数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 1-4

Quiver representations, group characters, and prime graphs

山口大学・教育学部　飯寄信保
Nobuo Iiyori
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Yamaguchi University, Yamaguchi 753-8511, Japan
iiyori@yamaguchi-u.ac.jp

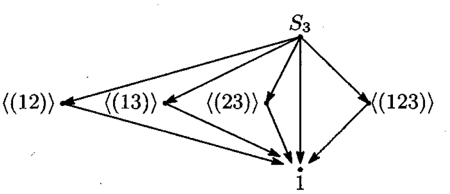
千葉大学・教育学部　澤辺正人
Masato Sawabe
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Chiba University, Chiba 263-8522, Japan
sawabe@faculty.chiba-u.jp

この報告は 2016 年 12 月 5 日（月）に京都大学数理解析研究所で行った講演を再現するものである．講演内容はクイバーの表現に関するイデアル分解と, 有限群の既約指標, 及び有限群の素数グラフに関する一つの考察である．具体的には以下で述べる命題 3.1 の紹介であり, これは論文 [5] のごく一部である．本研究の全体につては [5] を参照されたい．一方, 一連の研究内容, 及びその動機などについては論文 [1, 2, 3, 4, 6, 7] あるいは報告集 [8, 9, 10, 11, 12] をご覧頂きたい．

1　クイバーとその表現

まずは記号の定義などから述べていく．Q を有限クイバーとする．本研究に於いて全ての議論を有限にする必要はないが, 具体的な応用では有限を扱う．通常の様に, Q に対応する頂点集合を Q_0, 矢印の集合を Q_1 とする．

■有限群 G に付随するクイバー Q_G　有限群 G の部分群全体からなる族を $\mathrm{Sgp}(G)$ で表す．ここで G に付随するクイバー Q_G を次のように定義する．即ち, 頂点集合は G の部分群全体 $(Q_G)_0 := \mathrm{Sgp}(G)$ とし, 頂点 $H, K \in (Q_G)_0$ に対して矢印 $(H \to K) \in (Q_G)_1$ は H が K を真に含んでいるときに定めるものとする．例えば 3 次対称群 S_3 に対する Q_{S_3} は次のようになる．



つまり S_3 の部分群を全ての書き並べて, 包含関係に関して大きい方から小さい方に矢印を引くのである．本研究では, 頂点集合 $(Q_G)_0$ を部分群全体 $\mathrm{Sgp}(G)$ としているが, 他の可能性としては, 例えば, p-部分群全体 $\mathcal{S}_p(G)$, ベキ零部分群全体 $\mathcal{N}(G)$, ある素数の集合 π に対するベキ零 π-部分群全体 $\mathcal{N}_\pi(G)$ などが考えられる．あるいは radical p-部分群全体 $\mathcal{B}_p(G)$, さらにはそれらの正規化部分群全体など, その他にも様々な可能性がある．このように考えれば, このクイバー Q_G というのは様々な群複体そのものを扱っていることになる．即ち, Q_G の表現は群複体の表現に相当するのである．また特にベキ零 π-部分群全体からなる複体 $\mathcal{N}_\pi(G)$ は極めて重要であると我々は考えている．その一端は論文 [3, 6, 7] で見ることが出来る．

■R-自由加群を対応させる Q の表現 次に Q の表現 $\mathcal{F}$ を復習する. 可換環 R を係数環とする. 即ち, 各頂点 $a \in Q_0$ に対する $\mathcal{F}_a$ には有限集合を対応させ, 各矢印 $\alpha = (a \to b) \in Q_1$ に対しては R-準同型 $\mathcal{F}_\alpha : R[\mathcal{F}_a] \longrightarrow R[\mathcal{F}_b]$ を対応させるものとする. ここで $R[\mathcal{F}_a]$ は有限集合 $\mathcal{F}_a$ を基底とする R-自由加群とする. さらに $R[\mathcal{F}]$ は付随する graded な R-加群 $R[\mathcal{F}] := \bigoplus_{a\in Q_0} R[\mathcal{F}_a]$ とする. ところで Q の表現といえば, 通常は, 各頂点に対して R-加群そのものを対応させるのであるが, 本研究では, R-自由加群の基底を対応させる表現 $\mathcal{F}$ を考える. このように R-自由加群という特殊な状況ではあるが, この表現に関する一般論を今回は色々と展開した（論文 [5] を参照）. その中の一つとして, ここでは次の命題に着目する.

命題 1.1 (Theorem 3.23 in [5]) 次の三つを仮定する.

- 各頂点 $a \in Q_0$ に対して R-自由加群 $R[\mathcal{F}_a]$ には可換 R-代数の構造が入っている.
- 各矢印 $\alpha = (a \to b) \in Q_1$ に対して $\mathcal{F}_\alpha : R[\mathcal{F}_a] \longrightarrow R[\mathcal{F}_b]$ は R-代数準同形である.
- 次の条件を満足する頂点 $\mathrm{m} \in Q_0$ が存在する. 即ち, 各頂点 $a \in Q_0 \setminus \{\mathrm{m}\}$ に対して m から a への矢印 $(\mathrm{m} \to a) \in Q_1$ が唯一つ存在する.

ここで $\omega := \bigoplus_{a\in Q_0} \mathcal{F}_{(\mathrm{m}\to a)} \in \mathrm{End}(R[\mathcal{F}])$ とおき, さらに $L = \bigoplus_{a\in Q_0} L_a \subseteq R[\mathcal{F}]$ を ω-不変であるような $R[\mathcal{F}]$ の graded なイデアルとする. このとき次の二つは同値である.

(1) $I + J = R[\mathcal{F}]$, $IJ \subseteq L$, $I, J \not\subseteq L$ を満たすような ω-不変イデアル $I, J \subseteq R[\mathcal{F}]$ が存在する.

(2) 上記の特別な頂点 $\mathrm{m} \in Q_0$ に着目し, $\chi_\mathrm{m} + \theta_\mathrm{m} = 1_{R[\mathcal{F}_\mathrm{m}]}$, $\chi_\mathrm{m}\theta_\mathrm{m} \in L_\mathrm{m}$, $\chi_\mathrm{m}, \theta_\mathrm{m} \notin L_\mathrm{m}$ を満たすような要素 $\chi_\mathrm{m}, \theta_\mathrm{m} \in R[\mathcal{F}_\mathrm{m}]$ が存在する.

■命題 1.1 の証明の概略 まず (1) のようなイデアル分解 $R[\mathcal{F}] = I + J$ が存在すれば, χ_m, θ_m として $R[\mathcal{F}]$ の単位元 $1_{R[\mathcal{F}]}$ に対する $R[\mathcal{F}_\mathrm{m}]$ への射影を取れば良いことになる. 逆に (2) のような要素 $\chi_\mathrm{m}, \theta_\mathrm{m} \in R[\mathcal{F}_\mathrm{m}]$ が存在すれば, これらに ω を作用させながら五月雨式に要素を落としていって, それらで生成される単項イデアルを取れば良いことになる.

2 クイバー Q_G の群指標による表現 $\mathcal{M}$

命題 1.1 の応用を考えるために, 群 G に付随するクイバー Q_G（1 節を参照）の表現 $\mathcal{M}$ を次のように定義する. 有理整数環 $\mathbb{Z}$ を係数環とする. 各頂点 $H \in (Q_G)_0 = \mathrm{Sgp}(G)$ は G の部分群であり, この H に対する $\mathcal{M}_H$ には, ある固定された素数 p に対する既約ブラウアー指標全体 $\mathrm{IBr}(H)$ を当てる. さらに各矢印 $(H \to K) \in (Q_G)_1$ に対して, その定義より $H > K$ であることから, $\mathcal{M}_{(H\to K)}$ には指標環の間の制限写像 $\mathrm{Res}^H_K : \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(H)] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(K)]$ $(\varphi \mapsto \varphi|_{K_{p'}})$ を当てることにする.

3 有限群の素数グラフとの関連

上記の表現 $\mathcal{M}$ を命題 1.1 に応用させるために三つの条件を確認する.

- $\mathbb{Z}[\mathcal{M}_H]$ は指標環 $\mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(H)]$ であり, これは可換 $\mathbb{Z}$-代数である.
- 制限写像 $\mathcal{M}_{(H\to K)} = \mathrm{Res}^H_K : \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(H)] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(K)]$ は $\mathbb{Z}$-代数準同形である.
- 特別な頂点 m としては $G \in (Q_G)_0 = \mathrm{Sgp}(G)$ を取ればよい.

ここで対応する ω は

$$\omega := \bigoplus_{H \le G} \Big(\mathcal{M}_{(G\to H)} = \mathrm{Res}^G_H : \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(G)] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(H)] \Big) \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[\mathcal{M}])$$

で与えられる．さらに ω-不変であるような graded なイデアル L の部分群 $H \in (Q_G)_0$ に対応する成分として $L_H := \{\varphi \in \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(H)] \mid \varphi(H^\sharp_{p'}) = \{0\}\}$ を採用する．即ち H の正則指標に相当するイデアルを取る．このとき命題 1.1 を応用して次が成り立つ．

命題 3.1（Theorem 5.19 in [5]）　次の三つは同値である．

(1) $I + J = \mathbb{Z}[\mathcal{M}]$, $IJ \subseteq L$, $I, J \not\subseteq L$ を満たすような ω-不変イデアル $I, J \subseteq \mathbb{Z}[\mathcal{M}]$ が存在する．

(2) $\varphi + \psi = 1_{G_{p'}}$, $\varphi\psi \in L_G$, $\varphi, \psi \notin L_G$ を満たすような $\varphi, \psi \in \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(G)]$ が存在する．

(3) グラフ $\Gamma_p(G)$ は非連結である．

注意 3.2（グラフ $\Gamma_p(G)$）　有限群 G の素数グラフ $\Gamma(G)$ を復習する．即ち，その頂点集合 $V(\Gamma(G))$ は G の位数を割り切る素数全体の集合 $\pi(G)$ である．さらに異なる 2 頂点 $r, q \in V(\Gamma(G))$ を結ぶ辺 $(r - q) \in E(\Gamma(G))$ は位数が rq であるような G の要素が存在するときに定義される．元に戻って命題 3.1 (3) に現れる $\Gamma_p(G)$ というのは $\Gamma(G)$ の部分グラフであり，$\Gamma(G)$ から頂点 p と，さらに p と結ばれている辺を全て取り去ったものである．

■命題 3.1 の証明の概略　まず (1) $\Leftrightarrow$ (2) は命題 1.1 によるクイバーの一般論からの帰結である．

一方 (2) $\Leftrightarrow$ (3) は群の議論を用いて導かれる．実際に $\Gamma_p(G)$ が非連結である仮定する．特に $\Gamma_p(G)$ の頂点集合である $\pi(G) \setminus \{p\}$ は連結成分の和集合として $\pi(G) \setminus \{p\} = \pi_1 \uplus \pi_2$ のように分割される．このとき $G_{p'}$ 上の類関数 $\varphi, \psi : G_{p'} \longrightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める．

$$\varphi(g) = \begin{cases} |G_{\pi_1}| & \text{if } g = e \\ 1 & \text{if } g \in G^\sharp_{\pi_2} \\ 0 & \text{if } g \in G^\sharp_{\pi_1} \end{cases}, \qquad \psi(g) = \begin{cases} 1 - |G_{\pi_1}| & \text{if } g = e \\ 0 & \text{if } g \in G^\sharp_{\pi_2} \\ 1 & \text{if } g \in G^\sharp_{\pi_1} \end{cases}.$$

この φ, ψ が (2) の条件を満足することを確かめるのである．特に φ, ψ が $\mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(G)]$ の要素であることを見るために，いわゆるブラウアーの指標定理のブラウアー指標バージョンを事前に用意しておき，それを用いることになる．逆に (2) のような $\varphi, \psi \in \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(G)]$ が存在すると仮定する．まず $G_{p'}$ がそれぞれのサポートによって $G_{p'} = \{e\} \uplus \mathrm{supp}(\varphi)^\sharp \uplus \mathrm{supp}(\psi)^\sharp$ のように分割されることを見る．ここでサポートとは $\mathrm{supp}(\varphi) := \{x \in G_{p'} \mid \varphi(x) \neq 0\}$ で定めるものとする．このとき $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ なる $\pi_1, \pi_2 \subseteq \pi(G) \setminus \{p\}$ に対して $\mathrm{supp}(\varphi)^\sharp = G^\sharp_{\pi_1}$ かつ $\mathrm{supp}(\psi)^\sharp = G^\sharp_{\pi_2}$ であることを確かめる．これは π_1 に属する素数と，π_2 に属する素数は $\Gamma_p(G)$ 内で結ばれないことを意味する．即ち $\Gamma_p(G)$ は非連結である．以上が証明の概略である．

注意 3.3　最後に以下のコメントを加える．

(1) 着目している素数 p が群 G の位数を割り切らなければ，$\mathrm{IBr}(G) = \mathrm{Irr}(G)$ かつ $\Gamma_p(G) = \Gamma(G)$ が成り立つ．従って，命題 3.1 はクイバーの表現に於けるイデアル分解と，有限群の既約指標，及び有限群の素数グラフとの関連を述べていることになる．

(2) クイバー Q_G に於いては，包含関係に関して大きい部分群から小さい部分群に矢印を引いている．これに小さい方から大きい方へ引く矢印を加えた “Up-Down” の矢印も極めて重要であると我々は考えている．その一端は論文 [1, 2] で見ることが出来る．

(3) 論文 [5] ではクイバー Q_G の表現 $\mathcal{F}$（1 節を参照）に関する一般論が展開されている．さらに，この枠組みを用いて有限群の通常指標とブラウアー指標に関する多くの事柄が統一的に説明されている．そこで $\mathcal{F}$ を介した指標理論の再構築も今後の研究課題になる．

参考文献

[1] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of path algebras with applications to subgroup lattices and group characters, *Tokyo J. Math.* **37**, no.1, (2014), 37–59.

[2] N. Iiyori and M. Sawabe, Simplicial complexes associated to quivers arising from finite groups, *Osaka J. Math.* **52**, no.1, (2015), 161–204.

[3] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups, *Osaka J. Math.* **53** (2016), 731–750.

[4] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of a certain associative algebra, accepted in *Hokkaido Math. J.*

[5] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of quivers with applications to finite groups, preprint version of July 4, 2016.

[6] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of the complex of all non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group, preprint version of December 9, 2016.

[7] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups II, preprint version of December 26, 2016.

[8] 飯寄信保, 澤辺正人, Prime graphs and subgroup lattices of finite groups,
有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, 数理解析研究所講究録 1872, 2014.

[9] 澤辺正人, 有限群の部分群族とパス代数の表現,
第２９回代数的組合せ論シンポジウム（弘前大学）2012, 報告集.

[10] 澤辺正人, 有限群の Up-Down パスから得られる単体複体について,
第３０回代数的組合せ論シンポジウム（静岡大学）2013, 報告集.

[11] 澤辺正人, 複素既約指標の生成定数は 1 である,
第３１回代数的組合せ論シンポジウム（東北大学）2014, 報告集.

[12] 澤辺正人, Subgroup complexes of nilpotent subgroups,
有限群のコホモロジー論とその周辺, 数理解析研究所講究録 1967, 2015.