数理解析研究所講究録
第2048巻 2017年 26-30

ナビエストークス方程式の解の特異点の ベクトルポテンシャルによる特徴付け

シェフィールド大学・数学統計学教室
大木谷 耕司 (Koji Ohkitani)
School of Mathematics and Statistics
The University of Sheffield

I. INTRODUCTION

非圧縮性流体に対する Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{u}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

を $\mathbb{R}^3$ ないし $\mathbb{R}^2$ において考える。初期値は滑らかで有限の全エネルギーをもつとする [6]. 3 次元では、一般の初期値に対して、滑らかな解がすべての時間で存在し続けるか否かは分かっていないが、そうなるための判定基準はいくつか知られている。多くは、エンストロフィー $\|\boldsymbol{u}\|_{H^1}$ や、$\|\boldsymbol{u}\|_{L^p}$ $(p > 3)$ などの亜臨界のノルムも用いるものである。3 次元では、臨界 (即ち、スケール不変な) ノルム $\|\boldsymbol{u}\|_{L^3}$ が爆発の判定基準となることが知られている [3]. その証明は、非常に巧妙な背理法によるもので、大変難しい。一方、2 次元では、Navier-Stokes 方程式の解の大域的正則性はよく知られている。

ここでの研究の動機は以下の通りである。3 次元ではベクトル-ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を、また、2 次元では流れ関数 ψ を用いて、これらの事実の別の証明を与えることを試み、この目標に沿った、いくつかの予備的考察を述べる。標準的な埋め込み

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{BMO}} \le C\|\boldsymbol{u}\|_{L^3} \quad (3\ 次元),$$

ないし

$$\|\psi\|_{\mathrm{BMO}} \le C\|\boldsymbol{u}\|_{L^2} \quad (2\ 次元),$$

を考える。(定数 C は出てくる場所によって、一般に異なる値をとる。) そうすると、3 次元では $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{BMO}}$ が爆発の判定基準となるのか、そして、2 次元では $\|\psi\|_{\mathrm{BMO}}$ が爆発の判定基準となるのかという問題を考えることができる。言い換えると、以下のことを予想としてあげることが出来る:

$$3\ 次元: t = t_* での爆発 \implies t \to t_* の時\ \|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{BMO}} \to \infty$$

および

$$2\text{次元}:\ t=t_*\text{での爆発}\quad\Longrightarrow t\to t_*\ \text{の時}\ \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathrm{BMO}}\to\infty.$$

なお、2 次元流での上の予想が正しければ、エネルギーの不等式からの帰結 $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}<\infty$ により、2次元流の正則性は背理法により直ちに従う。

Koch-Tataru(2001) は、初期の $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{BMO}^{-1}}$ $(\sim\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{BMO}})$ が十分小さければ大域正則解があることを示した [4]。この結果と、本稿での問題の関係を述べておく。3 次元 Navier-Stokes 方程式の解に関する部分正則性の結果は、大きく分けて 2 種類ある。1つは、ある (臨界な) ノルムに関して初期値が十分小さいとき (small data)、大域正則解があると主張する命題である。もう一つは、一般的な初期値 (large data) について、適当なノルムが、爆発の判定基準を与えるという命題である。しばしば、これら2 つのノルムは一致する。例えば、$H^{1/2}$-ノルムや L^3-ノルムが例としてよく知られている。そう考えれば、large data に対する $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{BMO}^{-1}}$ $(\sim\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{BMO}})$ が、判定基準となり得るかどうかを考えるのは自然なことである。なお、[2] では、BMO^{-1} よりも弱いノルムが、爆発の判定基準になり得るかどうかが考察されているが、証明されているのは dichotomy 型の命題だけである。

II. 2次元 NAVIER-STOKES 方程式

2次元流の正則性は既知であるが、臨界である従属変数を用いれば、ある程度、次元に依らない議論を展開することができる事を示すため、あえてこの議論を付け加える。

流れ関数 ψ を用いると, Navier-Stokes 方程式は次のように書くことができる [8]

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nu\triangle\psi=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\times\nabla\psi(\boldsymbol{x}')]\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\nabla\psi(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^4}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}',$$

あるいは、成分表示では

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nu\triangle\psi=\epsilon_{jk}R_iR_j\partial_k\psi\partial_i\psi.$$

もし、$t=t_*$ で爆発が起きならば、関係式 $-\triangle\psi=\omega$ と [1, 5] により粘性項は次の意味で特異になる:

$$\int_0^{t_*}\|\triangle\psi\|_{\mathrm{BMO}}dt=\int_0^{t_*}\|\omega\|_{\mathrm{BMO}}dt=\infty.$$

非線型項に現れる積分変換には、次のような逆変換公式 が成り立つ (証明は略する):

$$\partial_i\psi\partial_k\psi-\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2\delta_{ik}=-\epsilon_{kl}R_iR_l(\psi_t-\nu\triangle\psi)+\frac{1}{2}(\psi_t-\nu\triangle\psi)\epsilon_{ik}.$$

そこで、両辺の BMO ノルムを評価することにより

$$c\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{BMO}}^2\le\left\|\fint(\nabla\psi)^2\right\|_{L^\infty}$$

が得られる。既に知られている判定基準 $\int_0^{t_*} \|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{BMO}}^2 dt = \infty$ [5, 9] を用いると、非線型項も次の意味で特異になることが分かる:

$$\int_0^{t_*} \left\| \fint (\nabla\psi)^2 \right\|_{L^\infty} dt = \infty.$$

しかしながら、線型項、非線型項の両者の寄与が打ち消し合う可能性があるので、左辺の時間微分 $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ も、特異になるか否かは直ちには判断できないことに注意を要する。

III. 3 次元 NAVIER-STOKES 方程式

ベクトル-ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{u} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$), を用いれば、Navier-Stokes 方程式は次のように書ける [7]

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nu\triangle\boldsymbol{A} = \frac{3}{4\pi}\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{r}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}'))\,\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}'))}{|\boldsymbol{r}|^5}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}',$$

ここで $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ である。成分表示では、

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} - \nu\triangle A_i = \epsilon_{kpq} R_j R_k \partial_p A_q (\partial_j A_i - \partial_i A_j)$$

となる。t_* が爆発時刻なら、関係式 $-\triangle\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}$ と [1, 5] により、粘性項は次の意味で特異となる

$$\int_0^{t_*} \|\triangle\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{BMO}} dt = \int_0^{t_*} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathrm{BMO}} dt = \infty.$$

2 次元の場合と同様の反転公式が存在し、それを使えば、爆発があるなら、非線型項も次の意味で、非有界となる:

$$c\int_0^{t_*} \|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{BMO}}^2 dt \le \int_0^{t_*} \left\| \fint (\nabla\boldsymbol{A})^2 \right\|_{L^\infty} dt = \infty.$$

やはり、粘性項、非線型項のキャンセルが起き得るため、時間微分 $\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ が、特異になるか否かは不明である。そこで、両者の競合を考慮するため以下の考察をする。

IV. DUHAMEL 原理

3 次元 Navier-Stokes 方程式を

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\triangle\right)\boldsymbol{A} = \fint (\nabla\boldsymbol{A})^2, \ \equiv \boldsymbol{f}$$

と表せば、これは次のように書き直すことができる:

$$e^{\nu t\triangle}\frac{\partial}{\partial t}e^{-\nu t\triangle}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{f}.$$

すなわち

$$\boldsymbol{A}(t)=e^{\nu t\triangle}\boldsymbol{A}(0)+\int_0^t e^{\nu(t-s)\triangle}\boldsymbol{f}(s)ds.$$

右辺第1項(熱方程式の解)は、常に滑らかである。右辺第2項(非線型項からの寄与)を I とおき、あらわに書くと

$$I\equiv\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(4\pi\nu(t-s))^{3/2}}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4\nu(t-s)}\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},s)d\boldsymbol{y}$$

となる。非線型項 $\boldsymbol{f}$ が、特異となる時、上の積分も特異な振る舞いをするかどうかが問題となるが、これを一般的に議論することは難しい。ここでは、例として時空間で等方的な特異点

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},s)\geq\frac{1}{|\boldsymbol{y}|^2+\nu(t-s)}$$

を考えることにする。この場合、上の空間積分を実行すると、それが最大となる点で

$$I=\frac{4\pi}{(4\pi\nu\tau)^{3/2}}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu\tau}\right)\frac{r^2dr}{r^2+\nu\tau}=\frac{1}{2\nu\tau}\left(1-e^{1/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\simeq\frac{0.22}{\nu\tau},$$

ここで $\tau=t-s$, および $\mathrm{Erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-u^2}du$ である。これを、粘性がない場合の $I=\frac{1}{\nu\tau}$ と比較すると、数因子が 0.22 と小さくなっていて粘性拡散効果により特異性が弱められていることがわかる。なお、もう少し詳しく調べると、この例の場合、$t\to t_*$ のとき $\|\boldsymbol{A}\|_{L^\infty}\to\infty$ となることも分かる。

2次元流の場合も、等方的な特異点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},s)\geq\dfrac{1}{|\boldsymbol{y}|^2+\nu(t-s)}$ を考えると、上の積分に対応する寄与は

$$I\equiv\frac{1}{2\nu\tau}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu\tau}\right)\frac{rdr}{r^2+\nu\tau}=\frac{1}{4\nu\tau}e^{1/4}\mathrm{E}_1\left(\frac{1}{4}\right)\simeq\frac{0.34}{\nu\tau}$$

となる。ここで $E_1(x)\equiv\int_x^\infty\frac{e^{-u}}{u}du,\ \ (x>0)$ である。3 次元の場合と比べると、直感に符合して、粘性拡散効果により特異性が弱められる効果は、2次元流より 3 次元流の方が顕著であることに注意する $(0.34>0.22)$。この例においても $t\to t_*$ のとき $\|\psi\|_{L^\infty}\to\infty$ となることを確かめる事ができる。

以上により、時空で等方的な特異点に限れば、$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{BMO}}$, $\|\psi\|_{\mathrm{BMO}}$ が爆発の判定基準となることが分かった。より一般的な形の特異点に関する議論は今後の課題である。

講演では、2次元 Navier-Stokes 方程式に対する、Feynman-Kac 公式を用いた、Cole-Hopf 変換についても報告した。これに関する記述は、別の機会に譲る事にする。

---

[1] J.T. Beale, T. Kato, and A. Majda, "Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations." Commun. Math. Phys. **94** (1984), 61–66.

[2] A. Cheskidov and R. Shvydkoy, "The Regularity of Weak Solutions of the 3D Navier-Stokes Equations in $B^{-1}_{\infty,\infty}$," Arch. Rat. Mech. Anal. **195** (2010), 159–169.

[3] L. Escauriaza, G. Seregin and V. Sverak, "$L_{3,\infty}$-solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness", Russ. Math. Surv. **58** (2003), 211–250.

[4] H. Koch and D. Tataru "Well-posedness for the Navier-Stokes equations," Adv. Math. **157** (2001) 22–35.

[5] H. Kozono and Y. Taniuchi, "Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations." Math. Z. **235** (2000) 173–194.

[6] J. Leray, "Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace," Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[7] K. Ohkitani, "Dynamical equations for the vector potential and the velocity potential in incompressible irrottational Euler flows: a refined Bernoulli theorem." Phys. Rev. E (2015), to appear.

[8] K. Ohkitani, "A miscellany of basic issues on incompressible fluid equations," *Nonlinearity* **21** (2009) T255-T271.

[9] J. Serrin, "The initial value problem for the Navier-Stokes equations." in *Nonlinear problems* (1963), ed. R.E. Langer, 69–98.