

# A multi-items closed supply chain with random demand and returned subassemblies

大阪府立大学大学院 理学系研究科 情報数理科学専攻  
山根 裕貴 (Yuki Yamane), 北條 仁志 (Hitoshi Hohjo)  
Dept. of Mathematics and Information Sciences,  
Graduate School of Science, Osaka Prefecture University

## 1 はじめに

近年、環境への意識や資源枯渇の問題から、企業や組合は環境に配慮したモノづくりが求められており、そのなかでコスト削減や利益増大を目指さなければならない。しかし、環境に配慮したモノづくり、特に使用済み製品の再利用には通常に製品を製造するよりもコストが多くかかる場合が多い。それは中小企業などの小さな規模の会社や工場にとって深刻で、使用済みの製品を回収・再利用を行いながらコスト削減を目指さなければならない。また、不足に対してすぐに対処できない商品を扱う企業にとっては、市場によるどのような需要にも対応できるように、企業は極力無駄のないように在庫を用意しておかなければならない。以上の理由から確率的需要環境下での循環型在庫管理モデルが重要視されている。

再利用とは使用済みの製品を材料や部品として新しい製品に活用することである。再利用工程には回収した製品の品質に応じていくつかの再利用手法が存在する。Tahirov et al.[12]では、異なる3つの再生手法 (Reuse・Recycle・Remanufacturing) で製品を部品に分解・再利用する循環型サプライチェーン在庫管理問題について研究された。Hu et al.[7]では、需要がある確率密度関数に従うサプライチェーンモデルが提案され、確率的需要環境下において期待利得最大化問題を扱った。本稿では、Tahirov et al.[2]に従って再利用手法を複数持ち、複数の部品から構成される製品の需要が不確実であるような循環型サプライチェーン在庫管理問題を提案し、最適な各再利用レベルおよび Market 用部品の在庫水準を決定する。

## 2 モデル

### 2.1 部品の設定

本稿では、販売目的の異なる2つの市場と複数の製造業者を持つ循環型在庫モデルを考える (図1)。本モデルの対象は複数の部品で構成される製品、例えばコピー機、パソコン、車などである。それらの製品や製品の一部であるスペアパーツは使用済みになった後分解・点検し、再利用される。本稿で取り扱う製品およびスペアパーツにはそれぞれ Market と Service という異なる2つの市場が存在する。製品とスペアパーツは複数の部品から構成され、製造業者  $s_i$  は各部品  $i$  ごとに存在する。製品とスペアパーツに必要な部品の数  $(k_{mi}, k_{si})$  は部品  $i$  ごとにそれぞれ異なり、図2で与えられた BOM をもつ。本稿で使用する用語として市場は Market と Service を指し、アイテムは使用済みの製品・スペアパーツ、製品とスペアパーツは各市場に出せる状態のものを、部品は製品やスペアパーツに加工する前のものを表す。

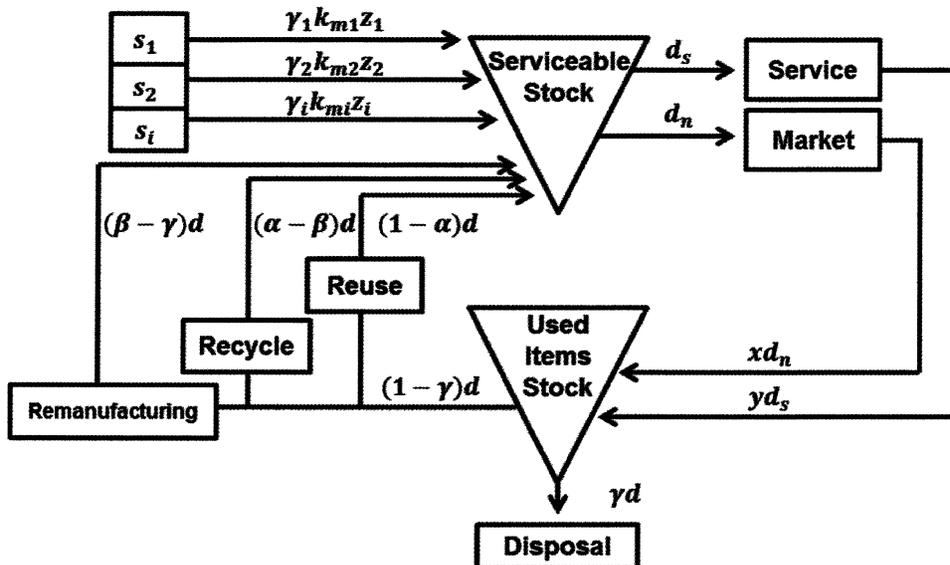


図 1: 循環型サプライチェーンシステム

## 2.2 再利用の設定

本稿では、サイクルのはじめに市場から使用済みアイテムを一定の回収率 (Market に対して  $x$  と Service に対して  $y$ ) で回収し、Used Items Stock に保管される。回収されたアイテムは部品  $i$  ごとに分解され、品質に応じて3つの再利用方法 (Reuse・Recycle・Remanufacturing) で再生できるものと廃棄するものにレベル分けされる。このレベルを区間  $[0, 1]$  で表し、使用不可レベルを 0、未使用レベルを 1 とする。町工場はその中から Reuse レベル  $\alpha_i$ ・Recycle レベル  $\beta_i$ ・Remanufacturing レベル  $\gamma_i$  を決定し、回収した部品  $i$  の再利用方法を考える。再生基準として一定の再利用可能レベル  $l_1, l_2, l_3$  が設けられている (ただし  $l_3 < l_2 < l_1$ )。各再利用レベル  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  は

$$l_1 \leq \alpha_i \leq 1, \quad l_2 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \quad l_3 \leq \gamma_i \leq \beta_i$$

の範囲において決定され、これにより回収アイテムを配分する Reuse・Recycle・Remanufacturing での再利用と廃棄の割合が確定する。Reuse は回収したアイテムの内  $(1-\alpha_i)$ 、Recycle は  $(\alpha_i-\beta_i)$ 、

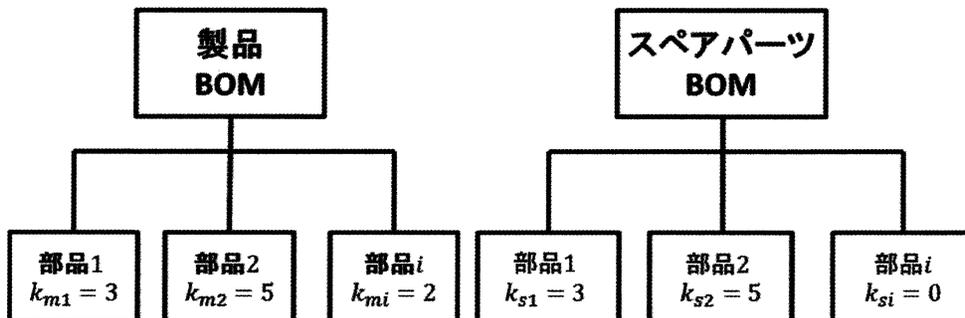


図 2: 製品・スペアパーツ BOM

Remanufacturing は  $(\beta_i - \gamma_i)$ 、廃棄は  $\gamma_i$  の割合で再利用・処理される。そして、再利用された部品は製品とスペアパーツとして加工するために Serviceable Stock に送られる。再利用した製品は新品同然として扱い、次のサイクルで再び製品として販売することができる。再利用とは部品を再び製品やスペアパーツとして使えるようにする過程を、Reuse・Recycle・Remanufacturing はそれぞれ異なる再利用の工程を表す。

## 2.3 需要の設定

本稿では定常過程にある循環型サプライチェーンシステムにおける一サイクルについて考える。第  $n$  サイクルにおいて、2つの市場にはそれぞれ別の需要が発生する。Market 需要  $d_n$  は独立な確率変数で与えられ、各サイクルで独立で同一の分布に従う。また、Service 需要  $d_s$  は既知で一定とする。

意思決定者は製品の需要  $d_n$  を満たすために部品在庫水準  $z_i$  まで製造・再利用し、それらに加えてスペアパーツの需要量  $d_s$  を満たすために部品を製造・再利用する。製造工程において再利用のみでは部品在庫水準  $z_i$  に達しない場合、製造業者  $s_i$  に新しく不足分の部品  $i$  を発注する。在庫不足が起きる  $z_i < k_{mi}d_n$  のとき、不足分を売り損じとして扱い、次の第  $n+1$  サイクルの初めに単位部品当たりペナルティコスト  $p$  を支払う。余剰在庫となる  $z_i \geq K_{mi}d_n$  のとき、次の第  $n+1$  サイクルに余剰在庫  $z_i - k_{mi}d_n$  を持ち越す。

## 3 表記と仮定

### 3.1 仮定

我々が考案した循環型サプライチェーンシステムにおける Used Item Stock と Serviceable Stock の在庫量の推移を図 3, 4 に表す。図 3 で示すように時刻 0 で Market と Service から使用済みアイテムを回収し Used Item Stock に保管する。使用済みアイテムの検査が終わる時刻を  $T_d$ 、Reuse・Recycle・Remanufacturing の各再利用方法で分解・加工が終わる時間をそれぞれ  $T_1, T_2, T_3$  とする。Serviceable Stock に届けられる時刻  $T_1, T_2, T_3, T_0$  はそれぞれ異なる ( $T_1 < T_2 < T_3 < T_0$ )。Market 需要  $d_n$  は正の数であるため、 $d_n$  は  $(0, \infty)$  上で定義された確率密度関数  $f(x)$  をもつ分布に従うと仮定する。検査が終わる時刻  $T_d$  で不要品の廃棄が行われる。本稿での Serviceable Stock は組み立て工場、Used Items Stock は検査・解体・再利用工場であり、それぞれ別の離れた場所に

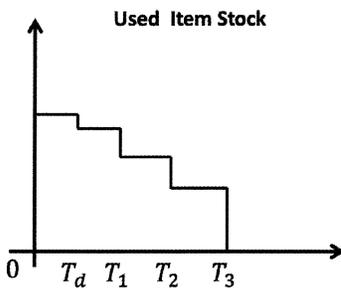


図 3: Used Items Stock

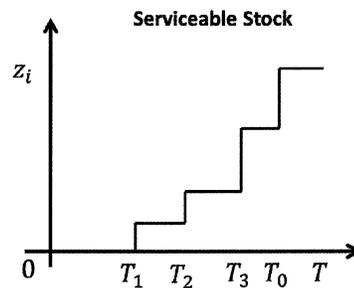


図 4: Serviceable Stock

あり無限のキャパシティを持つと仮定する。本稿での製品需要  $d_n$ ・スペアパーツ需要  $d_s$ ・部品在庫水準  $z_i$  は商品ロットに基づいた数量と仮定する。

### 3.2 表記

本稿において以下の表記法を用いる。

#### 【決定変数】

- $z_i$  : 部品  $i$  の Market 用部品在庫水準  
 $\alpha_i$  : 部品  $i$  の Reuse レベル  
 $\beta_i$  : 部品  $i$  の Recycle レベル  
 $\gamma_i$  : 部品  $i$  の Remanufacturing レベル

#### 【確率変数】

- $d_n$  : 第  $n$  サイクルの Market の製品需要

#### 【表記】

- $i$  : 部品の種類数  
 $j$  : Reuse( $j = 1$ ), Recycle( $j = 2$ ), Remanufacturing( $j = 3$ )  
 $d_s$  : Service の需要 (一定)  
 $x$  : Market 製品の回収率,  $0 < x < 1$   
 $y$  : Service 製品の回収率,  $0 < y < 1$   
 $T$  : サイクル長  
 $T_0$  : 新しく製造した部品の Serviceable Stock への到着時刻  
 $T_j$  : Reuse・Recycle・Remanufacturing で再利用したアイテムの Serviceable Stock への到着時刻  
 $T_d$  : 回収したアイテムの検査が終わる時刻・廃棄時刻  
 $H$  : 1 サイクルの在庫コスト  
 $H_{sm}$  : 部品  $i$  の 1 サイクルの Serviceable Stock の Market 用累積在庫量  
 $H_{ss}$  : 部品  $i$  の 1 サイクルの Serviceable Stock の Service 用累積在庫量  
 $H_{um}$  : 部品  $i$  の 1 サイクルの Used Item Stock の Market 用累積在庫量  
 $H_{us}$  : 部品  $i$  の 1 サイクルの Used Item Stock の Service 用累積在庫量  
 $h_s$  : 部品  $i$  の単位時間当たり単位部品当たりの Serviceable Stock の維持コスト  
 $h_u$  : 部品  $i$  の単位時間当たり単位部品当たりの Used Item Stock の維持コスト  
 $R$  : 部品  $i$  の 1 サイクルの再利用コスト  
 $R_j$  : 部品  $i$  の 1 サイクルの Reuse・Recycle・Remanufacturing にかかるコスト  
 $r_j$  : 部品  $i$  の単位部品当たりの Reuse・Recycle・Remanufacturing コスト  
 $K_j$  : 部品  $i$  の 1 サイクルの Reuse・Recycle・Remanufacturing にかかるセットアップコスト  
 $l_j$  : Reuse・Recycle・Remanufacturing 可能レベル ( $l_3 < l_2 < l_1$ )  
 $O$  : 部品  $i$  の 1 サイクルでかかるオーダーコスト  
 $K$  : 部品  $i$  の 1 サイクルでオーダーにかかるセットアップコスト  
 $c_i$  : 部品  $i$  の単位部品当たりにかかる発注コスト

- $k_{mi}$  : 単位 Market 製品あたりに必要な部品  $i$  の数  
 $k_{si}$  : 単位 Service 製品あたりに必要な部品  $i$  の数  
 $D$  : 部品  $i$  の 1 サイクルの廃棄コスト  
 $d$  : 部品  $i$  の単位部品当たりにかかる廃棄コスト  
 $P$  : 部品  $i$  の 1 サイクルのペナルティコスト  
 $p$  : 部品  $i$  の単位部品当たりにかかるペナルティコスト  
 $c()$  : 目的関数  
 $s()$  : 部品  $i$  に関するコスト関数  
 $f()$  : Market の需要  $d_n$  に従う確率密度関数

指示関数  $I_1(\alpha_i), I_2(\alpha_i, \beta_i), I_3(\beta_i, \gamma_i), I_4(z_i)$  を以下に定義する。関数  $I_1, I_2, I_3$  は各再利用手法を使用するか否かの場合分けを表す。また、関数  $I_4$  は在庫の超過と不足の場合分けを表す。

$$\begin{aligned}
 I_1(\alpha_i) &= \begin{cases} 1, & 1 - \alpha_i > 0 \\ 0, & o.w. \end{cases}, & I_2(\alpha_i, \beta_i) &= \begin{cases} 1, & \alpha_i - \beta_i > 0 \\ 0, & o.w. \end{cases} \\
 I_3(\beta_i, \gamma_i) &= \begin{cases} 1, & \beta_i - \gamma_i > 0 \\ 0, & o.w. \end{cases}, & I_4(z_i) &= \begin{cases} 1, & \frac{z_i}{k_{mi}} \geq d_{n-1} \\ 0, & \frac{z_i}{k_{mi}} < d_{n-1} \end{cases}
 \end{aligned}$$

## 4 モデルのコスト・定式化

本稿では循環型サプライチェーンシステムにおける一サイクルあたりの期待総コストの最小化について考える。この在庫管理問題で扱う総コストは、再利用コスト、オーダコスト、在庫維持コスト、廃棄コスト、ペナルティコストの和で与えられる。コスト関数の期待値を本モデルの目的関数とし、決定変数を在庫水準  $z_i$ 、Reuse レベル  $\alpha_i$ 、Recycle レベル  $\beta_i$ 、Remanufacturing レベル  $\gamma_i$  とする最小化問題として定式化する。以下では、第  $n$  サイクルにおける部品  $i$  に関する様々なコストを計上する。

### 【再利用コスト】

Reuse・Recycle・Remanufacturing の 3 つの方法によって再利用するとき、新品同様の製品レベルにまで再生する必要があり、各工程ごとに異なるコストが生じる。前サイクル (第  $n-1$  サイクル) で余剰が起きた場合と不足が起きた場合で Market に出回る部品の数量が異なる。余剰が起きる  $I_4(z_i) = 1$  の場合、Market に出回る部品の数は  $k_{mi}d_{n-1}$  であり、不足が起きる  $I_4(z_i) = 0$  の場合には在庫レベル  $z_i$  が Market に出回る製品の数となる。

Reuse・Recycle・Remanufacturing によって再利用する際は再利用手法ごとにセットアップコストも支払うので、前節で定義した指標関数  $I_1(\alpha_i), I_2(\alpha_i, \beta_i), I_3(\beta_i, \gamma_i)$  を用いて、

$$\begin{aligned}
 R_1 &= I_1(\alpha_i)K_1 + r_1(1 - \alpha_i)\{x \min(k_{mi}d_{n-1}, z_i) + k_{si}y d_s\} \\
 R_2 &= I_2(\alpha_i, \beta_i)K_2 + r_2(\alpha_i - \beta_i)\{x \min(k_{mi}d_{n-1}, z_i) + k_{si}y d_s\} \\
 R_3 &= I_3(\beta_i, \gamma_i)K_3 + r_3(\beta_i - \gamma_i)\{x \min(k_{mi}d_{n-1}, z_i) + k_{si}y d_s\}
 \end{aligned}$$

となる。サプライチェーンシステムにおける再利用コストは、

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

となる。

【オーダーコスト】

再利用量だけでは部品在庫量  $z_i$  を確保できないので、足りない量を新しく発注する。製品 1 つに対して部品  $i$  が  $k_{mi}$  個必要なので、 $(z_i - (1 - \gamma_i)x\min(k_{mi}d_{n-1}, z_i))$  個の部品を発注する。また、スペアパーツに関しても同様に足りない分の発注を行うので、オーダーコストは

$$O = K + c_i k_{si} (d_s - (1 - \gamma_i) y d_s) + c_i \{z_i - (1 - \gamma_i) x \min(k_{mi} d_{n-1}, z_i)\}$$

となる。

【在庫維持コスト】

本モデルでは、Serviceable Stock と Used Item Stock の在庫について考える必要がある。

(i) Serviceable Stock の Market 用在庫

不足が起きる場合と余剰が起きる場合の在庫推移を図 4、図 6 に与える。各再利用手法により再利用された製品は逐次に Serviceable Stock に配送されるので、Serviceable Stock の Market 用累積在庫量は

$$\begin{aligned} H_{sm} = & I_4(z_i) \{z_i - (1 - \gamma_i) x \min(k_{mi} d_{n-1}, z_i)\} (T - T_0) + (1 - \alpha_i) x \min(k_{mi} d_{n-1}, z_i) (T - T_1) \\ & + (\alpha_i - \beta_i) x \min(k_{mi} d_{n-1}, z_i) (T - T_2) + (\beta_i - \gamma_i) x \min(k_{mi} d_{n-1}, z_i) (T - T_3) \\ & + (z_i - k_{mi} d_{n-1}) T \end{aligned}$$

となる。

(ii) Serviceable Stock の Service 用在庫

Serviceable Stock の Service 用在庫は図 5 のように推移するので、Serviceable Stock の Service 用在庫量は

$$\begin{aligned} H_{ss} = & k_{si} \{d_s - (1 - \gamma_i) y d_s\} (T - T_0) + (1 - \alpha_i) k_{si} y d_s (T - T_1) \\ & + (\alpha_i - \beta_i) k_{si} y d_s (T - T_2) + (\beta_i - \gamma_i) k_{si} y d_s (T - T_3) \end{aligned}$$

である。

(iii) Used Item Stock の Market 用在庫

廃棄する部品を時刻  $T_d$  まで所持するので、図 3 より Used Item Stock の Market 用在庫量は

$$H_{um} = \{\gamma_i T_d + (1 - \alpha_i) T_1 + (\alpha_i - \beta_i) T_2 + (\beta_i - \gamma_i) T_3\} x \min(k_{mi} d_{n-1}, z_i)$$

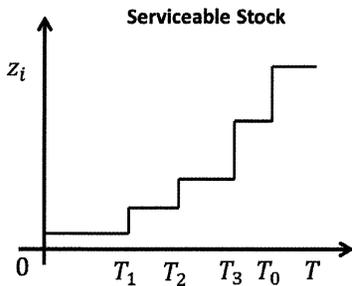


図 5: Service 用 Serviceable Stock

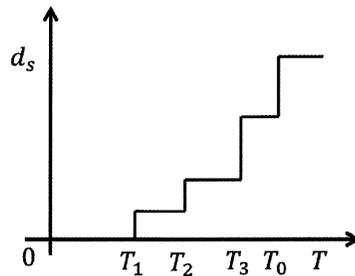


図 6: 余剰時の Market 用 Serviceable Stock

である。

- (iv) Used Item Stock の Service 用在庫  
(iii) と同様に

$$H_{us} = \{\gamma_i T_d + (1 - \alpha_i) T_1 + (\alpha_i - \beta_i) T_2 + (\beta_i - \gamma_i) T_3\} k_{si} y d_s$$

となる。

- (i), (ii), (iii), (iv) より、在庫コストは

$$H = h_s(H_{sm} + H_{ss}) + h_u(H_{um} + H_{us})$$

となる。

#### 【廃棄コスト】

廃棄量に対して単位部品当たり  $d$  のコストを支払うので、廃棄コストは、

$$D = d\gamma_i(x\min(k_{mi}d_{n-1}, z_i) + k_{si}y d_s)$$

となる。

#### 【ペナルティコスト】

不足が生じる場合、不足が出たサイクルの次のサイクルの初めに単位部品当たりコスト  $p$  を支払うと仮定する。従って、ペナルティコストは

$$P = (1 - I_4(z_i))p(k_{mi}d_{n-1} - z_i)$$

となる。

#### 【コスト関数】

以上より、部品  $i$  に関する総コストは

$$s(z_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = R + O + H + D + P$$

となる。これは確率変数である需要を伴う関数である。

#### 【目的関数】

第  $n-1$  サイクルの需要  $d_{n-1}$  は  $(0, \infty)$  上で定義された確率密度関数  $f(x)$  をもつ分布に従うと仮定するので、目的関数は

$$c(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_i \int_0^{\infty} s(z_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) f(d_{n-1}) dd_{n-1}$$

と表現できる。具体的には以下のようになる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) &= \sum_i \int_0^{\frac{z_i}{k_{mi}}} \left( I_1(\alpha_i) K_1 + I_2(\alpha_i, \beta_i) K_2 + I_3(\beta_i, \gamma_i) K_3 + r_1(1 - \alpha_i)(k_{mi}x d_{n-1} + k_{si}y d_s) \right. \\ &\quad \left. + r_2(\alpha_i - \beta_i)(k_{mi}x d_{n-1} + k_{si}y d_s) + r_3(\beta_i - \gamma_i)(k_{mi}x d_{n-1} + k_{si}y d_s) \right) f(d_{n-1}) dd_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c_i\{z_i - (1 - \gamma_i)k_{mi}xd_{n-1}\} + h_s\left[\{z_i - (1 - \gamma_i)k_{mi}xd_{n-1}\}(T - T_0)\right. \\
& + (1 - \alpha_i)k_{mi}xd_{n-1}(T - T_1) + (\alpha_i - \beta_i)k_{mi}xd_{n-1}(T - T_2) + (\beta_i - \gamma_i)k_{mi}xd_{n-1}(T - T_3) \\
& \left. + (z_i - k_{mi}d_{n-1})T\right] + h_u\left[\gamma_i k_{mi}xd_{n-1}T_d + (1 - \alpha_i)k_{mi}xd_{n-1}T_1\right. \\
& \left. + (\alpha_i - \beta_i)k_{mi}xd_{n-1}T_2 + (\beta_i - \gamma_i)k_{mi}xd_{n-1}T_3\right] + d\gamma_i(k_{mi}xd_{n-1} + k_{si}yd_s) f(d_{n-1})dd_{n-1} \\
& + \sum_i \int_0^{\frac{z_i}{k_{mi}}} \left( I_1(\alpha_i)K_1 + r_1(1 - \alpha_i)(xz_i + k_{si}yd_s) + I_2(\alpha_i, \beta_i)K_2 + r_2(\alpha_i - \beta_i)(xz_i + k_{si}yd_s) \right. \\
& \left. + I_3(\beta_i, \gamma_i)K_3 + r_3(\beta_i - \gamma_i)(xz_i + k_{si}yd_s) + c_i\{z_i - (1 - \gamma_i)xz_i\} \right. \\
& \left. + h_s\left[\{z_i - (1 - \gamma_i)xz_i\}(T - T_0) + (1 - \alpha_i)xz_i(T - T_1) + (\alpha_i - \beta_i)xz_i(T - T_2)\right. \right. \\
& \left. \left. + (\beta_i - \gamma_i)xz_i(T - T_3)\right] + h_u\left[\gamma_i xz_i T_d + (1 - \alpha_i)xz_i T_1 + (\alpha_i - \beta_i)xz_i T_2 + (\beta_i - \gamma_i)xz_i T_3\right] \right. \\
& \left. + d\gamma_i(xz_i + k_{si}yd_s) + p(k_{mi}d_{n-1} - z_i) \right) f(d_{n-1})dd_{n-1} \\
& + \sum_i \int_0^{\infty} \left( K + c_i k_{si}\{d_s - (1 - \gamma_i)yd_s\} + h_s\left[k_{si}(d_s - (1 - \gamma_i)yd_s)(T - T_0)\right. \right. \\
& \left. \left. + (1 - \alpha_i)k_{si}yd_s(T - T_1) + (\alpha_i - \beta_i)k_{si}yd_s(T - T_2) + (\beta_i - \gamma_i)k_{si}yd_s(T - T_3)\right] \right. \\
& \left. + h_u\left[\gamma_i k_{si}yd_s T_d + (1 - \alpha_i)k_{si}yd_s T_1 + (\alpha_i - \beta_i)k_{si}yd_s T_2 + (\beta_i - \gamma_i)k_{si}yd_s T_3\right] \right) f(d_{n-1})dd_{n-1}
\end{aligned}$$

この目的関数に対して我々の問題は

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) & \rightarrow \min \\
\text{Subject to } & l_1 \leq \alpha_i \leq 1 \\
& l_2 \leq \beta_i \leq \alpha_i \\
& l_3 \leq \gamma_i \leq \beta_i \quad \text{for all } i \\
& k_{mb}z_a = k_{mb}z_b \quad a \neq b, a, b \in \{1, 2, \dots, i\}
\end{aligned}$$

として定式化される。

## 5 解析

前節で与えられた制約付き非線形計画問題において決定変数  $\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$  についての解析を与える。まず、目的関数  $c(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$  の  $\alpha_i$  に関する偏導関数を求めると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial \alpha_i} & = \{(h_u - h_s)(T_2 - T_1) + r_2 - r_1\} \left[ k_{si}yd_s + \int_0^{\frac{z_i}{k_{mi}}} k_{mi}xd_{n-1}f(d_{n-1})dd_{n-1} \right. \\
& \left. + \int_{\frac{z_i}{k_{mi}}}^{\infty} xz_i f(d_{n-1})dd_{n-1} \right]
\end{aligned}$$

となる。よって与えられた  $\mathbf{z}$  に対して関数  $c(\cdot)$  は  $\alpha_i$  の線形関数である。

**Lemma 1.**

$$A_1 = (h_u - h_s)(T_2 - T_1) + r_2 - r_1$$

とおく。与えられた  $\mathbf{z}$  に対して目的関数  $c(\cdot)$  の値を最小にする最適解  $\alpha_i^*$  は以下ようになる：

$$A_1 > 0 \implies \alpha_i^* = l_1$$

$$\begin{aligned} A_1 = 0 &\implies \alpha_i^* \in [l_1, 1] \\ A_1 < 0 &\implies \alpha_i^* = 1 \end{aligned}$$

次に、目的関数  $c(\cdot)$  の  $\beta_i$  に関する 1 階偏導関数を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \beta_i} = & \{(h_u - h_s)(T_3 - T_2) + r_3 - r_2\} \left[ k_{si} y d_s + \int_0^{\frac{z_i}{k_{m_i}}} k_{m_i} x d_{n-1} f(d_{n-1}) dd_{n-1} \right. \\ & \left. + \int_{\frac{z_i}{k_{m_i}}}^{\infty} x z_i f(d_{n-1}) dd_{n-1} \right] \end{aligned}$$

なので、与えられた  $z$  に対して関数  $c(\cdot)$  は  $\beta_i$  の線形関数である。

**Lemma 2.**

$$A_2 = (h_u - h_s)(T_3 - T_2) + r_3 - r_2$$

とおく。与えられた  $z$  に対して目的関数  $c(\cdot)$  の値を最小にする最適解  $\beta_i^*$  は以下ようになる：

$$\begin{aligned} A_2 > 0 &\implies \beta_i^* = l_2 \\ A_2 = 0 &\implies \beta_i^* \in [l_2, \alpha_i^*] \\ A_2 < 0 &\implies \beta_i^* = \alpha_i^* \end{aligned}$$

さらに、目的関数  $c(\cdot)$  の  $\gamma_i$  に関する 1 階偏導関数について調べる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \gamma_i} = & \{c_i - h_s(T_0 - T_3) - h_u(T_3 - T_d) + d - r_3\} \left[ k_{si} y d_s + \int_0^{\frac{z_i}{k_{m_i}}} k_{m_i} x d_{n-1} f(d_{n-1}) dd_{n-1} \right. \\ & \left. + \int_{\frac{z_i}{k_{m_i}}}^{\infty} x z_i f(d_{n-1}) dd_{n-1} \right] \end{aligned}$$

より、与えられた  $z$  に対して関数  $c(\cdot)$  は  $\gamma_i$  の線形関数である。

**Lemma 3.**

$$A_3 = c_i - h_s(T_0 - T_3) - h_u(T_3 - T_d) + d - r_3$$

とおく。与えられた  $z$  に対して目的関数  $c(\cdot)$  の値を最小にする最適解  $\gamma_i^*$  は以下ようになる：

$$\begin{aligned} A_3 > 0 &\implies \gamma_i^* = l_3 \\ A_3 = 0 &\implies \gamma_i^* \in [l_3, \beta_i^*] \\ A_3 < 0 &\implies \gamma_i^* = \beta_i^* \end{aligned}$$

以上、Lemma 1, 2, 3 より最適解  $\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*$  が求められる。これらの結果から最適レベル  $\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*$  は決定変数  $z_i$  とは独立であることが示された。次に、目的関数  $c(z_i, \alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*)$  の最小化問題を解く。目的関数  $c(\cdot)$  の  $z_i$  に関する 1 階偏導関数について調べる。目的関数  $c(z, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$  を  $z_i$  について偏微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial z_i} = \int_0^{\frac{z_i}{k_{m_i}}} F_1 f(d_{n-1}) dd_{n-1} + \int_{\frac{z_i}{k_{m_i}}}^{\infty} F_2(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) f(d_{n-1}) dd_{n-1}$$

となる。そこで、

$$\begin{aligned}
 F_1 &= h_s(2T - T_0) \\
 F_2(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) &= r_1(1 - \alpha_i^*)x + r_2(\alpha_i^* - \beta_i^*)x + r_3(\beta_i^* - \gamma_i^*)x + c_i(1 - (1 - \gamma_i^*)x) \\
 &\quad + h_s\{(1 - (1 - \gamma_i^*)x)(T - T_0) + (1 - \alpha_i^*)x(T - T_1) \\
 &\quad + (\alpha_i^* - \beta_i^*)x(T - T_2) + (\beta_i^* - \gamma_i^*)x(T - T_3)\} \\
 &\quad + h_u\{r_i x T_d + (1 - \alpha_i^*)x T_1 + (\alpha_i^* - \beta_i^*)x T_2 + (\beta_i^* - \gamma_i^*)x T_3\} + d\gamma_i^* x - p
 \end{aligned}$$

である。

**Lemma 4.**  $F_2(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \geq 0$  ならば、最適政策は部品を新規発注をしないことである。

**Proof.**  $F_2(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \geq 0$  とする。仮定より、 $F_1 > 0$  かつ非積分関数がともに非負の値をとるので、明らかに  $\frac{\partial c}{\partial z_i} > 0$  である。

今、 $F_2(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) < 0$  であると仮定する。

$$\begin{aligned}
 \lim_{z_i \rightarrow +0} \frac{\partial c}{\partial z_i} &= F_2 < 0 \\
 \lim_{z_i \rightarrow \infty} \frac{\partial c}{\partial z_i} &= F_1 > 0
 \end{aligned}$$

であり、関数  $c(\cdot)$  は連続であるので、 $\frac{\partial c}{\partial z_i} = 0$  となる  $z_i$  が少なくとも1つ存在する。

$\frac{\partial c}{\partial z_i} = 0$  を解くと、

$$F\left(\frac{z_i}{k_{m_i}}\right) = \frac{-F_2}{F_1 - F_2}$$

を得る。関数  $F\left(\frac{z_i}{k_{m_i}}\right)$  は累積分布関数であるので、定数  $\frac{-F_2}{F_1 - F_2}$  が  $(0, 1)$  上であれば、極値が唯一存在する。また、

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z_i^2} = \frac{F_1 - F_2}{k_{m_i}} f\left(\frac{z_i}{k_{m_i}}\right) > 0$$

より  $c(z, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$  は  $z_i$  に関して狭義凸関数であるということがわかる。よって、極小値  $z_i^*$  で  $c(z_i, \alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*)$  は最小となる。

**Theorem 1.** 与えられた  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$  に対して  $0 < \frac{-F_2}{F_1 - F_2} < 1$  を満たすならば、最適政策は

$$z_i^* = k_{m_i} F^{-1}\left(\frac{-F_2}{F_1 - F_2}\right)$$

であるように部品を発注することである。

## 6 数値例

数値例として以下のパラメータを用いる。 $d_{n-1}$  は平均 20、標準偏差 3 の右側正規分布に従うと仮定する。 $i = 3, d_s = 10, x = 0.2, y = 0.5, T = 8, T_0 = 7, T_1 = 4, T_2 = 5, T_3 = 6, T_d = 2, h_s =$

$1, h_u = 1.5, r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4, K = 1, K_1 = 1, K_2 = 1, K_3 = 1, l_1 = 0.7, l_2 = 0.5, l_3 = 0.3, c_1 = 3, c_2 = 3, c_3 = 3, k_{m1} = 3, k_{m2} = 5, k_{m3} = 2, k_{s1} = 3, k_{s2} = 5, k_{s3} = 0, d = 3, p = 8.$

最適解  $z^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$  は

$$z^* = \begin{pmatrix} 50.138 \\ 83.563 \\ 33.425 \end{pmatrix}, \alpha^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma^* = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix},$$

となり、期待総コスト  $c(z^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$  は 2334.46 となる。

これは回収したアイテムのうち 70% を Remanufacturing で再利用、残りを廃棄し、部品在庫水準  $z^*$  だけ（製品約 17 個分）準備しておくこと、トータルコストを 2334.46 に抑えることができることを示している。

## 7 まとめ

本稿では、販売目的の異なる 2 つの市場と複数の製造業者および 3 つの再利用方法を持つ循環型在庫モデルを考え、不確実な需要に対する在庫レベルと使用済み製品の再利用方法と再利用量を決定した。本モデルでは、製品を再利用する際、複数ある再利用方法とその再利用での使用済み製品の再利用する量を考慮した。製造業者は環境への配慮やコスト減のためにいくつかの再利用に対する処理を行わなければならない。また、複数の部品からなる製品やそのスペアパーツを考慮する複数アイテムでの在庫管理問題について取り組んだ。本稿においては、製品の不足時に、不足分を売り損じとして処理する場合について解析することができた。今後の課題として、不足分を次のサイクルに持ち越しバックログとして扱う場合について取り組むことを考えている。

## 参考文献

- [1] Bazan,E., M.Y.Jaber, S.Zanoni (2016) A review of mathematical inventory models for reverse logistics and the future of its modeling: An environmental perspective, Applied Mathematical Modelling 40, 4151-4178.
- [2] El Saadany,A.M.A., M.Y.Jaber (2011) A production/remanufacture model with returns' subassemblies managed differently, International Journal of Production Economics, 133, 119-126.
- [3] Govindan,K., H.Soleimani, D.Kannan (2015) Reverse logistics and closed-loop supply chain: A comprehensive review to explore the future, European Journal of Operational Research 240, 2015, 603-626.
- [4] He,Y., J.Zhang (2008) Random yield risk sharing in a two-level supply chain, International Journal of Production Economics, 112, 769-781.
- [5] Heyman,D.P., M.J.Sobel (1990)Operations Reserch and Management Science Vol.2: Stochastic Models, Elsevier Science Publishers, North-Holland.
- [6] Hu,F., C.C.Lim, Z.Lu (2013) Coordination of supply chain with a flexible ordering policy under yield and demand uncertainty, International Journal of Production Economics, 146, 686-693.

- [7] Hu,F., C.C.Lim, Z.Lu, X.Sun (2013) Coordination in a single-retailer two-supplier supply chain under random demand and random supply with disruption, *discrete dynamics in nature and society*, 2013, 1-12.
- [8] Luo,W., D.Shao, W.Liu, Z.Wang (2016) Coordinating a supply chain with a loss-averse retailer under yield and demand uncertainties, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2016, 1-12.
- [9] Mukhopadhyay,S.K., H.Ma (2009) Joint procurement and production decisions in remanufacturing under quality and demand uncertainty, *International Journal of Production Economics*, 120, 5-17.
- [10] Nikolopoulou,A., M.G.Jerapetritou (2012) Optimal design of sustainable chemical processes and supply chains: A review, *Computers and Chemical Engineering* 44, 94-103.
- [11] Schrady,D.A. (1967) A deterministic inventory model for repairable items, *Naval. Research earch Logistics Quarterly* 14 (3), 391-398.
- [12] Tahirov,N., P.Hasanov, M.Y.Jaber (2016) Optimization of closed-loop supply chain of multi-items with returned subassemblies, *International Journal of Production Economics*, 174, 1-10.
- [13] 日本経営工学会編, ものづくりに役立つ経営工学の事典, 朝倉書店 (2014).