数理解析研究所講究録
第2050巻 2017年 48-56

１９８０年代半ば，米国中西部のモデル理論，そして未来 ... モデル理論賛歌

板井　昌典
東海大学　理学部　情報数理学科

Abstract

筆者のモデル理論研究との関わりを中心に，モデル理論の過去 30 年の進化について解説する．
米国でモデル理論研究を開始する契機を与えて下さった角田譲先生にあらためて感謝いたします．

1　はじめに

モデル理論研究を始めることになったのは「偶然」であった．1983 年 3 月に神戸大学大学院を修了したのち米国の複数の大学院への入学を希望していた．いろいろ曲折はあったが，米国イリノイ大学シカゴ校への入学が決まったのは，1983 年の夏であった．実は，この時点ではモデル理論のことも，その後大変お世話になる John T. Baldwin のことも何も知らない状態であった．振り返ってみれば，1980 年代半ばに米国中西部でモデル理論研究を始めることが出来たのは実に幸運であった．拙稿は，講究録の通常の論文とは異なり，個人史的観点からの「モデル理論」論であり，過去 30 年間のモデル理論発展の全体を網羅しているものでないことを予めお断りしておく．

前置きはこれくらいにして本題に入ろう．

1.1　1980 年代半ばのモデル理論

1983 年 9 月からイリノイ大学シカゴ校 (University of Illinoi at Chicago, UIC と略す) でモデル理論を学ぶことになった．John T. Baldwin の下で学ぶことになったのだが，前述のとおり今から考えれば大変幸運であった．

筆者が UIC でモデル理論を学び始めた頃の状況を一部紹介しよう．

- UIC での最初の Logic Course の教科書は Herbert B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1972 であった．入門書として大変読みやすい教科書である．考えてみれば，数理論理学の「講義」を受講したのは初めてであった．50 分の講義が週 3 回，当時は「クウォーター制」であったので，10 週間であった．毎週「宿題」もあり，基礎をしっかり学ぶにはよく出来たシステムであると思う．
- Baldwin は安定性理論のモノグラフ John T. Baldwin, *Fundamentals of Stability Theory*, Springer, 1988 を執筆中であった．1981 年にヘブライ大学（イスラエル）でモデル理論の「スペシャル・イヤー」があり，Baldwin は安定性理論の最先端の研究をしていた．Shelah は重要な結果を次々と証明しており，そこでの結果を中心にモノグラフにまとめていたのである．安定性理論を学び始めたばかりの筆者には，内容を理解することは難しかったが,「雰囲気」は感じる事が出来た．
- また Pillay の教科書 Anand Pillay, *An introduction to stability theory*, Clarendon P., Oxford, 1983 が出版されたのもこの頃であった．現在は Dover 版により廉価で読めるようになり，歴史の流れを感じるとともに感慨深い．
- Saharon Shelah のモノグラフ *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, North-Holland, 1978 はすでに出版されていたが安定性理論への入門としては大変敷居の高い著書であった．当時本書を「バイブル」とよぶモデル理論研究者が多かった．

2　モデル理論とは

素朴な立場でモデル理論について考える．一階のモデル理論について考え，高階のモデル理論については考えない．また本稿では，無限モデルのみを考える．そもそもモデル理論とは何か，という問いに答えるのは案外難しい．次のように述べるのが一般的であろう．

一階述語論理の言語を $\mathcal{L}$ とする．言語 $\mathcal{L}$ で書かれた文 φ，すなわち自由変数を含まない論理式の集合 T を「理論」という．T に属す全ての文 φ が成立するような $\mathcal{L}$-構造 M を T のモデルという．理論とそのモデルとの関係を研究するのがモデル理論である．

しかし実際は，まず具体的な数学的構造，例えば順序体としての実数 $\mathbb{R}$ や代数的閉体としての複素数 $\mathbb{C}$ があり，それら具体的な数学的構造 M の性質を，一階述語論理の言語 $\mathcal{L}$ で文として記述し，それらの集合，すなわち理論 T を考える．その後で，理論 T のモデル M' を考える．初めに考えた構造 M と，T のモデル M' との関係を研究するのがモデル理論と言えるだろう．

2.1 基本概念

定義 1 (初等同値) $\mathcal{L}$ を言語とする．A, B は $\mathcal{L}$-構造とする．任意の $\mathcal{L}$-文 φ について

$$A \models \varphi \Longleftrightarrow B \models \varphi$$

であるとき，A と B は初等同値であるといい，$A \equiv B$ と書く．

- $A \equiv B$ ということは，A と B の性質を $\mathcal{L}$ の文では区別できないということ．
- A, B の濃度は一階の文では表現できないので，A, B の濃度が異なっていても，$A \equiv$ であることは可能である．

定理 2 (同型ならば初等同値) T を $\mathcal{L}$-理論，A, B を T のモデルとする．

$$A \simeq B \Longrightarrow A \equiv B$$

- A, B が $\mathcal{L}$-構造として同型であれば，文字通りまったく同じ構造と考えられる．
- A, B がまったく同じ構造ならば一階述語論理の文では区別できないのは当然である．

定義 3 (完全な理論) T を $\mathcal{L}$-理論とする．T の任意のモデル $A,\ B$ が初等同値であるとき，T は完全であるという．

- 理論 T が完全ということは，数学的対象の性質を，「一階述語論理」で完全に記述している，ということを意味している．

数学的構造 $\mathbb{M}$ に対して，$\mathbb{M}$ の理論

$$\mathrm{Th}(\mathbb{M}) = \{\varphi : \mathbb{M} \models \varphi,\ \varphi \text{ は } \mathcal{L}\text{-論理式}\}$$

を考えることが出来る．この $\mathrm{Th}(\mathbb{M})$ は完全な理論ではあるが，$\mathcal{L}$-文の集合としての $\mathrm{Th}(\mathbb{M})$ がどのような構造になっているか分からなければ，$\mathrm{Th}(\mathbb{M})$ がどのように $\mathbb{M}$ の性質を完全に記述しているかが分かったことにはならない．例えば，代数的閉体の理論 ACF_p の場合，1) 体である，2) 代数的に閉じている，3) 標数は p であるという 3 つの性質を無限個の文で記述したものであるが，$\mathrm{ACF}_0 = \mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ であり，この $\mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ は完全であり，かつ $\mathcal{L}$-文の集合として，その性質が大変分かりやすい．

さて，「数学的構造の性質を，言語 $\mathcal{L}$ の文で記述する」という観点から離れ，言語 $\mathcal{L}$-文の無矛盾な集合 T を考えたときに，理論 T の性質を表す指標の一つとして，T のモデルの個数（濃度）を考えることが出来る．

定義 4 (T のモデルの個数（濃度）) T を可算な 1 階完全理論，κ を無限基数とする．同型を除いた T の濃度 κ のモデルの個数（濃度）を $\mathrm{I}(T, \kappa)$ と書く．

- $\mathrm{I}(T, \kappa) = 1$ であるとき，κ-範疇的という．
- $\mathrm{I}(T, \kappa) = 1$ ということは，T が濃度 κ の数学的対象の性質を完全に表現していると言える．

2.2 範疇性定理

可算濃度のモデルが同型を除いて 1 つしかない理論として，端点を持たない，稠密な線形順序が有名である．すなわち，線形順序集合としての有理数 $(\mathbb{Q}, <)$ の理論である．この理論が可算範疇的であることは，カントールの往復論法によって証明される．可算範疇的な理論は次の定理によって特徴付けられる．

定理 5 (Ryll-Nardzewski) T を可算な完全理論とする．このとき，T が可算範疇的であるための必要かつ十分な条件は，各自然数 n に対して，理論 T のもとで互いに同値な文 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は有限個しか存在しないことである．

では非可算モデルに関してはどのような性質が成り立つのだろうか．1960 年代半ばに，Morley は，以後のモデル理論研究の方向性を決定する，次の重要な結果を証明した．

定理 6 (Morley 範疇性定理, 1965) ある非可算 κ で $\mathrm{I}(T,\kappa)=1$ ならば，すべての非可算 κ で $\mathrm{I}(T,\kappa)=1$ である: M. Morley, *Categoricity in power*, Trans. of the AMS, 1965

非可算範疇的な理論の例

- ACF_0：標数 0 の代数的閉体の理論
- ACF_p：標数 p の代数的閉体の理論

いずれにしても，標数を特定した代数的閉体の理論である．標数を指定し，代数方程式が解を持つ体であることを主張する理論が，なぜ非可算範疇的であるかは，シュタイニッツの定理による．すなわち，代数的閉体の構造は，素体上の超越次数によって決まってしまうという定理による．

Morley 範疇性定理により，可算な完全理論 T の範疇性に関しては次の可能性がある．

(1) 可算範疇的
(2) 非可算範疇的（$\aleph_1$-範疇的という）
(3) 可算範疇的かつ $\aleph_1$-範疇的（全範疇的という）
(4) 上記のいずれでもない

理論が範疇性を持つということの意味・意義を考えてみる．

- 数学的構造を一階述語論理で記述するという観点に立てば，範疇的な理論の一般論を考察することは意味がある．
- すなわちどのような場合に，理論 T は範疇的になるのだろうか？
- すべてのモデルが互いに，初等同値である「完全な理論」と，同一の無限濃度をもつすべてのモデルは互いに同型である「範疇的な理論」の違いを理解することも意味がある．

2.3 $L_{\omega\omega}$ と $L_{\omega_1\omega}$

ここで一階言語についてもうすこし説明する．通常一階言語では，有限個の論理式 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ に対して，論理積や論理和を考える．すなわち，

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_i,\quad \bigvee_{i=1}^{n}\varphi_i$$

を考える．量化記号 $\forall,\exists$ については，一つの論理式 φ に対して有限個のみ適用する．すなわち，

$$Q_1x_1\cdots Q_nx_n\,\varphi$$

を考える．ただし各 Q_i は $\forall$ または $\exists$ とする．このような操作を許す論理を $L_{\omega\omega}$ と呼ぶ．

可算無限個の論理式 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\cdots$ に対する論理積や論理和を考える．すなわち，

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty}\varphi_i,\quad \bigvee_{i=1}^{\infty}\varphi_i$$

を考える．このような操作を許す論理を $L_{\omega_1\omega}$ と呼ぶ．ただし，$L_{\omega_1\omega}$ において一つの文において量化記号は有限個しか許さない．

一般に言語が豊かになれば，表現力が高まり，数学的対象の性質をより細かく表現できる．したがって，構造 A が与えられたとき，A の性質をより詳しく書き下すことが可能になるので，より「範疇性」に近づくことになる．実際，次の定理が成り立つ．

定理 7 (Scott 同型定理) $\mathcal{L}$ は一階言語．$\mathbb{A}$ は可算 $\mathcal{L}$-構造．このとき $L_{\omega_1\omega}$ の文 φ が存在して，任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathbb{B}$ に対して，

$$\mathbb{B}\models\varphi \Longleftrightarrow \mathbb{B}\simeq\mathbb{A}$$

$L_{\omega\omega}$ では「コンパクト性定理」という強力な定理が成立するが，残念ながら $L_{\omega_1\omega}$ では「コンパクト性定理」は成り立たない．

3 Vaught 予想

一階の理論 T の可算モデルの個数に関しては有名な予想がある．部分解しか知られておらず，また反例が存在すると主張する研究者もいるが反例になっていることはまだ確認されていない．

予想 8 (Vaught 予想) T を完全かつ可算な理論とする．このとき $I(T,\aleph_0) > \aleph_0$ ならば $I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ である．

この予想に関して，重要な結果が 80 年代の初めに得られた．

定理 9 (Shelah, 1984) T を完全かつ可算な ω-安定理論とする．T は Vaught 予想を満たす．すなわち，$I(T,\aleph_0) > \aleph_0$ ならば，$I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ である．

S. Shelah, L. Harrington and M. Makkai, *A proof of Vaught's conjecture for totally transcendental theories*, Israel J. M. 1984

- Vaught 予想が問うているものは，理論 T の可算モデル全体の「空間」（ある種のモジュライ空間）の性質をどう理解するかということである．

3.1 Martin 予想，Strong Martin 予想

筆者が UIC で研究していた内容について簡単に解説したい．

定義 10 T は可算理論，$S(T)$ は可算．$L_{\omega\omega}$ と $\{\bigwedge_{\varphi\in p}\varphi : p \in S(T)\}$ を含む，$L_{\omega_1\omega}$ の最小のフラグメントを $L_1(T)$ とする．

予想 11 (Martin 予想) $\mathrm{I}(T,\aleph_0) < 2^{\aleph_0}$ とする．このとき，T の各可算モデル M に対して，$\mathrm{Th}_{L_1(T)}(M)$ は可算範疇的である．

- T の可算モデルの個数が少なければ，T の各モデルの性質を $L_1(T)$ で完全に記述できる，という考えである．

Martin 予想に関しては 80 年代前半にいくつかの結果が得られていた．

- ω-安定理論が Vaught 予想を満たすことを示した Shelah の証明を読み解くことにより Bouscalen は ω-安定理論が Martin 予想を満たすことを示した．E. Bouscalen, *Martin's Conjecture for ω-stable theories*, Israel J. M. 1984
- C. W. Wagner, *On Martin's Conjecture*, Annals of Math. Logic, 1982

Martin 予想と Vaught 予想に関しては，次の関係が成り立つ．

定理 12 T を可算な完全理論とする．T に対して *Martin* 予想が成り立てば *Vaught* 予想も成り立つ．

Martin 予想より強い次の予想が考えられる．

予想 13 (強 Martin 予想) T は，可算，完全かつ $|S(T)| \leq \aleph_0$．このとき，(1) $\mathrm{I}(T,\aleph_0) < 2^{\aleph}_0$ かつ T の各可算モデル M に対して，$\mathrm{Th}_{L_1(T)}(M)$ は可算範疇的
または，
(2) T は L_1 のなかで $2^{\aleph_0}$ の異なる拡大を持つ．

この予想は次の事を主張している．

- T の可算モデルの個数が少なければ，T の各モデルの性質を $L_1(T)$ で完全に記述できる．
- T が可算モデルを沢山持てば，T を L_1-理論に拡大したとき，異なるものが沢山ある．
- 線形順序に対する強い Martin 予想について，上述の Wagner の論文が議論にしている (1982).

この強 Martin 予想の証明を，Ph.D Thesis のテーマにすることを Baldwin に勧められた．つまり，ω-安定理論について強 Martin 予想が成り立つことを示すことに取り組んだのである．

- ω-安定理論の強 Martin 予想の部分解を 1989 年に証明することが出来て，無事 Ph. D を取得することが出来た．結果はその後 Journal of Symbolic Logic 誌に掲載された．M. I., *On the strong Martin Conjecture*, J. S. L., 1991
- Shelah の Vaught 予想の証明の議論に沿って，$L_1(T)$ で議論している．
- Shelah の定理により，ω-安定理論の可算モデルが沢山存在する理由が特徴付けされる．おおよそ，7 つ程度の場合に分類されるのでそれらを $L_1(T)$-理論で区別する，というのが方針である．

3.2 「分類理論」から「抽象初等クラスの分類理論」へ

ここで Shelah 流のモデル理論の最近の流れについて概観しよう．一階の理論を分類するという研究テーマはその後「抽象初等クラスの分類理論」へと発展している．

言語 L を一つ固定する．K を L-構造のクラスとする．$M, N \in K$ に対し $M \prec_K N$ という二項関係が定義されていて，K と $\prec_K$ が次の A1 から A5 を満たすとき，K を抽象的初等クラスという．

定義 14 (抽象的初等クラス) A1 $M \prec_K N$ ならば $M \subseteq N$ である，すなわち M は N の部分構造．

A2 $\prec_K$ は反射的かつ推移的

A3 $\{A_i : i < \delta\}$ を連続な増加列とする．このとき，

(1) $\bigcup_{i<\delta} A_i \in K$,

(2) 各 $j < \delta$ について $A_j \prec_K \bigcup_{i<\delta} A_i \in K$,

(3) 各 $j < \delta$ について $A_j \prec_K M$ ならば $\bigcup_{i<\delta} A_i \prec_K M$.

A4 $A, B, C \in K$ とする．$A \prec_K C, B \prec_K C$ かつ $A \subseteq B \in K$ ならば $A \prec_K B$ である．

A5 Löwenheim-Skolem 数 $LS(K)$ が存在する．すなわち，$A \subseteq B \in K$ ならば $A \subseteq A' \prec_B$ かつ $|A'| = |A| + LS(K)$ となる $A' \in K$ が存在する．

- S. Shelah, *Classification Theory for Abstract Elementary Classes*, Studies in Logic vol. 18 and 20, Col. Pub. 2009

つまり，言語 L に対して通常の初等クラスが当然持っているべき性質を公理化したものが「抽象初等クラス」である．

上記の Shelah(2009) は 2 巻からなり膨大なページ数である．Baldwin が分かりやすく解説した次の本が水先案内として役に立つ．筆者によるこの本の書評が，日本数学会邦文誌『数学』に掲載されている．

- J. T. Baldwin, *Categoricity* Univ. Lect. Series, vol. 50, Amer. Math. Soc., 2009
- 板井昌典，Categoricity(Baldwin) の書評：『数学』63 巻（2011）2 号，242 − 246

4 話を 1980 年代に戻すと …

ここで話を再び 1980 年代に戻す．現在盛んに研究されているテーマの多くは 1980 年代に起源を見出すことが出来るからである．

- Morley の定理により，$\aleph_1$-理論の性質の研究が飛躍的に発展することになる．$\aleph_1$-理論のモデルの構造を理解するためには，強極小集合と呼ばれる集合の性質を理解することが鍵になることが分かってきた．有名な論文，J. T. Baldwin and A. H. Lachlan, *On strongly minimal sets*, J. S. L. vol. 36(1971), において次の結果が得られた．

  定理 15 (Baldwin-Lachlan) 完全な可算理論 T について，$I(T, \aleph_1) = 1$ かつ $I(T, \aleph_0) > 1$ ならば，$(I, \aleph_0) = \aleph_0$ である．

  その後 1980 年代半ばには，強極小集合 X に作用する階数 3 の群を用いて体を $X \setminus \{a\}$（a は X のある点）に定義するという結果が Hrushovski によって証明された．この結果は後にザリスキー幾何の理論によって利用される．

- 順序極小理論（構造）

  A. Pillay and C. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures I.* , Trans. Amer. Math. Soc. (1986)

  順序極小理論に関する最初の有名な論文である．

  Lou van den Dries, Tame Topology and O-minimal Structures, London Math. Soc. Lecture Note Series 248, 1998

  長らく出版が待たれていた標準的教科書である．Wilkie の結果などを含む「続編」が期待されていたが，出版されないかもしれない．

- 単純理論の爆発的発展まであとわずか

  Saharon Shelah, *Simple Unstable Theories*, Annals of math. Logic 19 (1980)

  Byunghan Kim, *Simple First Order Theories*, Ph. D thesis, University of Notre Dame (1996)

- Hrushovski の登場：Hrushovski の登場により，モデル理論は一変することになる．彼の登場は 1980 年半ばであった．

4.1 実数のモデル理論，複素数のモデル理論

実数体の性質は，実閉体の理論 RCF としてまとめられ，複素数体の性質は，代数的閉体の理論 ACF としてまとめられた．

- 実数体 $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ を理解する：順序体である．奇数次数のどんな代数方程式も解をもつ．0 以外の元は 2 乗すれば正である．
- 実数体の理論は，実閉体 (RCF) の理論として定式化される．RCF：完全，量化記号消去，順序極小理論
- 複素数体 $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$ を理解する：体であり，どんな代数方程式も解を持つ．
- ACF_p（ただし p は 0 または素数）：完全，量化記号消去，非可算範疇的

4.2 強極小構造

定義 16 L を可算言語，M は L-構造とする．M のすべての定義可能部分集合は，有限または補有限であるとき M を強極小構造であるという．

- $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$ は強極小構造
- 強極小構造は非可算範疇性の要
- 強極小構造に対する：Zilber 予想（ある種の性質を持つ強極小構造は，代数的閉体のみ）
- Zilber 予想に対する反例を Hrushovski が構成（1980 年代終わり）

4.3 ザリスキー幾何 Hrushovski, Zilber

- 代数幾何をモデル理論で展開する．アイデアは，1991 年に発表された．この年，シカゴでモデル理論の大きな研究集会が開催された．Wilkie が $\mathbb{R}_{\exp}$ がモデル完全，そして順序極小であることを発表した研究集会であるが，同じ集会で Zilber はザリスキー幾何のアイデアを発表している．
- 代数的閉体上の Zariski 位相が持つ性質 P を，モデル理論的に記述.（代数から幾何へ）
- 強極小構造上 M の「位相」を考え，この位相が性質 P をもてば，M は代数的閉体であることを証明.（幾何から代数へ）
- ザリスキー幾何に関しては，Zilber 予想が成り立つ．
- E. Hrushovski and B. Zilber, *Zariski Goemetries*, J. of AMS, 1996

5 順序極小構造

定義 17 構造 $(M,<,\cdots)$ を考える．M は，順序 $<$ に関して稠密かつ端点がないとする．M のどんな定義可能部分集合も，有限個の開区間と有限個の点の和集合であるとき，構造 M を，順序極小構造と呼ぶ．

- 実数体 $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ は順序極小構造.

定理 18 (Pillay, Steinhorn, Knight) M は順序極小構造，$M \equiv N$．このとき，N も順序極小構造.

5.1 $\mathbb{R}_{\exp}$ は順序極小である

順序極小理論が誕生した 1980 年代には具体例としては，実閉体程度しか知られていなかったが，実数体に解析的関数を付け加えた構造も順序極小になることが次第に明らかになってきた．

J. Dnef and L. van den Dries, *p-Adic and real subanalytic sets*, Ann. Math. 128(1988) 79-138

実数体に指数関数 $\exp(x)$ を付け加えた体が順序極小になるかどうかが次の重要な問題であった．1991 年に次の結果が得られ，大きな話題となった．

定理 19 (Wilkie) $\mathbb{R}_{\exp}$ はモデル完全であり順序極小である．

論文に掲載されたのは 1996 年である．

A. J. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered fields of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function*, J. of the A.M.S., 1996

5.2 Pila-Wilkie 数え上げ定理

$\mathcal{R}$ は $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ の順序極小拡張とする.

定理 20 (Pila-Wilkie, 2006) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ は, $\mathcal{R}$ で定義可能ならば,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $t_0 = t_0(\varepsilon)$ が存在して,
任意の $t \geq t_0$ に対して

$$|X^{\mathrm{trans}}(\mathbb{Q}, t)| \leq t^{\varepsilon}$$

J. Pila and A. J. Wilkie, *The rational points of a definable set*, Duke Math. J., 133, No. 3, 2006, 591-616

- $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ だけでなく, 様々な構造が順序極小になる. 例えば, $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$, $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ などなど $\cdots$. したがって数え上げ定理の適用範囲は非常に広く, 数学の様々な場面で使える, 強力な武となった.

6 「数学の表舞台へ」そして「未来」

何をもって「数学の表舞台」とするかは, 様々な意見があると思われるが, ここでは狭い意味の「数理論理学」や「モデル理論」を超えて, 数論幾何や解析幾何へモデル理論が活躍の場を広げている現状の一端を紹介したい.

6.1 幾何的 Mordell-Lang 予想, Hrushovski

初めは, モデル理論の数論幾何への応用である. 1993 年に発表された当時は, 大変なニュースであった.

定理 21 (幾何的 Mordell-Lang 予想) $k_0 \subset K$: 異なる代数的閉体, A はアーベル多様体, X は A の無限部分多様体. (すべて K 上で定義)

Γ はランク有限な $A(K)$ の部分群かつ Stab_X は有限. このとき (1) または (2) が成り立つ.

(1) $X \cap \Gamma$ は X でザリスキー稠密でない.

(2) A の部分アーベル多様体 B, k_0 上定義されたアーベル多様体 S, S の部分多様体で k_0 上定義されている X_0, さらに B から $S \otimes_{k_0} K$ 上の同型射 h が存在して,

$$X = a_0 + h^{-1}(X_0 \otimes_{k_0} K)$$

E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for function fields*, Jour A.M.S, 1996
Hrushovski のアイデア

- $X \cap \Gamma$ が X で稠密であるときに, k_0 と同型な体および k_0 上定義されている多様体 X_0, さらに X_0 への射 h を, ザリスキー幾何を用いて, モデル理論的に構成してしまう.
- 標数 0 の時は, Buium が微分体の理論を用いて解決
- Hrushovski は, Buium の議論にヒントを得て, ザリスキー幾何を用いて, 正標数, 標数 0 いずれの場合にも使える議論で証明した.
- 現在は, 数論幾何の手法で証明されている.

6.2 Pila の定理 (2011)

順序極小理論の数え上げ定理を使って, J. Pila は次の結果を得た. Hrushovski の幾何的 Mordell-Lang 予想解決に匹敵する大きな結果である.

J. Pila, *O-minimality and the André-Oort conjecture for* $\mathbb{C}^n$, Ann. of Math. 173(2011), 1779-1840

$$\left\{\begin{array}{l} V \subseteq \mathbb{C}^n \text{ 既約多様体} \\ X \subseteq V \text{「特殊点」の部分集合} \\ X \text{ は, 稠密(ザリスキー位相で)} \end{array}\right. \Longrightarrow X \text{ も特殊多様体}$$

- この結果は, André-Oort 予想と呼ばれる数論幾何における重要な予想のの部分解になっている.
- 他の部分解などのように「一般リーマン予想」など他の予想を仮定していない点が画期的であった.

6.3 Pila の定理の証明

証明は，背理法で行う．もの凄く単純化して述べれば以下のようになる．

- Pila-Wilkie 数え上げ定理が，X 上の特殊点の個数の上限を与える．
- 整数論の古典的な結果 (Siegel の定理) から，X 上の特殊点の個数の下限が得られる．
- X 自身が特殊多様体でなければ，

  (上限) < (下限)

  となり矛盾する．よって X は特殊多様体である．

7 解析的ザリスキー幾何

ここで筆者の最近の研究について，若干報告したい．代数幾何のモデル理論としてザリスキー幾何が登場したが，その後ジルバーは解析的構造のモデル理論として，解析的ザリスキー幾何を提唱した．

- 解析的構造のモデル理論を構築したい．
- 代数的閉体上のザリスキー位相はネーター性を持つ．ザリスキー幾何が成功した大きな理由．
- 解析的構造上の位相をモデル理論的に記述することは難しい．
- B. Zilber, *Zariski Geometries, Geometry from Logician's Point of View*, London Math Soc Lect Note Series, 360, 2010
- 発展途上の理論！

7.1 量子トーラスのモデル理論

- M. I, and Boris Zilber,
  Notes on a model theory of a quantum 2-torus T_q^2 *for generic* q, arXive:1503.06045v1, 2015
- モデル理論的手法で量子 2-トーラスを構成し，その $L_{\omega_1 \omega}$-理論が非可算範疇的であること，$L_{\omega \omega}$-理論が超安定であることを示した．

予想 22 量子 2-トーラスは解析的ザリスキー幾何である．

解析的ザリスキー幾何の理論は，まだまだ骨格が定まっておらず，このところ鳴りを潜めている．どのような定義可能集合を閉集合と考えるべきか，候補はあるものの，閉集合が持つべき性質をとらえきれていないのが現状である．

現在は，量子 2-トーラスのある種の自己同型写像の集合の性質を研究している．

8 モデル理論と数学

モデル理論の過去 30 数年の発展の一部を，筆者の視点から概説した．書けなかった内容の多さに改めて気付かされている．本稿を終えるにあたり，最近筆者が気になっていることをいくつか書いてみたい．

8.1 モデル理論は，数学基礎論の一分野なのだろうか

数理論理学では，構文論 (syntax) と意味論 (semantics) がよく対比される．証明論は構文論であり，モデル理論は意味論に属すると考えてよいだろう．数学の基礎を数学的に研究する学問として数学基礎論を捉えるならば，モデル理論は数学基礎論の一分野というよりは，数学基礎論と共通部分をもつ，数学の一分野と考える方が自然なのではないかと考えている．

8.2 モデル理論が「表舞台の数学」の問題解決手法を提供するということの意味は？

本稿では，数論幾何への応用として，Hrushovski の結果や Pila の結果を紹介した．ザリスキー幾何や数え上げ定理が大変重要な役割を果たしている．ただし，ザリスキー幾何にせよ数え上げ定理にせよ，初めから数論幾何の特定の問題を解くために考えられた訳ではない．「表舞台の数学」にも精通し，モデル理論の一般論をどのように応用すればよいかも理解している研究者がいるからこそ大きな結果に結び付いたのではないだろうか．

8.3 $L_{\omega\omega}$ 以外に様々な「ロジック」がある.

本稿では,「一階古典述語論理」のモデル理論について概説した. コンパクト性定理という強力な定理が成り立つからである.

しかし「一階古典述語論理」以外にも,「高階論理」や「無限論理」と呼ばれるロジックが存在する. また排中律を認めない, あるいは制限する論理も可能である. これらの各「ロジック」でモデル理論を考えることが可能である. 最近の動向に関しては, 次の本が参考になる.

D. Marker, *Lectures on infinitary model theory*, Lecture Notes in Logic vol 46, Cambridge Univ. Press, 2016

8.4 未来は ⋯

1980 年代のモデル理論を振り返る作業を行いながら, 改めて感じることは「数学は絶えず進化, 発展している」ということである. これで「終わり」ということはない.

このような流れの中で, 何らかの寄与が出来れば幸せであると 30 数年前に考えていたが, 今も同じ気持ちである. どのような寄与が出来たか, あるいは出来るかに関しては全く自信はないのだが. しかし, いつも前を向いていたい.