数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 85-97

Some remarks on the units of a partial Burnside ring

近畿大学大学院総合理工学研究科 *
若竹 昌洋
Masahiro Wakatake
Kindai University Graduate School of Science and Engineering

1 はじめに

有限群から何か環を与え, その構造を調べることでもとの群の構造を調べる手法は昔から使われているが, 特に本報告では有限群から Burnside 環を与え, さらにその単元群を調べることに焦点をあてている. Burnside 環の単元群を調べることでもとの群のどのような構造が分かるかを軽く紹介し, それに関係する新たに得られた結果や, Coxeter 群の Burnside 環の単元群に関して既存のものと, 新たに得られた結果を圏論的なものも交えつついくつか簡単な証明とともに紹介する.

2 記号

とくに注意しない限り, 本報告では以下の意味で各記号を用いる.

G : 有限群
1_G : G の自明な群 (明らかな場合は添え字の G を省略する)
$\mathrm{S}(G)$: G の部分群全体
$\mathrm{C}(G)$: G の部分群の G-共役類全体
$\mathrm{C}(\mathcal{D})$: G の部分群の族 $\mathcal{D}$ の G-共役類全体
H^g : $g^{-1}Hg$ ただし, $H \leq G$, $g \in G$

〒577-8502 大阪府東大阪市小若江 3 − 4 − 1

^gH : gHg^{-1} ただし, $H \leq G$, $g \in G$
(H) : $\{H^g \mid g \in G\}$ ただし, $H \leq G$
$\Omega(G)$: G の Burnside 環
$[X]$: G-集合 X の同型類
$1_{\Omega(G)}$: $\Omega(G)$ の乗法単位元

3 Burnside 環と単元群

本報告では, 自由 $\mathbb{Z}$ 加群として, Burnside 環を記述したほうが分かりやすいので, 次のように Burnside 環を定義する.

定義 3.1. G を有限群とする. このとき G の Burnside 環 $\Omega(G)$ とは, 推移的 G-集合の同型類を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群に, 直積で積をいれたものである. つまり,

$$\Omega(G) = \langle [G/H] \mid (H) \in \mathrm{C}(G) \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

である.

定理 3.2. G を有限群, X, Y を有限 G-集合とする. このとき

$$X \simeq Y \Leftrightarrow |\mathrm{inv}_H(X)| = |\mathrm{inv}_H(Y)| \quad {}^{\forall}H \leq G$$

となる. ここで, $\mathrm{inv}_H(X) := \{x \in X \mid hx = x, \ {}^{\forall}h \in H\}$ である.

各 $H \leq G$ に対し, 写像 $\varphi_H : \Omega(G) \to \mathbb{Z}$ は環準同型となるので, 定理 3.2 は環準同型写像

$$\varphi = \prod_{(H) \in \mathrm{C}(G)} \varphi_H : \Omega(G) \to \widetilde{\Omega}(G) := \prod_{(H) \in \mathrm{C}(G)} \mathbb{Z}$$

が単射であることを意味する. この写像 φ を Burnside 準同型写像, $\widetilde{\Omega}(G)$ を G のゴースト Burnside 環という.

Burnside 準同型写像の単射性より, 次の系を得る.

系 3.3. G を有限群とするとき, $\Omega(G)$ は整数環 $\mathbb{Z}$ の直積環の部分環と同型であり, さらに $\Omega(G)$ の単元群 $\Omega(G)^{\times}$ は基本可換 2-群となる.

これによって Burnside 環の単元群の位数は常に 2 冪となることが分かる. また, [to79] の Problem1.5.2 で述べられている Burnside 環の単元群の位数と有限群の構造と密接に関わっていることがわかる定理を紹介する.

定理 3.4. G を奇数位数の群とする．このとき，G が可解群であるための必要十分条件は，$|\Omega(G)^{\times}| = 2$ となることである．

奇数位数の群が可解群であることは既に Feit と Thompson によって証明されていることは有名であるが，Burnside 環を用いることで，その別証明を与えることが期待される．また，冪零群は可解群であることは簡単に確かめられるが，それについても Burnside 環を用いたいくつかの証明が知られており，そのうちの 1 つを紹介する．

定理 3.5. G を奇数位数の群とする．このとき，

$$\Omega(G)^{\times} \simeq \Omega(G/Z(G))^{\times}$$

となる．

Proof. [Ma82] の定理 4.1 より得られる． □

定理 3.5 を繰り返し使用することによって冪零群 Burnside 環の単元群の位数が 2 となることが簡単にわかる．

有限群 G の Bunside 環の単元群の位数は $|G|$ が大きくなればなるほど難しくなってくる．そこで，研究対象を少しでも小さくするために，Burnside 環の部分環を構成する方法を次の章で述べる．

4 部分 Burnside 環

定義 4.1. G の部分群の族 $\mathcal{D}$ が次の 3 つの条件を満たすものとする．

- $G \in \mathcal{D}$
- $H \in \mathcal{D} \Rightarrow H^g \in \mathcal{D} \quad ({}^{\forall}g \in G)$
- $H, K \in \mathcal{D} \Rightarrow H \cap K \in \mathcal{D}$

このとき，G の $\mathcal{D}$ に関する部分 Burnside 環を，

$$\Omega(G, \mathcal{D}) := \langle [G/H] \mid (H) \in \mathrm{C}(\mathcal{D}) \rangle$$

で定義する．

部分 Burnside 環は Burnside 環の部分環となる．特に $\mathcal{D} = \mathrm{S}(G)$ のとき，部分 Burnside 環と Burnside 環は一致する．

例 4.2. G を有限群とし, N を G の正規部分群とする. このとき,

$$G_N := \{H \leq G | N \leq H\}$$

と置くと, G_N は定義 4.1 の 3 つの条件を満たすので, $\Omega(G, G_N)$ は部分 *Burnside* 環となる.

この例に対する命題を紹介する.

命題 4.3. G を有限群とし, N を G の正規部分群とする. このとき,

$$\Omega(G, \mathcal{D}) \simeq \Omega(G/N)$$

となる.

Proof. 写像 f を G_N から $\mathrm{S}(G/N)$ への自然な全単射とする. このとき,

$$\begin{array}{ccc} \Omega(G, \mathcal{D}) & \longrightarrow & \Omega(G/N) \\ [G/H] & \longmapsto & [(G/N)/f(H)] \end{array}$$

から誘導される写像は環同型写像となる. □

様々な分野で対応定理というものが存在するが, この命題によって Burnside 環においても同様の定理が存在することが確認できる. また, 定義 4.1 の 3 つの条件を満たすものとして代表的なもの, その定理を紹介する.

定理 4.4. G を有限群とし, $\mathrm{NS}(G)$ を G の正規部分群全体とする. このとき, $\mathrm{NS}(G)$ は定義 4.1 の 3 つの条件を満たし, さらに,

$$|\Omega(G, \mathrm{NS}(G))^{\times}| = 2^{\#\{H \leq G \ | \ |G:H| \leq 2\}}$$

となる.

Proof. の定理 4.1 を部分 Burnside 環に拡張することによって得られる. □

これは既存の G が可換群の場合の G の Burnside 環の単元群に関する結果の拡張にもなっており, さらに面白いことに, G が非可換群の場合でも, この G の $\mathrm{NS}(G)$ に関する部分 Burnside 環の結果は可換群の場合の結果と同じになっている.

これら部分 Burnside 環に関する結果から次の定理を得る.

定理 4.5. G を奇数位数の群とする. このとき以下の 5 つの条件は同値である.

(i) G : 可解群
(ii) $|\Omega(G)^{\times}| = 2$
(iii) $\Omega(G)^{\times} \simeq \Omega(G/G')^{\times}$
(iv) $\Omega(G)^{\times} \simeq \Omega(G, G_{G'})^{\times}$
(v) $\Omega(G)^{\times} \simeq \Omega(G, \mathrm{NS}(G))^{\times}$

ここで, G' は G の交換子部分群である.

Proof. (i) と (ii) の同値性は, 定理 ?? である. (iii) と (iv) は命題 4.3 より同値である. (iii),(v) の右辺の位数については, G/G' が可換群であることと, 定理 4.4 より直接計算でき, (ii) の右辺と一致するので, (ii),(iii),(v) は同値である. よってこれら 5 つの条件は同値である. □

このように部分 Burnside 環の単元群ともとになる Burnside 環の単元群との関係性から群の構造を調べることもできる. 次の章では有限 Coxeter 群において存在する特別な部分 Burnside 環とその結果について述べる.

5 有限 Coxeter 群とその部分 Burnside 環

定義 5.1. 有限群 W が

$$W \simeq \langle S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\} \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = e \rangle$$

ただし, $m_{ii} = 1$ かつ $2 \leq m_{ij} < \infty (i \neq j)$ となる有限集合 S が存在するとき, W を有限 **Coxeter 群**という. またこのとき, 組 (W, S) を **Coxter 系**という.

有限 Coxeter 群は 1935 年に Coxeter によって以下のように分類されている.

古典型 : A_n, B_n, D_n, $I_2(n)$.
例外型 : H_3, H_4, F_4, E_6, E_7, E_8.

この報告では特に A_n 型と $I_2(n)$ 型について注目する. n 次対称群 S_n は,

$$S_n = \langle (1\ 2), (2\ 3), \cdots, (n-1\ n) \rangle$$

より, A_n 型の Coxeter 群とみなすことができる. また, 二面体群 D_n は

$$D_{2n} = \langle \sigma, \sigma\tau \rangle$$

より, $I_2(n)$ 型の Coxeter 群とみなすことができる. ここで σ は回転, τ は鏡映を意味する. 次に, 有限 Coxeter 群に対し, 部分 Burnside 環を導入するために有限 Coxeter 群部分群族を定義する.

定義 5.2. W を Coxeter 系 (W,S) をもつ Coxeter 群とする. このとき各部分集合 $J \subseteq S$ に対し,

$$W_J := \langle J \rangle$$

を W の standard parabolic 部分群という. また W の部分群 P に対し, $P = {}^gW_J$ となる $g \in W$ が存在するとき, P を W の parabolic 部分群という. さらに, W の parabolic 部分群全体を $\mathcal{P}$ と書く.

Coxeter 群 W に対し, W の部分群族である parabolic 部分群全体 $\mathcal{P}$ は明らかに定義 4.1 の 3 つの条件のうち, 上 2 つを満たす. さらに, $\mathcal{P}$ が共通部分をとることで閉じていることが Solomon によって証明されている ([So66]) ので, $\mathcal{P}$ は部分 Burnside 環の条件をすべてみたすことが分かる. また, Coxeter 群の parabolic 部分群族に関する部分 Burnside 環の単元として, 次のものが常に存在することが知られている.

定理 5.3. W を (W,S) を *Coxeter* 系にもつ有限 *Coxeter* 群とし, $\mathcal{P}$ を W の *parabolic* 部分群全体とする. このとき,

$$\varepsilon := \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|}[W/W_J] \in \Omega(W,\mathcal{P})^\times$$

となる.

特に, Coxeter 群 W に対し, 定理 5.3 から得られる W の単元を, 符号単元 **(sign unit)** という.

例 5.4. $S := \{(1\ 2),(2\ 3)\}$, $W := \langle S \rangle$ とおくと, W は (W,S) を *Coxeter* 系にもつ *Coxeter* 群となる. このとき,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{1, \langle (1\ 2) \rangle, \langle (1\ 3) \rangle, \langle (2,3) \rangle, \langle W \rangle\}, \\
\mathrm{C}(\mathcal{P}) &= \{(1),(H),(W)\}, \quad \text{ここで, } H := \langle (1\ 2) \rangle, \\
\Omega(W,\mathcal{P}) &= \langle [W/1],[W/H],[W/W] \rangle, \\
\Omega(W,\mathcal{P})^\times &= \langle -[W/W] \rangle \times \langle \varepsilon \rangle
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\varepsilon = [W/1] - 2[W/H] + [W/W]$$

である.

A_n 型の Coxeter 群の部分 Burnside 環の単元群については, すでに [IO15] で示されているので紹介する.

定理 5.5. W を A_n 型 *Coxeter* 群, $\mathcal{P}_n$ をその *parabolic* 部分群全体とする. このとき,

$$\Omega(W, \mathcal{P}_n)^\times = \langle -[W/W], \varepsilon \rangle$$

となる. ここで, ε は W の符号単元である.

また, $I_2(n)$ 型の Coxeter 群についても新たに分かったので紹介する.

定理 5.6. W を $I_2(n)$ 型 *Coxeter* 群, $\mathcal{P}_n$ をその *parabolic* 部分群全体とする. このとき,

$$\Omega(W, \mathcal{P}_n)^\times = \langle -[W/W], \varepsilon \rangle$$

となる. ここで, ε は W の符号単元である.

さらに他の型のいくつかの Coxeter 群の部分 Burnside 環の単元群についてコンピュータによって計算したものを紹介する.

W の型	B_3	B_4	B_5	D_4	D_5	D_6
$\lvert\Omega(W, \mathcal{P})^\times\rvert$	4	4	4	4	4	4

W の型	E_6	E_7	E_8	H_3	H_4	F_4
$\lvert\Omega(W, \mathcal{P})^\times\rvert$	4	4	?	4	4	4

E_8 型の Coxeter 群については計算に用いた PC の性能が足りなかった.

これらの結果から既約な有限 Coxeter 群の parabolic 部分群族に関する部分 Burnside 環の単元群の位数は常に 4 だろうと予想されている. いくつか知られている結果だけでも Coxeter 群の位数が大きいほど, その Burnside 環の単元群の位数も大きくなるのに対して, 部分 Burnside 環の単元群の位数が常に一定なのは非常に興味深い.

6 可約 Coxeter 群の部分 Burnside 環の単元群

この章では, 既約な場合ではなく可約な場合の有限 Coxeter 群の parabolic 部分群族に関する部分 Burnside 環の単元群の位数について述べる. 講演の際は, 部分 Burnside 環の

単元群の位数が 4 となるような既約 Coxeter 群の直積で与えられる Coxeter 群について述べたが, その証明に一部誤りがあったので, A_n 型の Coxeter 群の直積に対して得られた結果を紹介する.

この章では特に指定しない限り, (W,S) を $W=\prod_{i=1}^{k} W_{S_i}$ を満たす k-既約な Coxeter 系 (W_{S_i},S_i) を持つ Coxeter 系とする. ここで W_{S_i} は W の standard parabolic 部分群である. さらに, W の parabolic 部分群族を $\mathcal{P}$ とし, 各 W_{S_i} の parabolic 部分群族を $\mathcal{P}_i$ とする.

可約な Coxeter 群の parabolic 部分群について, 次の補題が簡単に確かめられる.

補題 6.1.

$$\mathcal{P}=\left\{\prod_{i=1}^{k} P_i \mid P_i\in\mathcal{P}_i\right\}$$

この補題によって次の補題が well-difined であることが分かる

補題 6.2. 各 i に対し, 写像

$$\begin{array}{rccc} f_i: & \Omega(W_{S_i},\mathcal{P}_i) & \longrightarrow & \Omega(W,\mathcal{P}) \\ & [W_{S_i}/H] & \longmapsto & [W/(W_{S_1}\times\cdots\times H\times\cdots\times W_{S_k})] \end{array}$$

は環準同型写像である.

この補題は Burnside 環におけるいくつかの射を用いて圏論的に証明することも, 直接計算によって証明することもできる.

ここからは各 W_{S_i} を A 型の Coxeter 群, 特に同型である対称群とみなす. 次の補題のためにいくつかの準備をする. $R(W)$ を R の実指標環とするとき, 写像

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \Omega(W) & \longrightarrow & R(W) \\ & [X] & \longmapsto & \pi_X \end{array}$$

は環準同型写像である. ここで π_X は (対称群の直積である)W-集合 X の置換指標である. また, W の巡回部分群全体の集合を $\mathfrak{C}$ とすると, 写像

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & C & \longmapsto & \overline{C}:=\bigcap\{Y\in\mathcal{P}\mid C\leq Y\} \end{array}$$

は全単射となるので, 次の環同型写像 $\overline{\alpha}$ を誘導する.

$$\overline{\alpha}:\ \widetilde{\Omega}(W,\mathcal{P})\longrightarrow\widetilde{\Omega}(W,\mathfrak{C})$$

さらに次の写像は全単射である.

$$\begin{array}{ccc} \{W \text{ の元の共役類 }\} & \longrightarrow & \mathrm{C}(\mathfrak{C}) \\ g & \longmapsto & \langle g \rangle \end{array}$$

したがって次の補題を得る.

補題 6.3. 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(W,\mathcal{P}) & \hookrightarrow & \Omega(W) & \xrightarrow{\pi} & R(W) \\ \varphi\big\downarrow & & & & \big\downarrow\nu \\ \widetilde{\Omega}(W,\mathcal{P}) & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & \widetilde{\Omega}(W,\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\simeq} & \widetilde{R}(W) \end{array}$$

ここで, $R(W)$ は W の実指標環, $\widetilde{R}(W)$ は W の整数値をとる類関数たちからなる環であり, ν は自然な単射である.

定理 6.4. 次の 3 つが成り立つ.

(1) $|\Omega(W,\mathcal{P})^{\times}| = 2^{k+1}$
(2) $\Omega(W,\mathcal{P})^{\times} = \langle -[W/W], f_1(\varepsilon_1), \cdots, f_k(\varepsilon_k) \rangle$
(3) ε を $\Omega(W,\mathcal{P})$ の符号単元とするとき, $\varepsilon = \prod_{i=1}^{k} f_i(\varepsilon_i)$

ただし, 各 i に対し, ε_i は $\Omega(W_{S_i}, \mathcal{P}_i)$ の符号単元である.

Proof. 各 f_i の定義と環準同型性から $\Omega(W,\mathcal{P})^{\times} \supseteq \langle -[W/W], f_1(\varepsilon_1), \cdots, f_k(\varepsilon_k) \rangle$ かつ $|\Omega(W,\mathcal{P})^{\times}| \geq 2^{k+1}$ は明らかである. 次に写像

$$\pi' : \widetilde{\Omega}(W,\mathcal{P}) \longrightarrow R(W) : [X] \longmapsto \pi_X$$

を考える. 補題 6.3 と, ϖ の単射性から π' が単射であることが分かる. よって $|\Omega(W,\mathcal{P})^{\times}| \leq |R(W)^{\times}|$ となる. さらに

$$|R(W)^{\times}| = 2 \times |\{W \text{ の線形指標 }\}|$$

であり,

$$R(W) = R(W_{S_1}) \otimes \cdots \otimes R(W_{S_k})$$

である. 各 W_{S_i} は対称群なので $R_{W_{S_i}}$ の線形指標は 2 つなので, W の線形指標の数は 2^k となる. よって $2^{k+1} \leq |\Omega(W,\mathcal{P})^{\times}| \leq |R(W)^{\times}| = 2^{k+1}$ より定理の (1), (2) を得る. (3) は直接計算すれば確かめられる. □

7 圏論的立場から見る Burnside 環

Burnside 環は圏論的手法を用いての研究も盛んである．この章では Burnside 環の圏論的研究手法の際に登場するいくつかの射について，新たに得られた結果を紹介する．

7.1 Burnside Mackey 関手

有限群 G の Burnside Mackey 関手とは，

$$\begin{array}{rccc} \Omega: & \{\text{subgroups of } G\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\text{-mod} \\ & H & \longmapsto & \Omega(H) \end{array}$$

で次の 3 つの射をもつ関手である．

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ind}_K^H: & \Omega(K) & \longrightarrow & \Omega(H) \\ & [K/J] & \longmapsto & [H/J] \\ \\ \mathrm{Res}_K^H: & \Omega(H) & \longrightarrow & \Omega(K) \\ & [H/J] & \longmapsto & \displaystyle\sum_{g\in[J\backslash H/K]} [K/(K\cap {}^gJ)] \\ c_g^H: & \Omega(H) & \longrightarrow & \Omega({}^gH) \\ & [H/J] & \longmapsto & [{}^gH/{}^gJ] \end{array}$$

$$(\ K\leq H,\ g\in G\ )$$

ここで, Res は環準同型写像, c は環同型写像となる．しかし, Ind は加群の準同型写像ではあるが環準同型写像ではない．詳しくは延べないが, Burnside Mackey 関手は Mackey 関手の例の 1 つとなっており, Mackey 関手に関する研究手法も用いることができる．

Res が環準同型写像であることから, Res は単元を単元に移す．部分 Burnside 環の単元が Res によってどの単元に移るのかは興味の対象であり, 有限 Coxeter 群の parabolic 部分群族に関する部分 Burnside 環の単元として常に符号単元が存在するので, その符号単元の Res による行先が分かったので紹介する．

定理 7.1. *W を (W,S) を Coxeter 系に持つ有限 Coxeter 群とする．$S'\subseteq S$ を固定し, $W'=\langle S'\rangle$ とする．$\mathcal{P},\mathcal{P}'$ をそれぞれ W,W' の parabolic 部分群全体, ε,ε' をそれぞれ*

$\Omega(W,\mathcal{P}),\Omega(W,\mathcal{P}')$ の符号単元とする．このとき，

$$\mathrm{Res}^W_{W'}(\varepsilon)=\varepsilon'$$

が成立する．

Proof. $\varphi^W,\varphi^{W'}$ をそれぞれ，W,W' の Burnside 準同型とする．Res の性質より，任意の $H\leq W'$, $x\in\Omega(W)$ に対し，

$$\varphi^{W'}_H(\mathrm{Res}^W_{W'}(x))=\varphi^W_H(x)$$

なので，

$$\varphi^{W'}_H(\mathrm{Res}^W_{W'}(\varepsilon))=\varphi^W_H(\varepsilon)$$

となる．部分 Burnside 環での議論をするので，$H\in\mathcal{P}'$ としてよい．さらに符号単元の性質より，$(H)=(W_J)$ となる $J\subseteq S'\subseteq S$ が存在する H に対し，

$$\varphi^W_H(\varepsilon)=(-1)^{|J|}$$

が成立する．一方，同様に符号単元の性質から，同じ H に対し，

$$\varphi^{W'}_H(\varepsilon')=(-1)^{|J|}$$

より，

$$\varphi^{W'}_H(\mathrm{Res}^W_{W'}(\varepsilon))=\varphi^{W'}_H(\varepsilon')$$

となり，Burnside 準同型の単射性より $\mathrm{Res}^W_{W'}(\varepsilon)=\varepsilon'$ を得る． □

さらに Burnside 環の単元群の研究に重要な写像や，新たな関手を紹介するために写像を紹介する．

定義 7.2. G を有限群とする．任意の $K\leq H\leq G$ に対し，写像

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{Jnd}^H_K: & \Omega(K) & \longrightarrow & \Omega(H)\\ & x & \longmapsto & \varphi^{-1}\left(\left(\displaystyle\prod_{u\in[J\backslash H/K]}\varphi_{K\cap J^u}(x)\right)_{(J)\in C(G)}\right)\end{array}$$

をテンソル誘導という．

$\Omega=(\mathrm{Tnd},\ \mathrm{Ind},\ \mathrm{Res})$ は丹原関手の例となっている．このテンソル誘導写像は和に関しては準同型ではないが積に関しては準同型である．定義を見れば明らかであるが，代数的

にかなり難解な振る舞いをする写像である．そのため，テンソル誘導における像がどうなるのかも Burnside 環においては興味の対象である．いくつかの群のある単元のテンソル誘導の行先が得られたので紹介する．

定理 7.3. 自然数 n に対し，S_n を n 次対称群とする．このとき，

$$\mathrm{Jnd}_{S_{n-1}}^{S_n}(-[S_{n-1}/S_{n-1}]) = (-1)^n \varepsilon_n$$

となる．ここで，ε_n は S_n を A_{n-1} 型の *Coxeter* 群とみなしたときに得られる $\Omega(S_n)$ の符号単元である．

Proof. $S := \{(1\ 2), (2\ 3), \cdots (n-1\ n)\} \subset S_n$ とし，S_n を (S_n, S) を Coxeter 系にもつ Coxeter 群とみなし，$\mathcal{P}_n$ を S_n の parabolic 部分群全体とする．さらに，$\mathfrak{Y}_n$ を S_n のヤング部分群全体とする．いま，$\mathcal{P}_n = \mathfrak{Y}_n$ が成立する．

$$\mathrm{Jnd}_{S_{n-1}}^{S_n}(-[S_{n-1}/S_{n-1}]) = \varphi^{-1}(((-1)^{|H\backslash S_n/S_{n-1}|})_{(H)\in C(G)})$$

となる．ここで，$H \leq S_n$ に対し，

$$\overline{H} := \bigcap\{Y \in \mathcal{P}_n | H \leq Y\}$$

とする．$\mathcal{P}_n = \mathfrak{Y}_n$ より，任意の $H \leq S_n$ に対し，

$$|H\backslash S_n/S_{n-1}| = |\overline{H}\backslash S_n/S_{n-1}|$$

となるので，$H \in \mathcal{P}_n$ として考える．ある $J \subseteq S$ に対し，$(H) = (W_J)$ とする．両側剰余類 $H\backslash S_n/S_{n-1}$ は n 点の S_n-集合 S_n/S_{n-1} に H を作用させたものだとみなすことによって，

$$|H\backslash S_n/S_{n-1}| = n - |J|$$

を得る．これは $(-1)^n\varphi_H(\varepsilon_n)$ の値と一致するので，Burnside 準同型写像の単射性より，この定理を得る． □

定理 7.4. $D_{2n} := \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = e \rangle$, $H = \langle \tau \rangle$ とする．

$$\mathrm{Jnd}_H^{D_{2n}}(-[H/H]) = \varepsilon_n$$

となる．ここで，ε_n は二面体群 D_2n を $I_2(n)$ 型の *Coxeter* 群とみなしたときに得られる $\Omega(S_n)$ の符号単元である．

長くなるので詳しい証明は省略するが，定理 7.3 の証明と同様に両側剰余類の集合の濃度を D_{2n} の部分群で場合分けして調べればよい．

参考文献

[IO15] Idei, H. ; Oda, F. : The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group, J. Algebra **429** (2015), 318–323.

[Ma82] Matsuda, T. : On the unit groups of Burnside rings. Japan. J. Math. (N.S.) **8** (1982), no. 1, 71–93.

[So66] Solomon, L. : The orders of the nite Chevalley groups, J. Algebra **3**, (1966), 376–393.

[to79] tom Dieck, T. : Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer, Berlin, 1979.

[Yo90] Yoshida, T. : The generalized Burnside ring of a finite group. Hokkaido Math. J. **19** (1990), no. 3, 509–574.