

Free Agent 投手獲得に対するポートフォリオ解析

高野 健大*1, 穴太 克則*2

*1: 芝浦工業大学大学院 理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門

*2: 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科

Takehiro Takano*1, Katsunori Ano*2

*1: Graduate School of Engineering and Science, Shibaura Institute of Technology

*2: Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology

概要

あるチームの最適打順に対して「どのように投手リレーすれば被期待得点を最小化できるか?」という最適継投戦略を考える。野球は 25 の状態を持つマルコフ連鎖となっている。それを基にプロ野球の過去データを用い、あるプロ野球チームの期待得点を最大にする打順を求める最適打順決定モデルがある。そのモデルを投手の側から使い、各打者データに対戦する投手に対する対戦データを用いてチームの最適な継投(投手リレー)を求める。

さらに「ある投手を獲得することによりチームとしての 1 試合あたりの期待得点がどれほど変化するのか? また、誰を獲得すべきか?」という Free Agent 投手獲得戦略に対して、ある FA 投手を獲得したときのリターンとリスクによるポートフォリオを作成し分析する。

1 改良型最適打順決定モデル

(1) 盗塁, (2) 得点圏・非得点圏, (3) 併殺も組み込み, その意味でより現実的な改良型最適打順決定モデルを基にする。簡潔に解説する。

1.1 状態

野球における各状態を以下のように定義すると、野球の状態は 25 を吸収状態とする吸収マルコフ連鎖になる。

	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
no out	1	2	3	4	5	6	7	8
one out	9	10	11	12	13	14	15	16
two out	17	18	19	20	21	22	23	24
three out	25							

図 1: 野球の状態

1.2 推移確率行列

状態の推移確率行列 $P = (P_{ij}) = p(j|i)$, $i, j = 1, 2, \dots, 25$ は規則 ([3] 参照) に従い次のようになる。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & H_0 & O_0 \\ O_1 & A_1 & B_1 & H_1 \\ O_2 & O_2 & A_2 & F_2 \\ O_3 & O_3 & O_3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

例えば, A_1 は, ある打者の攻撃で 1 アウトから 1 アウトとなる推移確率行列を表す。

1.3 最適打順算出アルゴリズム

(STEP1) i 番バッター ($i = 1, \dots, 9$) の攻撃に関する推移確率行列を P^i とし、以下とする。

$$P^i = P0^i + P1^i + P2^i + P3^i + P4^i.$$

(STEP2) イニングの始まりの状態と得点を表す行列 U_0 をセットする。

$$U_0 = \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & 25 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

このとき U_0 は、”状態1(ノーアウトランナーなし)で得点0”である確率が1であることを表す。

(STEP3) n 人目の打者終了後の状態(列)と得点(行)を表す行列を U_n とすると、以下の漸化式を満たす。

$$U_{n+1}(j \text{ 行}) = U_n(j \text{ 行})P0^i + U_n(j-1 \text{ 行})P1^i + U_n(j-2 \text{ 行})P2^i + U_n(j-3 \text{ 行})P3^i + U_n(j-4 \text{ 行})P4^i \quad (1.1)$$

(STEP4) U_1 を計算する。 U_0 と (1.1) 式より、

$$U_1(j \text{ 行}) = U_0(j \text{ 行})P0^1 + U_0(j-1 \text{ 行})P1^1 + U_0(j-2 \text{ 行})P2^1 + U_0(j-3 \text{ 行})P3^1 + U_0(j-4 \text{ 行})P4^1$$

を使い、 $U_1(1 \text{ 行})$ から $U_1(21 \text{ 行})$ までを計算し、

$$U_1 = [U_1(1 \text{ 行}), \dots, U_1(21 \text{ 行})]^T \text{ とする。}$$

(STEP5) 以下同様に U_2, U_3, \dots 計算し、各段階で、スリーアウトの状態を表す U_j の 25 列目の総和が 0.99999 を超えたとき、そのイニングの計算を終了し、期待得点数 r を求め、次の打者を先頭打者としてステップ 2 から再度始める。 U_n の 25 列目を

$$R(25) = [x_0, x_1, \dots, x_{20}]^T$$

とすると、そのイニングでの期待得点数 r は、以下で求まる。

$$r = 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + 20 \cdot x_{20}.$$

(STEP6) r_1 を 1 イニング目の期待得点数とすると、1 試合の期待得点数 R は、以下となる。

$$R = r_1 + r_2 + \cdots + r_9.$$

2 最適継投戦略

最適打順決定モデルにおいて各打者の各投手に対する対戦データを使い、最適な継投はどうなるのかを求める。ベンチ入り投手を N 名とすれば、 n 人 ($n = 1, 2, \dots, N$) の投手を使い、そのそれぞれに対して $n!$ 通り ($n = 1, 2, \dots, N$) の交代順列があり、そのそれぞれの交代列に対して、各投手が何回(または、何名の打者に)投げるかの場合がある。すべての場合について以下の最適継投決定アルゴリズムに基づいて被期待得点を計算すれば、被期待得点を最小にするチームの最適継投戦略が得られる。本研究では、膨大な場合の数を制限し、先発投手 1 名、中継ぎ投手 2 名、抑え投手 1 名が投げ、先発投手が 6 イニング、中継ぎ投手 2 名と抑え投手 1 名が、7, 8, 9 回を 1 イニングづつ投げる。という制約のもとで、(条件付) 最適継投戦略をシミュレートする。

2.1 最適継投決定アルゴリズム

(STEP1) 先発投手と中継ぎ投手の選出：

- 球団の投手を先発投手と中継ぎ投手(リリーフ投手)に分ける.
- 各投手の DERA を計算. ※ DERA とは, ある投手が 9 イニングを 1 人で投げたときの被期待得点を表す (DERA は低いほうが良い投手).
- DERA が最も低い先発投手 1 人を選出. DERA が最も低い中継ぎ投手 2 人と抑え 1 人の計 3 名を選出.

(STEP2) 投手と打者の対戦データをセット：

- 対戦する球団の最適打順を構成する 9 名の各打者に対する (先発, 中継ぎ 1, 中継ぎ 2, 中継ぎ 3) の対戦データをセットする.

(STEP3) 被期待得点の計算：

- 中継ぎ投手の継投順の 3! 通りの順列のそれぞれに対して, 最適打順を算出する.
- 被期待得点を計算し, 最小になる継投順を決定する.

3 FA 投手獲得戦略とポートフォリオ解析

FA 投手獲得を加味した場合, 次のようにする (FA 投手が 2 人の場合). $\mathbb{E}[OPO_{FA_1}]$ = FA 投手 1 が加入したときの最適継投による被期待得点, $\mathbb{E}[OPO_{FA_2}]$ = FA 投手 2 が加入したときの最適継投による被期待得点とする. 改良型最適打順決定モデル, 最適継投決定モデルを用いると, FA 投手 1 か FA 投手 2 のどちらを獲得すれば良いかを被期待得点の大小から判断ができる.

3.1 よりチームに貢献する FA 投手は誰かを判定するアルゴリズム

先発投手 1 名, 中継ぎ投手 2 名, 抑え投手 1 名の場合.

1. 球団に残る 3 人の投手の選出, 各投手の推移確率行列を作るための対打者データをセット.
 - ・必要に応じて, (a) 過去 3 ヶ年のデータを使う. (b) 若手選手などには成長度合いを加味してデータを主観的にセットする, などを行う.
2. FA 投手 1, FA 投手 2 の推移確率行列を作るための対打者データをセット.
 - ・必要に応じて, (a) 過去 3 ヶ年のデータを使う. (b) 若手選手などには成長度合いを加味してデータを主観的にセットする, などを行う.
3. FA 投手 1, FA 投手 2 をそれぞれ入れた 4 人の最適継投と期待得点を算出する.
4. $\mathbb{E}[OPO_{FA_1}]$, $\mathbb{E}[OPO_{FA_2}]$ の大小で FA 投手選択をする.

3.2 成長率を加味した FA 投手獲得戦略

FA 投手の年齢や年俸の増減に応じて成長率を主観的に加味した.

- 26 歳～30 歳は 10 % アップ. 年俸が前年度より減少のときは変化なし.
- 31 歳～35 歳は変化なし.
- 36 歳以上は 10 % ダウン. 年俸が前年度より増加のときは変化なし.

3.3 リターン・リスクを加味した FA 投手獲得戦略

投手のリスクとして考えられるのは、成績不振(スランプ)に陥ること、故障(ケガ)してしまうこと等である。これらを次のように指標化する。

- FA 投手 FA_i の次期シーズンの成績変動リスク 1:

FA 投手 FA_i の次期シーズンの DERA を正規分布に従う確率変数 X_i とする。過去 n シーズンの DERA データ $\{DERA_1, DERA_2, \dots\}$ を X_i が従う正規分布からのランダムサンプリング(標本)と考え、成績変動リスクを以下とする。

$$\sigma_{FA_i} = \text{過去 } n \text{ シーズンの DERA の不偏標準偏差.}$$

- 投手 FA_i の次期シーズンの故障リスク:

$$\sigma_{FA_i}^{disabled} = \text{故障日数/シーズン日数} = (\text{過去 } n \text{ シーズンの平均故障期間率})$$

- FA 投手 FA_i の次期シーズンの成績変動リスク 2:

投手 FA_i の DERA の変動過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が Vasicek モデル

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dB_t$$

に従うと仮定し、ボラティリティ $\sigma > 0$ を推定し、これを成績変動リスク 2 とする ($\{B_t\}_{t \geq 0}$ は標準ブラウン運動, a, b は正の定数)。

次のようにラインアップ・ポートフォリオを策定しリターン・リスクフロンティア(後述)を求める。リターンは FA 投手を獲得したときの最適継投による被期待得点とする。

- ラインアップ・ポートフォリオ:

既存の継投順 $\{1, 2, 3, 4\}$ に投手 FA_i が入ったラインアップの集合 $FA_1 = \{1, 2, 3, FA_i\}$ と書く。

ラインアップ	リターン	リスク
FA_1	r_1	σ_{FA_1}
FA_2	r_2	σ_{FA_2}
\vdots	\vdots	\vdots

表 1: ラインアップ・ポートフォリオ

- リターン・リスクフロンティア:

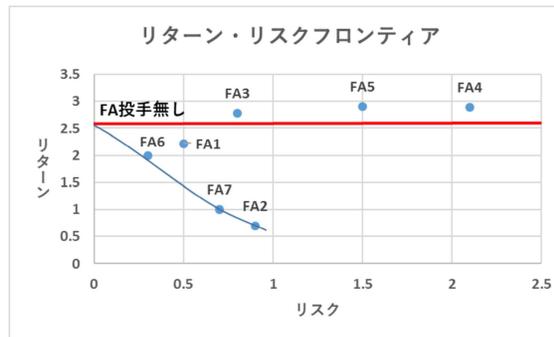


図 2: FA_2, FA_6, FA_7 から選択し獲得

図2より、リターンを固定したときにリスクの小さい選手を獲得するため、曲線状の選手であるFA₂、FA₆、FA₇から選択し獲得するのが良いと判断できる。この曲線をリターン・リスクフロンティアと呼ぶこととする。

4 2015年度日本プロ野球における例

4.1 各球団の最適継投

最適継投決定モデルより選出した投手陣と各球団の最適打順とを対戦させた。最適継投のシミュレーション結果は以下となった。紙面の都合上、巨人の結果のみを掲載している。

1-6回	7回	8回	9回	ヤクルト	阪神	中日	広島	DeNA	被期待得点
菅野	山口	澤村	マシソン	6.278152	4.415936	6.910838	5.776794	3.757308	5.4278056
	マシソン	山口	澤村	6.27755	4.416346	6.897505	5.773357	3.757453	5.4244422
	澤村	マシソン	山口	6.27693	4.388417	6.929087	5.775125	3.757123	5.4253364
	山口	マシソン	澤村	6.278311	4.416085	6.932204	5.776935	3.757133	5.4321336
	澤村	山口	マシソン	6.269904	4.416346	6.917942	5.769099	3.757131	5.4260844
	マシソン	澤村	山口	6.278215	4.388514	6.918043	5.773357	3.757143	5.4230544

表 2: 巨人 vs 最適打順

4.2 コストと期待得点ランク付け

プロ野球 12 球団のコストと期待得点をランク付けした。

順	球団	コスト(万)
3	DeNA	22400
4	中日	22900
2	広島	27450
1	ヤクルト	40380
5	阪神	54800
6	巨人	73500

表 3: セリーグ・コスト

順	球団	期待得点
1	広島	3.8529122
2	DeNA	4.7387874
3	阪神	4.9403008
4	中日	5.2081046
5	巨人	5.4230544
6	ヤクルト	6.5562886

表 4: セリーグ・期待得点

順	球団	コスト(万)
4	ロッテ	33500
5	楽天	35000
3	西武	39150
1	日本ハム	63200
2	オリックス	98000
6	ソフトバンク	132000

表 5: パリーグ・コスト

順	球団	期待得点
1	日ハム	4.1594752
2	西武	4.3139542
3	ロッテ	4.6203008
4	楽天	5.6174366
5	ソフトバンク	5.7655874
6	オリックス	5.7837296

表 6: パリーグ期待得点

4.3 リターン・リスク、成長率を加味した FA 投手獲得戦略

リターン・リスク、成長率を加味した FA 投手獲得戦略を各球団が行ったときの分析を行った。紙面の都合上、ラインアップ・ポートフォリオは巨人の結果のみを掲載している。リターン・リスクフロンティアは巨人と広島の結果を掲載している。

- 成績変動リスク1の場合:

17人のFA投手の過去データからDERAを算出し、それぞれのリスク(不偏標準偏差)を出した。

杉内							
年度	打数	単打	二塁打	三塁打	本塁打	四死球	DERA
2006	498	89	26	0	15	49	4.820942
2007	720	125	29	0	12	51	3.065902
2008	711	112	33	2	15	38	3.105943
2009	682	105	24	2	14	67	3.072879
2010	691	119	35	3	12	68	3.957455
2011	595	89	24	1	8	57	2.695878
2012	574	89	19	2	6	46	2.31206
2013	546	80	21	2	19	55	3.891128
2014	585	96	26	4	18	46	4.17133
2015	355	65	12	2	9	38	4.210261
...						リスク	0.769474208

表 7: 杉内, 成績変動リスク1

- ラインアップ・ポートフォリオ:

紙面の都合上, 巨人の結果のみを掲載している。

FA 投手	リターン	リスク	4人の総年俸	点/1億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
館山	4.6503988	0.429169523	72500	2.039429638	1
山口俊	5.7071232	1.267975374	68500	0.7806544545	1
石川	6.278842	0.377893811	80500	2.2204978	1
山井	8.9765514	1.549236196	72500	2.2204978	1
三浦	9.6830462	1.362205064	73000	0.920649732	1

表 8: FA 投手獲得(先発・巨人)

FA 投手	リターン	リスク	4人の総年俸	点/1億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
浅尾	5.4077052	1.962931976	64800	1.233425067	3
林	5.4191632	7.506586191	59100	1.038119596	4
長田	5.4206004	4.680183113	59500	1.339571768	4
安藤	5.4211322	9.182785878	63200	1.233425067	3
松岡	5.4215574	1.136790635	58600	0.7635008926	3
江草	5.422496	1.688399289	56700	1.338815652	3

表 9: FA 投手獲得(中継ぎ・巨人)

FA 投手	リターン	リスク	4人の総年俸	点/1億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
永川	5.405398	1.769406004	46500	1.825466798	4
岩瀬	5.4179358	1.038548016	46500	0.8644285234	3

表 10: FA 投手獲得(抑え・巨人)

● リターン・リスクフロンティア：

先発

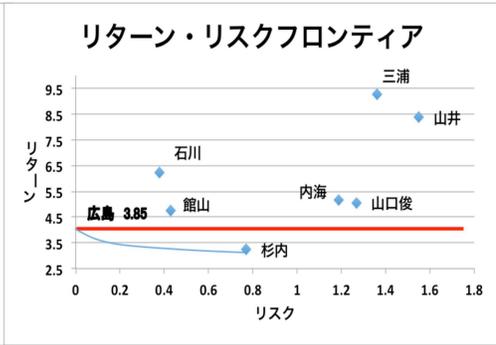
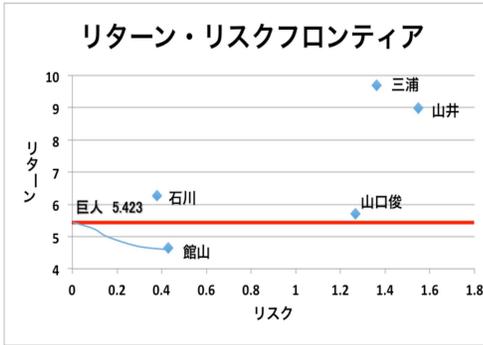


図 3: リターン・リスクフロンティア (巨人)

図 4: リターン・リスクフロンティア (広島)

中継ぎ, 抑え

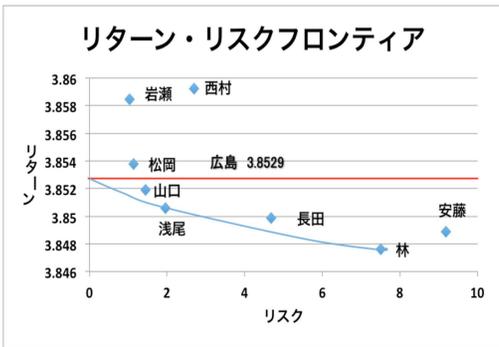
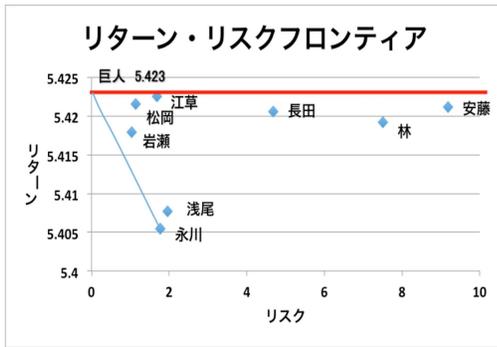


図 5: リターン・リスクフロンティア (巨人)

図 6: リターン・リスクフロンティア (広島)

● 故障リスクの場合:

先ほどと同様の 17 人の FA 投手について年度別に故障期間率を求め、故障リスクを算出した。

年度	故障期間	シーズン日数	故障期間率
2006~2009	0
2010	4/16~5/1(16日間)	3/20~9/29(193日)	0.0829015544
2011~2013	0
2014	6/5~7/13(39日間)	3/28~10/7(193日)	0.20207253886
2015	7/30~8/11(12日間)	3/27~10/6(193日)	0.0621761658
...	...	平均故障期間率	0.03460743801
...	...	リスク	0.03460743801

表 11: 内海, 故障リスク

● ラインアップ・ポートフォリオ:

FA 投手	リターン	リスク	4人の総年俵	点/1億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
館山	4.6503988	0.24741735537	72500	2.039429638	1
山口俊	5.7071232	0	68500	0.7806544545	1
石川	6.278842	0.01756198347	80500	2.2204978	1
山井	8.9765514	0.25671487603	72500	2.2204978	1
三浦	9.6830462	0	73000	0.920649732	1

表 12: FA 投手獲得(先発・巨人)

FA 投手	リターン	リスク	4人の総年俵	点/1億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
浅尾	5.4077052	0.09555785	64800	1.233425067	3
林	5.4191632	0.12809917	59100	1.038119596	4
長田	5.4206004	0.02634298	59500	1.339571768	4
安藤	5.4211322	0.17458678	63200	1.233425067	3
松岡	5.4215574	0.018796992	58600	0.7635008926	3
江草	5.422496	0.17097107438	56700	1.338815652	3

表 13: FA 投手獲得(中継ぎ・巨人)

FA 投手	リターン	リスク	4人の総年俵	点/1億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
永川	5.405398	0.13584711	46500	1.825466798	4
岩瀬	5.4179358	0.13068182	46500	0.8644285234	3

表 14: FA 投手獲得(抑え・巨人)

● リターン・リスクフロンティア:

先発

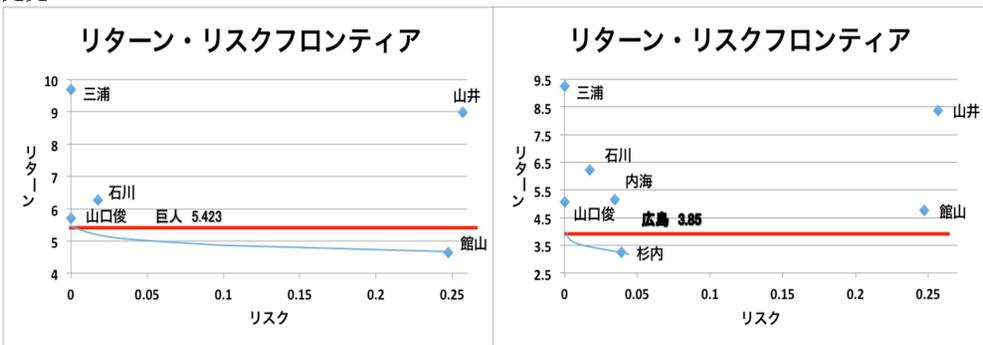


図 7: リターン・リスクフロンティア (巨人) 図 8: リターン・リスクフロンティア (広島)

中継ぎ, 抑え

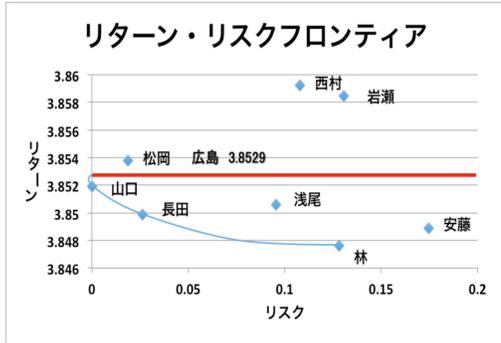
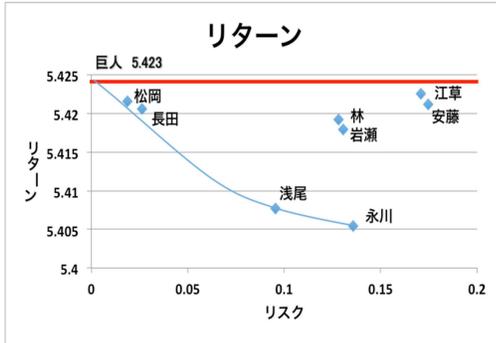


図 9: リターン・リスクフロンティア (巨人) 図 10: リターン・リスクフロンティア (広島)

- 成績変動リスク 2 の場合:

先ほどと同様の 17 人の FA 投手について投手の DERA データが Vasicek モデルに従うと仮定し、ボラティリティ $\sigma > 0$ を推定し、これを成績変動リスク 2 として算出した。

- ラインアップ・ポートフォリオ (巨人):

FA 投手	リターン	リスク	4 人の総年俸	点/1 億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
館山	4.6503988	0.7580409	72500	2.039429638	1
山口俊	5.7071232	2.2314569	68500	0.7806544545	1
石川	6.278842	0.4296371	80500	2.2204978	1
山井	8.9765514	1.616019	72500	2.2204978	1
三浦	9.6830462	1.391573	73000	0.920649732	1

表 15: FA 投手獲得 (先発・巨人)

FA 投手	リターン	リスク	4 人の総年俸	点/1 億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
浅尾	5.4077052	1.8292526	64800	1.233425067	3
林	5.4191632	3.005387	59100	1.038119596	4
長田	5.4206004	3.413447	59500	1.339571768	4
安藤	5.4211322	11.78058	63200	1.233425067	3
松岡	5.4215574	1.561248	58600	0.7635008926	3
江草	5.422496	2.8287529	56700	1.338815652	3

表 16: FA 投手獲得 (中継ぎ・巨人)

FA 投手	リターン	リスク	4 人の総年俸	点/1 億	継投順
巨人	5.4230544	...	73500	1.379194269	...
永川	5.405398	2.8287529	46500	1.825466798	4
岩瀬	5.4179358	0.4056615	46500	0.8644285234	3

表 17: FA 投手獲得 (抑え・巨人)

- リターン・リスクフロンティア:

先発

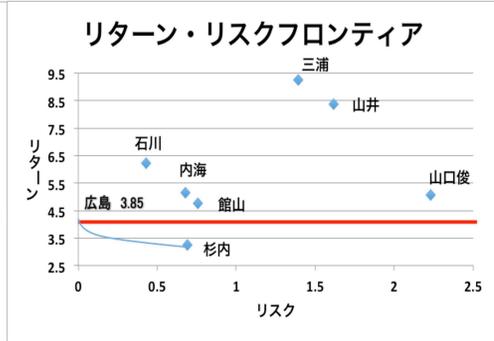
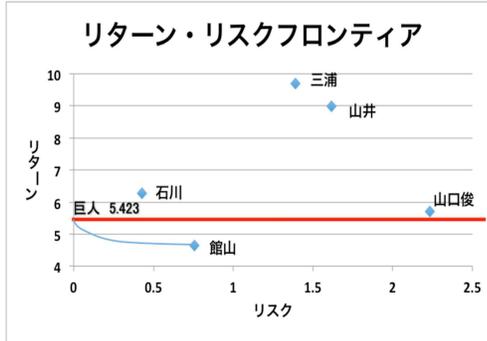


図 11: リターン・リスクフロンティア (巨人)

図 12: リターン・リスクフロンティア (広島)

中継ぎ, 抑え

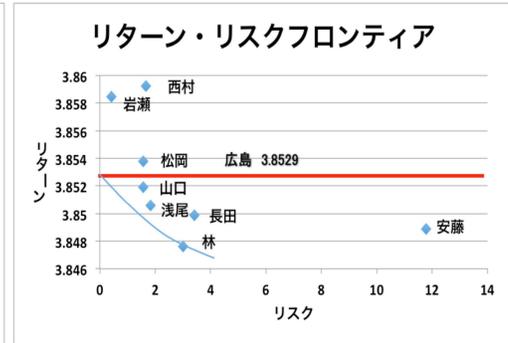
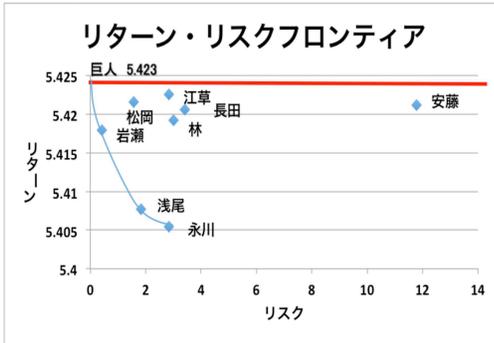


図 13: リターン・リスクフロンティア (巨人)

図 14: リターン・リスクフロンティア (広島)

5 今後の展望

最適継投モデルのシミュレーション結果から、どの球団でも継投によって被期待得点にほとんど差がでないという結果になった。要因の1つとして先発投手の影響が考えられる。先発投手が6イニングを投げているため被期待得点が先発投手に依存する割合が高い。また、先発投手は投球回数が多いため、ある程度の対戦データはあるが、中継ぎ・抑え投手の対戦データは少ない。改善するためには、先発投手の投げる回数を5イニングとし、中継ぎ・抑え投手を4人それぞれ1イニングずつ投げるといったシミュレーションをすれば先発投手の影響を減らせるのではないかと考える。ただし3!通りの継投順が4!通りに増えるためシミュレーションの計算時間が大幅に長くなってしまいが、やってみるべきではあった。また対打者データが少なく、極端な成績の良し悪しにも依存してしまう。このような投手がいるとたった1人の対戦データによって、特定の球団との被期待得点だけ極端に大きいというような結果が出てしまう。今のところ、本稿で提案している最適継投に基づくFA投手獲得方法はお勧めできそうにない。

References

- [1] K. Ano, (2000), “Modified Optimal Batting Order based on Markov Chain”, (2000), The 8th Bellman Continuum on Computation, Optimization and Control, Taiwan.
- [2] K. Ano, (2001), “Modified Offensive Earned-Run Average with steal effect for baseball”, Applied Mathematics and Computations. Vol.120, pp.279-288.
- [3] B. Bukiet, E. Harold and J. L. Palacios, (1997), “A Markov Chain Approach to Baseball”. Operations Reserch, 45, 14-23.
- [4] T. Takano, H. Muto, K. Ano, (2016), “Optimal pitching order for Baseball”, 28th European Conference on Operational Research, pp.10, Poznan.
- [5] 穴太克則, (1998), “マルコフ連鎖に基づく打者評価モデル”, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.1068, pp.45-53.
- [6] 穴太克則, (1999), “併殺を考慮したマルコフ連鎖に基づく投手評価指標とその1997年度日本プロ野球シーズンでの考察”, Nanzan Management Review, Vol.14, No.1 & 2 合併号, pp.215-226.
- [7] 穴太克則, (1999), “併殺を考慮したマルコフ連鎖に基づく投手評価指標とその1997年度日本プロ野球シーズンでの考察”, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1114, pp.114-125.
- [8] 穴太克則, (2012), “マルコフ連鎖に基づく野球選手トレードに対するポートフォリオ戦略解析”, 18-19日 東海大学, 科研費シンポジウム「統計的推測とその応用：正則と非正則」予稿集, 11-20.
- [9] 穴太克則, (2012), “How to choose Free Agent batters? - Introduction to Baseball financial engineering -”, 芝浦工業大学 SIT 総合研究所 佃イノベーションスクエア, 日本 OR 学会「確率最適化モデルとその応用」研究部会.
- [10] 穴太克則, (2016), “野球における最適な打者トレード戦略”, オペレーションズ・リサーチ「経営の科学」第61巻, 第10号, 694-695.
- [11] 穴太克則, 高野健大, (2015), “マルコフ連鎖に基づく最適打順モデルによるFA打者獲得戦略”, 京都大学数理解析研究所講究録, pp.89-96.
- [12] 穴太克則, 高野健大, (2016), “野球の最適打順に対する最適継投戦略の考察”, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 慶應義塾大学, Vol2016, pp. 216-217.
- [13] 瀬古進, 武井貴裕, 穴太克則, (2000), “マルコフ連鎖に基づく併殺と盗塁の効果を加味した最適打順決定のモデリング”, 南山経営研究, 第14巻, 第3号, 425-461.
- [14] 瀬古進, 武井貴裕, 穴太克則, (2002), “野球の最適打順を考えてみよう”, オペレーションズ・リサーチ, 第47巻, 第3号, 142-147.
- [15] 高野健大, (2015), “野球のファイナンシャル・エンジニアリングの研究”, 芝浦工業大学システム理工学部数理科学科卒業論文.
- [16] 武井貴裕, 穴太克則, (2001), “得点圏打率を考慮した最適打順決定モデル：計算結果の検討”, 日本 OR 学会 春季研究発表会, 法政大学.