数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 191-198

$C^1([0,1])$ 上の種々のノルムに関する等距離写像

筑波大学・数理物質系　川村　一宏
米子工業高等専門学校　古清水　大直
新潟大学・自然科学系　三浦　毅
Kazuhiro Kawamura, Institute of Mathematics, University of Tsukuba
Hironao Koshimizu, National Institute of Technology, Yonago College
Takeshi Miura, Department of Mathematics, Niigata University

$(M, \|\cdot\|_M)$, $(N, \|\cdot\|_N)$ を線形ノルム空間とする。$S\colon M \to N$ が等距離写像とは

$$\|S(f)-S(g)\|_N = \|f-g\|_M \qquad (\forall f, g \in M) \tag{1}$$

が成り立つことである。等距離写像の研究において，線形性を仮定することが一般的のようであるが，本稿では特に断らない限り等距離写像に線形性は仮定しない。つまり，本稿における等距離写像とは，単に (1) を満たす写像 S をいう。$S\colon M \to N$ が線形写像であるとき，S が等距離写像であるための必要十分条件は $\|S(f)\|_N = \|f\|_N$ が任意の $f \in M$ に対して成り立つことである。

等距離写像の研究は 1932 年の Banach [1] にまでさかのぼることが出来る。$C_{\mathbb{R}}(K)$ をコンパクト Hausdorff 空間 K 上の実数値連続関数全体のなす Banach 空間とする。Banach [1, Theorem 3 in Chapter XI] はコンパクト距離空間 X, Y に対して $C_{\mathbb{R}}(X)$ から $C_{\mathbb{R}}(Y)$ への全射等距離写像を特徴付けた。その後 1937 年に，Stone [19] は距離付け可能性を仮定せずに，コンパクト Hausdorff 空間 X, Y に対して Banach の主張が成り立つことを示した。ここで Banach, Stone は等距離写像が線形であることを仮定せずに $C_{\mathbb{R}}(X)$ から $C_{\mathbb{R}}(Y)$ への全射等距離写像を特徴付けていることに注意する。Banach [1], Stone [19] の結果は，複素数値連続関数全体のなす Banach 空間 $C(X)$ から $C(Y)$ への等距離写像の構造定理に拡張されているが，誰の結果であるかは明確でない。少なくとも [4, Theorem 8 in Chapter V] には “Banach-Stone Theorem”として述べられ，多くの研究者が “The Banach-Stone Theorem”として引用している。

定理 1 (The Banach-Stone Theorem, [4, Theorem 8 in Chapter V] 参照). X, Y をコ

ンパクト *Hausdorff* 空間とする。全射複素線形等距離写像 $S\colon C(X) \to C(Y)$ に対して，連続関数 $u\colon Y \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ と同相写像 $\phi\colon Y \to X$ が存在して

$$S(f)(y) = u(y)f(\phi(y)) \qquad (\forall f \in C(Y))$$

が成り立つ。

The Banach-Stone Theorem は複素線形性を仮定しているが，Banach [1], Stone [19] は線形性を仮定せずに，全射等距離写像を特徴付けている。全射等距離写像の背後には線形性が隠されていることを解明した結果は，the Mazur-Ulam Theorem として知られている。

定理 2 (Mazur and Ulam [14])**.** M, N を線形ノルム空間とする。$S\colon M \to N$ が全射等距離写像ならば $S - S(0)\colon M \to N$ は実線形である。

The Mazur-Ulam Theorem により，$S - S(0)$ は実線形となるが，S が全射等距離であることから $S - S(0)$ も全射実線形であることが分かる。よって S が全射等距離写像ならば，$S - S(0)$ は全射実線形等距離写像である。つまり全射等距離写像を考えるとき，それは実線形であると仮定しても一般性を失うことはない。Väisälä [20] は the Mazur-Ulam Theorem の簡潔な証明を与えている。

The Banach-Stone Theorem は，様々な関数空間上の等距離写像の研究に拡張されている。[5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 16] 参照。Cambern [3] は，$C^1([0,1])$ 上の全射複素線形等距離写像の特徴付けを

$$\|f\|_C = \sup_{t\in[0,1]} (|f(t)| + |f'(t)|) \qquad (\forall f \in C^1([0,1]))$$

に関して与えた。

定理 3 (Cambern [3])**.** S を $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_C)$ 上の全射複素線形等距離写像とする。このとき $c \in \mathbb{T}$ が存在して

$$S(f)(t) = cf(t) \qquad (\forall f \in C^1([0,1]),\ \forall t \in [0,1])$$

または

$$S(f)(t) = cf(1-t) \qquad (\forall f \in C^1([0,1]),\ \forall t \in [0,1])$$

が成り立つ。

Pathak [17] は Cambern の結果 [3] を，n 階連続微分可能な関数全体に対して証明することにより一般化した。Botelho and Jamison [2] は，有限次元 Hilbert 空間 E に値をと

る C^1 関数空間 $C^1([0,1],E)$ 上の全射複素線形等距離写像の構造を決定することにより，Cambern の結果 [3] のベクトル値版を与えた。

Rao and Roy [18] は，Cambern の定理と類似の結果を $C^1([0,1])$ 上の異なるノルム $\|\cdot\|_\Sigma$ に対して示した。ここで

$$\|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad (\forall f \in C^1([0,1]))$$

であり，$\|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$ である。

定理 4 (Rao and Roy [18]). S を $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像とする。このとき $c \in \mathbb{T}$ が存在して

$$S(f)(t) = cf(t) \qquad (\forall f \in C^1([0,1]),\ \forall t \in [0,1])$$

または

$$S(f)(t) = cf(1-t) \qquad (\forall f \in C^1([0,1]),\ \forall t \in [0,1])$$

が成り立つ。

Rao and Roy の結果 [18] は，Cambern の定理 [3] のノルムを $\|\cdot\|_C$ から $\|\cdot\|_\Sigma$ に置き換えただけにもみえる。しかし実際は，Rao and Roy は $[0,1]$ 閉区間上の絶対連続関数全体 AC($[0,1]$) 及び Lipschitz 関数全体 Lip($[0,1]$) を考え，そのノルムとして $\|\cdot\|_\Sigma$ と類似のノルムを導入し，AC($[0,1]$) 及び Lip($[0,1]$) 上の全射複素線形等距離写像を特徴付けている。それらと類似の手法を用いることにより，Rao and Roy は $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像の構造を決定しているため，定理 4 は定理 3 のノルムを少し変えただけの結果とみるべきではない。

定理 1 の S は荷重合成作用素と呼ばれる形をしている。従って定理 3，定理 4 の S はいずれも荷重合成作用素の特別な形である。このように，等距離写像は荷重合成作用素となることがあるが，これはノルムの性質に強く依存することが知られている。例えば $C^1([0,1])$ 上のノルム $\|\cdot\|_\sigma$ を

$$\|f\|_\sigma = |f(0)| + \|f'\|_\infty \qquad (\forall f \in C^1([0,1]))$$

により定めると，$(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素とはならない。実際，次の結果は Koshimizu [12] の特別な場合である。

定理 5 (Koshimizu [12]). S を $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像とする。このとき $c \in \mathbb{T}$ と連続関数 $u\colon [0,1] \to \mathbb{T}$，同相写像 $\phi\colon [0,1] \to [0,1]$ が存在して

$$S(f)(t) = cf(0) + \int_0^t u(s) f'(\phi(s))\, ds \qquad (\forall f \in C^1([0,1]),\ \forall t \in [0,1])$$

が成り立つ。

ここでこれまでの結果を振り返ってみると，the Banach-Stone Theorem は線形性を仮定せずに全射等距離写像を特徴付けている。それは the Mazur-Ulam Theorem が可能としているともいえる。一方で Cambern [3], Rao and Roy [18], Koshimizu [12] の結果は，いずれも複素線形性を仮定した上で，$C^1([0,1])$ 上の全射等距離写像の構造を解明している。そこで次の問題は自然といえよう。

問題． 1. 線形性を仮定せずに，Cambern [3], Rao and Roy [18], Koshimizu [12] の定理と類似の結果を得ることは出来ないか？

2. Cambern [3], Rao and Roy [18], Koshimizu [12] の結果を統一的に扱う手法はないか？

問題 1 に関しては，the Mazur-Ulam Theorem により実線形生を仮定してよいため，虚数単位 i 倍が保存されるとは限らないことが解消されればよいことになる。問題 2 については，異なるノルムを同時に扱わなければならないため，新しいアイディアが必要とされる。しかし Cambern [3], Rao and Roy [18], Koshimizu [12] の証明を調べると，そこには共通した手法が用いられていることが分かる。実際，Cambern [3] は $\|\cdot\|_C$ を直接扱うのではなく

$$\|f\|_C = \sup_{t\in[0,1]} (|f(t)| + |f'(t)|) = \sup_{(t,z)\in[0,1]\times\mathbb{T}} |f(t) + zf'(t)|$$

であることを用いて，$(C^1([0,1]), \|\cdot\|_C)$ を $(C([0,1]\times\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ に等長的に埋め込むことにより $(C^1([0,1]), \|)\|_C$ を $(C([0,1]\times\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ の部分空間とみなして，$\|\cdot\|_C$ ではなく $\|\cdot\|_\infty$ を考えている。同様に Rao and Roy [18], Koshimizu [12] は

$$\begin{aligned}\|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty &= \sup_{s\in[0,1]} |f(s)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \\ &= \sup_{(s,t,z)\in[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{T}} |f(s) + zf'(t)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f\|_\sigma &= |f(0)| + \|f'\|_\infty = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \\ &= \sup_{(t,z)\in[0,1]\times\mathbb{T}} |f(0) + zf'(t)|\end{aligned}$$

であることを用いて，$(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$ を $C(([0,1]\times[0,1]\times\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ に，$(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\sigma)$ を $C(([0,1]\times\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ にそれぞれ埋め込み，$\|\cdot\|_\Sigma$, $\|\cdot\|_\sigma$ の変わりに $\|\cdot\|_\infty$ を扱っている。そこで $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_C)$, $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$, $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\sigma)$ を $C(([0,1]\times[0,1]\times\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ に埋め込むことが出来れば，ノルムの違いに左右されずに統一的な取り扱いが可能となることが期待される。このとき $\|\cdot\|_\Sigma$ が $[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{T}$ に対応していることから，$\|\cdot\|_C$ を $\{(s,t,z)\in[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{T} : s = t\}$ に対応させ，$\|\cdot\|_\sigma$ を $\{(s,t,z)\in[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{T} : s = 0\}$ に対応させればよいことが分かる。

このアイディアによって，次の結果を統一的に示すことが出来た。

定理 6. S を $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_C)$ または $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射等距離写像とする。このとき $c\in\mathbb{T}$ が存在して，次のいずれかが成り立つ：

$$\begin{aligned}
&S(f)(t) = S(0)(t) + cf(t), && (\forall f\in C^1([0,1]),\ \forall t\in[0,1]),\\
&S(f)(t) = S(0)(t) + cf(1-t), && (\forall f\in C^1([0,1]),\ \forall t\in[0,1]),\\
&S(f)(t) = S(0)(t) + \overline{cf(t)}, && (\forall f\in C^1([0,1]),\ \forall t\in[0,1]),\\
&S(f)(t) = S(0)(t) + \overline{cf(1-t)}, && (\forall f\in C^1([0,1]),\ \forall t\in[0,1]).
\end{aligned}$$

定理 7. S を $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射等距離写像とする。このとき $c\in\mathbb{T}$ と連続関数 $u\colon [0,1]\to\mathbb{T}$，同相写像 $\phi\colon [0,1]\to[0,1]$ が存在して，次のいずれかが成り立つ：

$$\begin{aligned}
&S(f)(t) = S(0)(t) + cf(0) + \int_0^t u(s)f'(\phi(s))\,ds, && (\forall f\in C^1([0,1]),\ \forall t\in[0,1]),\\
&S(f)(t) = S(0)(t) + \overline{cf(0)} + \int_0^t u(s)f'(\phi(s))\,ds, && (\forall f\in C^1([0,1]),\ \forall t\in[0,1]),\\
&S(f)(t) = S(0)(t) + cf(0) + \int_0^t \overline{u(s)f'(\phi(s))}\,ds, && (\forall f\in C^1([0,1]),\ \forall t\in[0,1]),\\
&S(f)(t) = S(0)(t) + \overline{cf(0)} + \int_0^t \overline{u(s)f'(\phi(s))}\,ds, && (\forall f\in C^1([0,1]),\ \forall t\in[0,1]).
\end{aligned}$$

定理 6，定理 7 を示すために，$(C^1([0,1]), \|\cdot\|_C)$, $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$, $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\sigma)$ を $[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{T}$ の部分集合に対応させた。それでは逆に，$[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{T}$ の部分集合がノルムを定めるとき，そのノルムに関する $C^1([0,1])$ 上の全射等距離写像を決定する

ことが出来るであろうか。そこで $[0,1]\times[0,1]$ の部分集合 D に対して，$\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ を次のように定める：

定義 1. $[0,1]\times[0,1]$ のコンパクト連結部分集合 D に対して，$\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ を

$$\|f\|_{\langle D\rangle}=\sup_{(s,t)\in D}(|f(s)|+|f'(t)|)\qquad(\forall f\in C^1([0,1]))$$

により定める。このとき

$$\|f\|_{\langle D\rangle}=\sup_{(s,t,z)\in D\times\mathbb{T}}(|f(s)+zf'(t)|)\qquad(\forall f\in C^1([0,1]))$$

が成り立つ。

p_j $(j=1,2)$ を $[0,1]\times[0,1]$ から第 j 座標への射影とする。このときコンパクト連結部分集合 $D\subset[0,1]\times[0,1]$ に対して $\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ が $C^1([0,1])$ 上のノルムであるための必要十分条件は

$$p_1(D)\cup p_2(D)=[0,1]$$

となることである。このような D に対して，$(C^1([0,1]),\|\cdot\|_{\langle D\rangle})$ 上の全射等距離写像を決定することが出来れば，Cambern [3], Rao and Roy [18], Koshimizu [12] の結果を含み，より広いクラスに対する等距離写像の特徴付けを与えることになる。実際，以下の結果が得られた。

定理 8 ([11])**.** D を $[0,1]\times[0,1]$ のコンパクト連結集合で，$p_1(D)\cup p_2(D)=[0,1]$ をみたすとする。さらに $p_1(D)=[a,b]$, $p_2(D)=[c,d]$ とする。ただし $a\leq b$, $c\leq d$ である。S が $(C^1([0,1]),\|\cdot\|_{\langle D\rangle})$ 上の全射等距離写像ならば，連続関数 $\kappa,\beta\colon[0,1]\to\mathbb{C}$，定数 $\varepsilon_0,\varepsilon_1\in\{\pm1\}$ と C^1 級微分同相写像 $\varphi\colon[a,b]\to[a,b]$ 及び 同相写像 $\psi\colon[c,d]\to[c,d]$ が存在して，以下が成り立つ：

$[a,b]$ 上 $|\kappa|=1$ であり，$[c,d]$ 上では κ は定数である。また $[c,d]$ 上で $|\beta|=1$ であり，さらに

$$S(f)(t)=S(0)(t)+\kappa(t)[f(\varphi(t))]^{\varepsilon_0}\qquad(\forall f\in C^1([0,1]),\forall t\in[a,b]),$$

$$(S(f))'(t)=(S(0))'(t)+\beta(t)[f(\psi(t))]^{\varepsilon_0\varepsilon_1}\qquad(\forall f\in C^1([0,1]),\forall t\in[c,d])$$

となる。ただし $[f(s)]^{\varepsilon}$ は，$s\in[0,1]$ 及び $\varepsilon\in\{\pm1\}$ に対して

$$[f(s)]^{\varepsilon}=\begin{cases}f(s) & \mathit{if}\ \varepsilon=1,\\ \overline{f(s)} & \mathit{if}\ \varepsilon=-1\end{cases}$$

と定める.

もしさらに $a < b$ ならば, $\varepsilon_1 = 1$ であり, $[a,b] \cap [c,d]$ 上 $\varphi = \psi$ が成り立ち, さらに定数 $\gamma \in \{\pm 1\}$ が存在して

$$\varphi' = \gamma, \quad \beta = \kappa\gamma \quad on \quad [a,b] \cap [c,d].$$

をみたす。

参考文献

[1] S. Banach, *Theory of linear operations*, Dover Books on Mathematics, 2009.

[2] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on spaces of differentiable vector-valued functions*, Studia Math. **192** (2009), 39–50.

[3] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. **25** (1964-1965) 217–225.

[4] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators. Part I*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[5] A.J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 381–385.

[6] R. Fleming and J. Jamison, *Isometries on Banach spaces: function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. 129, Boca Raton, 2003.

[7] R. Fleming and J. Jamison, *Isometries on Banach spaces Vol. 2. Vector-valued function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. 138, Boca Raton, 2008.

[8] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), 1838–1842.

[9] K. Jarosz and V.D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988), 193–205.

[10] K. Kawamura and T. Miura, *Real-linear surjective isometries between function spaces*, preprint.

[11] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, *Norms on* $C^1([0,1])$ *and their isometries*, preprint.

[12] H. Koshimizu, *Linear isometries on spaces of continuously differentiable and Lipschitz continuous functions*, Nihonkai Math. J. **22** (2011), 73–90.

[13] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **413** (2014) 229–241.

[14] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[15] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math. **9** (2011), 778–788.

[16] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math. **645** (2015), 231–239.

[17] V.D. Pathak, *Isometries of* $C^{(n)}[0,1]$, Pacific J. Math. **94** (1981), 211–222.

[18] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.

[19] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375–481.

[20] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110-7** (2003), 633–635.