (ii) **super-additivity:** $A \natural_t B + C \natural_t D \geq (A + C) \natural_t (B + D)$.
- (iii) **homogeneity:** $(\alpha A) \natural_t (\alpha B) = \alpha(A \natural_t B)$ for all $\alpha > 0$.
- (iv) **jointly convexity:** For $\alpha \in [0, 1]$

$$((1 - \alpha)A + \alpha C) \natural_t ((1 - \alpha)B + \alpha D) \leq (1 - \alpha)A \natural_t B + \alpha C \natural_t D.$$

さらに、quasi t -geometric mean $A \natural_t B$ for $t \in [-1, 0)$ は、次の情報単調性を持ちます。

Theorem 2.2. *Let A and B be positive operators and Φ a normal positive linear map. If $A \natural_t B$ exists for some $t \in [-1, 0)$, then*

$$\text{Information monotonicity: } \Phi(A \natural_t B) \geq \Phi(A) \natural_t \Phi(B).$$

In particular,

*Transformer inequality: $T^*AT \natural_t T^*BT \leq T^*(A \natural_t B)T$ for any operators T and the equality holds for invertible T .*

$t \in [-1, 0)$ に対して、 $1 \natural_t \epsilon$ は、上に有界ではないですから、 $1 \natural_t 0$ は発散して、意味を持ちません。そこで、 $A \natural_t B$ が、作用素として存在するための存在条件について考える必要が生じます。そのために、スペクトル定理の観点から、連続関数のグラフが、接線の包絡線で近似できるというアイデアを用います。 $\alpha > 0$ と $t \in [-1, 0)$ に対して、

$$L_{\alpha,t}(A, B) = (1 - t)\alpha^{-t}A + t\alpha^{1-t}B$$

とおきますと、次の存在条件が成立します。

Lemma 2.3. *Let A and B be positive operators and $t \in [-1, 0)$. Then $A \natural_t B$ exists if and only if there exists a constant operator C such that*

$$L_{\alpha,t}(A, B) = (1 - t)\alpha^{-t}A + t\alpha^{1-t}B \leq C \quad \text{for all } \alpha > 0.$$

さて、 $A \natural_t B$ for $t \in [-1, 0)$ が存在するための十分条件を調べるためには、いくつかの準備が必要です。まず、quasi t -geometric mean for $t \in [-1, 0)$ は、normalization の性質を持ちます。

Lemma 2.4. *Let A be a positive operator and $t \in [-1, 0)$. Then $A \natural_t A = A$.*

さらに、次の算術幾何平均の不等式を満たします。可逆な時は、すでに、古田 [15] によって、示されています。

Lemma 2.5. *Let A and B be positive operators and $t \in [-1, 0)$. If $A \natural_t B$ exists, then*

$$A \natural_t B \geq (1 - t)A + tB$$

$A \natural_t B$ for all $t \in [-1, 0)$ が、存在するための条件の一つを示す時が来ました。

Theorem 2.6. *Let A, B positive operators. If there is a scalar $c > 0$ such that $A \leq cB$, then $A \natural_t B$ exists for all $t \in [-1, 0)$, and*

$$(2.1) \quad (1 - t)A + tB \leq A \natural_t B \leq c^{-t}A.$$

以上をまとめますと、次のように存在条件を整理できます。

Theorem 2.7. *The implications (1) \implies (2) \implies (3) hold for any positive operators A, B and $t \in [-1, 0)$, and each converse does not always hold.*

- (1) *majorization or range inclusion: $A \leq cB$ for some $c > 0$, i.e., $\text{ran}A^{\frac{1}{2}} \subset \text{ran}B^{\frac{1}{2}}$.*

(2) *existence condition*: $A \natural_t B$ exists as a bounded operators, i.e., there exists a constant operator C such that

$$(1-t)\alpha^{-t}A + t\alpha^{1-t}B \leq C \quad \text{for all } \alpha > 0.$$

(3) *kernel inclusion*: $\ker A \supset \ker B$.

Remark 2.8. A と B の値域が閉集合の時、特に、行列の時は、Theorem 2.7 の 3つの条件はすべて同値になります。なぜならば、すべての閉な正作用素 A に対して、 $\text{ran}A^{\frac{1}{2}} = \overline{\text{ran}A} = (\ker A)^{\perp}$ が成り立つからです。

3. TSALLIS RELATIVE OPERATOR ENTROPY

この節で、可逆とは限らない正作用素に対して、負パラメータを持つ Tsallis 相対作用素エントロピーの性質を調べます。 A と B を正作用素、 $t \in [-1, 0)$ とします。 $A \natural_t (B + \varepsilon)$ は、 $\varepsilon \searrow 0$ において単調に増加しますから、Tsallis 相対作用素エントロピー

$$T_t(A|B + \varepsilon) = \frac{A \natural_t (B + \varepsilon) - A}{t}$$

は、 $\varepsilon \searrow 0$ において単調に減少します。従って、負パラメータを持つ Tsallis 相対作用素エントロピーは、その強作用素極限が存在するときに、

$$T_t(A|B) = \text{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} T_t(A|B + \varepsilon)$$

と、定義できます。まず、簡単な性質を述べます。

Theorem 3.1. *Let A, B, C, D be positive operators. If $T_t(A|B)$ and $T_t(C|D)$ exist for some $t \in [-1, 0)$, then the following properties of Tsallis relative operator entropy with negative parameters hold:*

- (1) **right monotonicity**: If $B \leq C$, then $T_t(A|B) \leq T_t(A|C)$.
- (2) **transformer inequality**: $X^* T_t(A|B) X \leq T_t(X^* A X | X^* B X)$ for all X
(the equality holds for invertible X).
- (2') **information monotonicity**: $\Phi(T_t(A|B)) \leq T_t(\Phi(A) | \Phi(B))$
for all normal positive linear maps Φ .
- (3) **sub-additivity**: $T_t(A|B) + T_t(C|D) \leq T_t(A + C | B + D)$.
- (3') **jointly concavity**: $(1-s)T_t(A|B) + sT_t(C|D) \leq T_t((1-s)A + sC | (1-s)B + sD)$
for all $s \in [0, 1]$.
- (4) **homogeneity**: $T_t(\alpha A | \alpha B) = \alpha T_t(A|B)$ for all $\alpha > 0$.
- (5) **affine parametrization**: $T_t(A | A \natural_s B) = s T_{ts}(A|B)$ for $t, s \in \mathbb{R}$ with $s, t \neq 0$.
- (6) **orthogonality**: $T_t\left(\bigoplus_k A_k | \bigoplus_k B_k\right) = \bigoplus_k T_t(A_k | B_k)$.

さらに、Theorem 2.7 によって、可逆でない場合の $T_t(A|B)$ の存在条件が、次のようにわかります。

Theorem 3.2. *The implications (1) \implies (2) \implies (3) hold for any positive operators A, B and $t \in [-1, 0)$, and each converse does not always hold..*

(i) *majorization or range inclusion*: $A \leq cB$ for some $c > 0$, i.e.,

$$\text{ran}A^{\frac{1}{2}} \subset \text{ran}B^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) *existence condition*: $T_t(A|B)$ exists as a bounded operators, i.e., there exists a constant operator C such that

$$((1-t)\alpha^{-t} - 1)A + t\alpha^{1-t}B \leq C \quad \text{for all } \alpha > 0.$$

(iii) *kernel condition*: $\ker A \supset \ker B$.

$T_t(A|B)$ は、可逆の時と同じように、可逆でないときでも上半連続性を持ちます。

Lemma 3.3. *Let A and B be positive operators. If $T_t(A|B)$ exists for some $t \in [-1, 0)$, then*

$$T_t(A + \varepsilon|B + \varepsilon) \searrow T_t(A|B)$$

as $\varepsilon \searrow 0$.

可逆な正作用素のときは、 $t \in [-1, 0)$ のときでも、簡単に $T_t(A|B)$ の正值性と A と B の順序性は関連が付きまます。従って、 $T_t(A|B) = 0$ if and only if $A = B$ です。実は、可逆でないときでも、同様なことが成立します。

Theorem 3.4. *Let A and B be positive operators. Suppose that $T_t(A|B)$ exists for some $t \in [-1, 0)$. Then $T_t(A|B) \geq 0$ (resp. $T_t(A|B) \leq 0$) if and only if $B \geq A$ (resp. $B \leq A$). In particular, $T_t(A|B) = 0$ if and only if $A = B$.*

最後に、可逆でない場合の負パラメータを持つ Tsallis 相対作用素エントロピーの下半連続性について考えましょう。 A と B を正作用素とし、 $R = (A + B)^{1/2}$ とおきます。このとき、 $A \leq A + B$ そして、 $B \leq A + B$ ですから、 $A^{1/2} = DR$ かつ $B^{1/2} = ER$ となる作用素 D, E が存在します。このとき、 $D^*D + E^*E = I_R$ になります [20, 5]。

Lemma 3.5. *Let A and B be positive operators. If $T_t(A|B)$ exists for some $t \in [-1, 0)$, then*

$$RT_t(D^*D|(E^*E)_\varepsilon)R \searrow RT_t(D^*D|E^*E)R = T_t(RD^*DR|RE^*ER) = T_t(A|B)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$, where $(E^*E)_\varepsilon$ for $\varepsilon > 0$ is defined by

$$(E^*E)_\varepsilon x = \begin{cases} E^*Ex & \text{for } x \in \text{ran}Q_{[0,1-\varepsilon)} \\ \varepsilon x & \text{for } x \in (\text{ran}Q_{[0,1-\varepsilon)})^\perp \end{cases}$$

where $Q_{[0,1-\varepsilon)}$ is the spectral projection of D^*D corresponding to $[0, 1 - \varepsilon)$.

同様に、相対作用素エントロピーでも、成立する。

Lemma 3.6. *Let A and B be positive operators. If the relative operator entropy $S(A|B)$ exists, then*

$$RS(D^*D|(E^*E)_\varepsilon)R \searrow RS(D^*D|E^*E)R = S(RD^*DR|RE^*ER) = S(A|B)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$, where $S(A|B)$ is defined by (1.2).

以上をまとめますと、次のように $T_t(A|B)$ の下半連続性を示すことができます。

Theorem 3.7. *Let A and B be positive operators. If $T_{t_0}(A|B)$ exists for some $t_0 \in [-1, 0)$, then*

$$T_t(A|B) \nearrow S(A|B) \quad \text{for } t_0 \leq t \nearrow 0.$$

Acknowledgements.

This work is partially supported by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (C), JSPS KAKENHI Grant Number JP 16K05253.

REFERENCES

- [1] S. Abe, *Monotonic decrease of the quantum nonadditive divergence by projective measurements*, Phys Letters A, **312** (2003), 336–338.
- [2] T. Ando, *Topics on operator inequalities*, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978.
- [3] T. Ando, C.K. Li and R. Mathias, *Geometric means*, Linear Algebra Appl., **385** (2004), 305–334.
- [4] H. Araki, *Relative entropy of states of von Neumann algebras*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **11** (1976), 809–833.
- [5] J.I. Fujii, *On Izumino's view of operator means*, Math. Japon., **33** (1988), 671–675.
- [6] J.I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo, *An extension of the Kubo-Ando theory : Solidarities*, Math. Japon., **35**(1990), 387–396.
- [7] J.I. Fujii and E. Kamei, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34** (1989), 341–348.
- [8] J.I. Fujii and E. Kamei, *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japonica **34** (1989), 541–547.
- [9] J.I. Fujii and Y. Seo, *The relative operator entropy and the Karcher mean*, to appear in Linear Algebra Appl.
- [10] J.I. Fujii and Y. Seo, *Tsallis relative operator entropy with negative parameters*, Adv. Oper. Theory **1** (2016), 219–236.
- [11] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić method in operator inequalities*, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, 2012.
- [12] S. Furuichi, *Matrix trace inequalities on the Tsallis entropies*, J.I.P.A.Math., **9** (2008), Article 1, 7pp.
- [13] S. Furuichi, K. Yanagi and K. Kuriyama, *Fundamental properties for Tsallis relative entropy*, J. Math. Phys., **45** (2004), 4868–4877.
- [14] S. Furuichi, K. Yanagi and K. Kuriyama, *A note on operator inequalities of Tsallis relative operator entropy*, Linear Algebra Appl., **407** (2005), 19–31.
- [15] T. Furuta, *Invitation to linear operators*, Taylor&Francis, London, 2001.
- [16] T. Furuta, J. Mićić Hot, J.E. Pečarić and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities **1**, Element, Zagreb, 2005.
- [17] F. Hiai and D. Petz, *The Golden-Thompson trace inequality is complemented*, Linear Algebra Appl., **181** (1993), 153–185.
- [18] F. Hiai and D. Petz, *From Quas-entropy to various quantum information quantities*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **48** (2012), 525–542.
- [19] F. Hiai and D. Petz, *Convexity of quasi-entropy type functions: Lieb's and Ando's convexity theorems revisited*, arXiv:1209.0546.
- [20] S. Izumino, *Quotients of bounded operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **106** (1989), 427–435.
- [21] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246**(1980), 205–224.
- [22] J. Lawson and Y. Lim, *Karcher means and Karcher equations of positive definite operators*. Trans. Amer. Math. Soc., Ser. B **1** (2014), 1–22.
- [23] Y. Lim and M. Pálfia, *Matrix power means and the Karcher mean*, J. Funct. Anal., **262** (2012), 1498–1514.
- [24] M. Nakamura and H. Umegaki, *A note on the entropy for operator algebras*, Proc. Jap. Acad., **37** (1961), 149–154.
- [25] D. Petz, *Quasi-entropies for states of a von Neumann algebra*, Publ. RIMS Ktoto Univ., **21** (1985), 787–800.
- [26] C. Tsallis, *Possible generalization of Boltzman-Gibbs statistics*, J. Statist. Phys., **52** (1988), 479–487.
- [27] H. Umegaki, *Conditional expectation in an operator algebra IV*, Kodai Math. Sem. Rep. **14** (1962), 59–85.
- [28] T. Yamazaki, *Riemannian mean and matrix inequalities related to the Ando-Hiai inequality and chaotic order*, Oper. Matrices, **6** (2012), 577–588.
- [29] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, *Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy*, Linear Algebra Appl., **394** (2005), 109–118.

YUKI SEO: DEPARTMENT OF MATHEMATICS EDUCATION, OSAKA KYOIKU UNIVERSITY, ASAHI-
GAOKA, KASHIWARA, OSAKA 582-8582, JAPAN

E-mail address: yukis@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

JUN ICHI FUJII: DEPARTMENT OF ARTS AND SCIENCES (INFORMATION SCIENCE), OSAKA KYOIKU
UNIVERSITY, ASAHI GAOKA, KASHIWARA, OSAKA 582-8582, JAPAN

E-mail address: fujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp