数理解析研究所講究録
第2049巻 2017年 109-115

HOROCYCLIC EVOLUTOIDS

東京工業大学理学院数学系　青柢 禎彦
AOTO Yosihiko
Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology

1　序

σ を平面曲線とする．曲線 σ の曲率中心の軌跡を σ の縮閉線と呼んだ．曲線 σ の法線族の包絡線は σ の縮閉線と一致する．ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ を1つ取り固定する．曲線 σ 上の各点において，接線との成す角が α となるように直線をひく．ただし角度は反時計回りを正とする．この直線族の包絡線を **evolutoid** とよぶ ([6], [10] 参照)．Giblin と Warder は論文 [5] において evolutoid の幾何学的性質を特異点論の手法を用いて調べた．

ポワンカレ円板において境界の円周に接する円をホロ円という．泉屋-裴-佐野 [8] はホロ円を直線とみなす幾何学を展開した．このようにして得られる幾何学を**ホロ円的幾何学**とよぶ．本稿ではホロ円的幾何学において evolutoid を定義する．γ を双曲面上の曲線とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ を1つ取り固定する．曲線 γ 上の各点において，接線との成す角が α となるようにホロ円を描く．このホロ円の族の包絡線を **horocyclic evolutoid** とよぶ．本概説は，horocyclic evolutoid の幾何学的性質を特異点論の手法を用いて調べるものである．

2　ホロ円的幾何学

ポワンカレ円板において境界の円周に接する円をホロ円という．ホロ円を直線とみなす幾何学を**ホロ円的幾何学**とよぶ ([8] 参照)．相異なる2点を通るホロ円はちょうど2本あるので，ホロ円的幾何学は結合公理を満たさない．

$\mathbb{R}^3$ 上の擬内積を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{に対し}$$
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

によって定める．3 次元ミンコフスキー空間 $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ を $\mathbb{R}^3_1$ で表す．

双曲面 $H^2_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3_1 \,|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1,\ x_1 \geq 1\}$ は立体射影によりポワンカレ円板と同一視される．

次に $\mathbb{R}^3_1$ 上の擬外積を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{に対し}$$
$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \left(-\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

によって定める．

以下では I によって開区間を表すものとする．

$\gamma : I \to H^2_+$ を単位速度曲線とする．γ の測地的曲率を $\kappa_g(s)$ で表す．$\kappa_g(s)$ は

$$\kappa_g(s) = |\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s)|$$

で与えられる．単位接線ベクトル $\gamma'(s)$ を $\mathbf{t}(s)$ で表す．またベクトル $\mathbf{e}(s)$ を $\mathbf{e}(s) = \gamma(s) \wedge \mathbf{t}(s)$ によって定める．このとき $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ は γ に沿う $\mathbb{R}^3_1$ の擬正規直交枠をなす．擬正規直交枠 $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ に対して次の Frenet-Serret 型の公式

$$\begin{cases} \gamma'(s) &= \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{t}'(s) &= \gamma(s) + \kappa_g(s)\mathbf{e}(s) \\ \mathbf{e}'(s) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) \end{cases}$$

が成り立つ．

$\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．このとき

$$\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) = \mathbf{t}(s)\cos\alpha + \mathbf{e}(s)\sin\alpha, \quad \mathbf{a}_{2,\alpha}(s) = -\mathbf{t}(s)\sin\alpha + \mathbf{e}(s)\cos\alpha$$

とおけば $\{\gamma(s), \mathbf{a}_{1,\alpha}(s), \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)\}$ は γ に沿う $\mathbb{R}^3_1$ の擬正規直交枠となる．高さ関数 $H_\alpha : H^2_+ \times I \to \mathbb{R}$ を

$$H_\alpha(\mathbf{x}, s) := \langle \mathbf{x}, \gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s) \rangle + 1$$

によって定める．また各 $s\in I$ に対して

$$\Gamma_\alpha(s):=\{\mathbf{x}\in H^2_+\,|\,H_\alpha(\mathbf{x},s)=0\}$$

とおくと $\Gamma_\alpha(s)$ はホロ円を表すことがわかる．ホロ円 $\Gamma_\alpha(s)$ は

$$\Gamma_\alpha(s)=\{\gamma(s)+u\mathbf{a}_{1,\alpha}(s)+\frac{u^2}{2}(\gamma(s)+\mathbf{a}_{2,\alpha}(s))\,|\,u\in\mathbb{R}\}$$

とパラメータ表示される．

3 Horocyclic evolutoid の定義

$\gamma:I\to H^2_+$ を単位速度曲線とする．$\alpha\in\mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．このとき各点 $\gamma(s)$ において，曲線 γ とホロ円 $\Gamma_\alpha(s)$ のなす角は α であることがわかる．そこでホロ円の族 $\{\Gamma_\alpha(s)\}_{s\in I}$ の包絡線を **horocyclic evolutoid** とよぶ．とくに $\alpha=\pm\pi/2$ のときを**ホロ円的縮閉線**という．ホロ円的縮閉線は一葉によってはじめて定義された ([7, p. 16], [2, p. 65] 参照)．Horocyclic evolutoid は H_α の判別集合である．H_α の判別集合を $\mathcal{D}_{H_\alpha}$ で表すと

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{H_\alpha}&=\{\mathbf{x}\in H^2_+\,|\,\exists s\in I \text{ s.t. } H_\alpha(\mathbf{x},s)=\frac{\partial H_\alpha}{\partial s}(\mathbf{x},s)=0\}\\&=\{\mathbf{x}\in H^2_+\,|\,\exists s\in I,\ \exists u\in\mathbb{R} \text{ s.t.}\\&\qquad \mathbf{x}=\gamma(s)+u\mathbf{a}_{1,\alpha}(s)+\frac{u^2}{2}(\gamma(s)+\mathbf{a}_{2,\alpha}(s)) \text{ かつ } \sin\alpha+u(\cos\alpha-\kappa_g(s))=0\}\end{aligned}$$

となる．ここで $\cos\alpha\neq\kappa_g(s_0)$ と仮定する．このとき点 s_0 の近傍で定義された H^2_+ 上の曲線 g_α を

$$g_\alpha(s):=\gamma(s)-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\kappa_g(s)}\mathbf{a}_{1,\alpha}(s)+\frac{\sin^2\alpha}{2(\cos\alpha-\kappa_g(s))^2}(\gamma(s)+\mathbf{a}_{2,\alpha}(s))$$

によって定める．曲線 g_α は $\mathcal{D}_{H_\alpha}$ のパラメータ表示を与える．

4 Horocyclic evolutoid の特異点

本節では horocyclic evolutoid の特異点について考察する．

$\alpha\in\mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．ここで

$$\delta_\alpha(s):=2\kappa_g'(s)\sin\alpha-2\kappa_g^2(s)\cos\alpha+\left(3\cos^2\alpha+1\right)\kappa_g(s)-\cos^3\alpha-\cos\alpha$$

と定義する．

注意. もし $\cos\alpha \neq \kappa_g(s)$ ならば [2, p. 60] において定義された不変量 $\delta[0]_1$ および $\delta[0]_2$ について

$$\delta[0]_1(s) = 0 \Longleftrightarrow \delta_\alpha(s) = 0,$$
$$\delta[0]_2(s) = 0 \Longleftrightarrow \delta'_\alpha(s) = 0$$

が成り立つ.

次の命題は芦野-一藁-泉屋の結果の系として得られる ([2, Theorem 5.6] 参照).

命題 4.1. $\cos\alpha \neq \kappa_g(s_0)$ とする. このとき

(i) $g_\alpha : (I, s_0) \to H^2_+$ が正則な写像芽であるための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(ii) $g_\alpha : (I, s_0) \to H^2_+$ が 3/2 カスプに $\mathcal{A}$ 同値であるための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0) = 0$ かつ $\delta'_\alpha(s_0) \neq 0$ が成り立つことである.

5 Horocyclic evolutoid からなる曲面

次にパラメータ α を動かす. 本節では, このとき得られる曲面の特異点について考察する.

$\mathcal{H} : H^2_+ \times \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \alpha, s) := H_\alpha(\mathbf{x}, s)$ によって定める. s をパラメータとする曲面族 $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \alpha, s) = 0$ の包絡面 $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mathcal{H} &= \{(\mathbf{x}, \alpha) \in H^2_+ \times \mathbb{R} \mid \exists s \in I \text{ s.t. } \mathcal{H}(\mathbf{x}, \alpha, s) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}(\mathbf{x}, \alpha, s) = 0\} \\
&= \{(\mathbf{x}, \alpha) \in H^2_+ \times \mathbb{R} \mid \exists u \in \mathbb{R},\ \exists s \in I \text{ s.t.} \\
&\qquad \mathbf{x} = \gamma(s) + u\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{u^2}{2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)) \text{ かつ } \sin\alpha + u(\cos\alpha - \kappa_g(s)) = 0\}
\end{aligned}$$

と表わされる. 平面 $\alpha =$ 定数 による包絡面 $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ の切り口は horocyclic evolutoid である. ここで $\cos\alpha_0 \neq \kappa_g(s_0)$ と仮定する. このとき点 (s_0, α_0) の近傍で定義された $H^2_+ \times \mathbb{R}$ 上の曲面 X を

$$X(s, \alpha) := (\gamma(s) - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \kappa_g(s)}\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{\sin^2\alpha}{2(\cos\alpha - \kappa_g(s))^2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)), \alpha)$$

によって定める. 曲面 X は $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ のパラメータ表示を与える.

5.1 包絡面 $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ の特異点

本節では包絡面 $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ の特異点を調べる.

まず $\cos\alpha_0 \neq \kappa_g(s_0)$ なる場合を考える. 点 (s_0, α_0) を曲面 X の特異点とする. $\delta(s,\alpha) := \delta_\alpha(s)$ とおくと δ の零点集合と曲面 X の特異点集合は一致する. したがって $\delta(s_0,\alpha_0) = 0$ を得る. 特異点 (s_0,α_0) が非退化であるための必要十分条件は $\delta_s(s_0,\alpha_0) \neq 0$ あるいは $\delta_\alpha(s_0,\alpha_0) \neq 0$ が成り立つことである.

包含写像 $H^2_+ \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ により H^2_+ の接空間を $\mathbb{R}^3$ の部分空間とみなす. X に沿う単位ベクトル場 ν を

$$\nu\,(s,\alpha) := \frac{1}{2(\kappa_g(s) - \cos\alpha)\sqrt{\kappa_g^2(s) - 2\kappa_g(s)\cos\alpha + 1}}$$
$$\times \begin{pmatrix} (\sin^2\alpha - 2\,(\kappa_g(s) - \cos\alpha)^2)\mathbf{a}_{2,\alpha}(s,\alpha) + 2(\kappa_g(s) - \cos\alpha)\sin\alpha\mathbf{a}_{1,\alpha}(s,\alpha) + \sin^2\alpha\gamma(s) \\ 2(\kappa_g(s) - \cos\alpha)(\sin\alpha) \end{pmatrix}$$

によって定める. ベクトル場 ν は単位法線ベクトル場を定義する. 芽 (X,ν) : $(\mathbb{R}^2,(s_0,\alpha_0)) \to T_1(H^2_+ \times \mathbb{R})$ ははめ込みであり, したがって $X : (\mathbb{R}^2,(s_0,\alpha_0)) \to H^2_+ \times \mathbb{R}$ は波面芽となる.

[9, Proposition 1.3] により以下の定理を得る.

定理 5.1(A). $\cos\alpha_0 \neq \kappa_g(s_0)$ とし点 (s_0,α_0) を曲面 X の非退化な特異点とする. このとき

(i) $X : (\mathbb{R}^2,(s_0,\alpha_0)) \to H^2_+ \times \mathbb{R}$ がカスプ状曲面に $\mathcal{A}$ 同値であるための必要十分条件は $\delta_s(s_0,\alpha_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(ii) $X : (\mathbb{R}^2,(s_0,\alpha_0)) \to H^2_+ \times \mathbb{R}$ がツバメの尾に $\mathcal{A}$ 同値であるための必要十分条件は $\delta_s(s_0,\alpha_0) = 0$ かつ $\delta_{ss}(s_0,\alpha_0) \neq 0$ が成り立つことである.

$(\mathbf{x}_0,\alpha_0) \in H^2_+ \times \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する. $s_0 \in I$ とする. 芽 $h_{(\mathbf{x}_0,\alpha_0)} : (I, s_0) \to \mathbb{R}$ を $h_{(\mathbf{x}_0,\alpha_0)}(s) := \mathcal{H}(\mathbf{x}_0,\alpha_0,s)$ によって定める. 芽 $\mathcal{H} : (H^2_+ \times \mathbb{R} \times I, (\mathbf{x}_0,\alpha_0,s_0)) \to \mathbb{R}$ は芽 $h_{(\mathbf{x}_0,\alpha_0)}$ の 3 次元開折である.

次に $\cos\alpha_0 = \kappa_g(s_0)$ なる場合を考える. $\sin\alpha_0 = 0$, $\kappa'_g(s_0) \neq 0$ とする. このとき $h_{(\gamma(s_0),\alpha_0)}$ は A_2 型であり, 普遍開折定理 ([4, p. 149] 参照) により $\mathcal{H}$ は $h_{(\gamma(s_0),\alpha_0)}$ の $\mathcal{R}$ 普遍開折となる.

したがって判別集合の一意性 ([4, p. 150] 参照) により以下の定理を得る.

定理 5.1(B). $\cos\alpha_0 = \kappa_g(s_0)$, $\sin\alpha_0 = 0$, $\kappa_g'(s_0) \neq 0$ とする．このとき曲面 $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ は点 $(\gamma(s_0), \alpha_0)$ においてカスプ状曲面となる．

5.2 等位集合

関数 $f : \mathcal{D}_{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$ を $f(\mathbf{x}, \alpha) := \alpha$ によって定める．関数 f の等位集合は horocyclic evolutoid である．本節では，f の等位集合が α によってどのように変化するのかを調べる．

アーノルドの結果 ([1, Theorem 4.3, Corollary 4.5], [3, p. 89] 参照) を適用し以下を得る．

定理 5.2. (A) $\cos\alpha_0 \neq \kappa_g(s_0)$ とする．

(i) $\delta(s_0, \alpha_0) = 0$ かつ $\delta_s(s_0, \alpha_0) \neq 0$ とする．このとき点 $X(s_0, \alpha_0)$ の近くを通る f の等位集合はすべて 3/2 カスプとなる．

(ii) $\delta(s_0, \alpha_0) = \delta_s(s_0, \alpha_0) = 0$, $\delta_{ss}(s_0, \alpha_0) \neq 0$, $\delta_\alpha(s_0, \alpha_0) \neq 0$ とする．点 $X(s_0, \alpha_0)$ を中心にして f の等位集合を動かすとき swallowtail transition が生ずる．

(B) $\cos\alpha_0 = \kappa_g(s_0)$, $\sin\alpha_0 = 0$, $\kappa_g'(s_0) \neq 0$ とする．点 $(\gamma(s_0), \alpha_0)$ を中心にして f の等位集合を動かすとき beaks transition が生ずる．

参考文献

1. Arnol'd, V. I., *Wave front evolution and equivariant Morse lemma*, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 557–582.
2. Ashino, T., Ichiwara, H., and Izumiya, S., *Envelopes of slant lines in the hyperbolic plane*, Note Mat. 35 (2015), 51–67.
3. Bruce, J. W., and Giblin, P. J., *Families of spheres (and circles)*, Singularities (Warsaw, 1985), 85–102, Banach Center Publ., 20, PWN, Warsaw, 1988.
4. Bruce, J. W., and Giblin, P. J., *Curves and singularities*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
5. Giblin, P. J., and Warder, J. P., *Evolving Evolutoids*, Amer. Math. Monthly 121 (2014), 871–889.
6. Hamann, M., *A note on ovals and their evolutoides*, Beiträge Algebra Geom. 50 (2009), 433–441.

7. 一藁 久俊, 双曲平面におけるホロ円の 1 径数族の包絡線について, 北海道大学修士論文, 2008.
8. Izumiya, S., Pei, D., and Sano, T., *Singularities of hyperbolic Gauss maps*, Proc. London Math. Soc. 86 (2003), 485–512.
9. Kokubo, M., Rossman, W., Saji, K., Umehara, M., and Yamada, K., *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. 221 (2005), 303–351.
10. Wunderlich, W., *Über die Evolutoiden der Ellipse*, Elem. Math. 10 (1955), 37–40.