

# エネルギー公式を持つゲームについて

千葉大学大学院 理学研究科 入江 佑樹

Yuki Irie

Graduate School of Science,  
Chiba University

エネルギー (Sprague-Grundy 数) の明示公式を持つゲームは, 興味深い組合せ構造である. 本稿では, エネルギー公式を持つゲームの構成法として飽和を紹介し, 実際に飽和を使って, エネルギー公式を持つゲームを構成する.

## 1 序論

本稿では, 不偏ゲームという二人対戦ゲームを扱う. ゲームで重要なことはどうしたら勝てるか, すなわち, 必勝戦略を与えることである. 不偏ゲーム (より一般に組合せゲーム) の必勝戦略は, 原理的には全ての局面を調べることで与えることができる. しかし, 例えば将棋のように局面の数が膨大な場合, 現実的にはできないことが多い. そのため将棋はゲームとして面白いわけである. 一方で, 必勝戦略が与えられているゲームもある. 特に不偏ゲームでは, エネルギー公式が求まれば, 必勝戦略を与えることができる. 言い換えるとエネルギー公式を持つゲームは, ゲームとしては全く面白くない. しかし, 数学として面白い. このようなゲームは, 例があまり見つからない. 例えば, ニムの誘導部分ゲームに限定すると (より一般に, 後述するこれらのゲームの  $b$ -飽和に限定しても), エネルギー公式が知られている例は, 自明なものを除けば, ニム自身と Welter ゲームしかなかった.

今回, エネルギー公式を持つゲームを構成する一つの方法として,  $b$ -飽和を導入した.  $b$ -飽和を用いて, 次の二つのエネルギー公式を持つゲームを構成した:

- (1)  $b$ -飽和  $b$ -反転ニム
- (2)  $b$ -飽和 Welter ゲーム

本稿では (1) を主に扱う. (2) についてはここで簡単に紹介したい. このゲームの元となっている Welter ゲームは様々な研究がされている [5, 7, 8, 9, 12]. 特に佐藤幹夫 [10] によって対称群の既約表現との間に何らかの関係があるだろうと予想された. その根拠の一つは, Welter ゲームのエネルギー公式と対称群の既約表現の次数を与えるフック公式がよく似ているためである. 実は  $b$ -飽和を使うことによって, この間の一つの間係を与えることができる [4]. 本稿では,  $b$ -飽和を  $b$ -反転ニムという新しいゲームに適用した結果を紹介する.

本稿の構成を述べる. 2 節で不偏ゲームの概説を与え, 3 節で反転ニムを定義する. 最後の 4 節で飽和を定義した後, 飽和反転ニムのエネルギー公式を与える.

## 2 不偏ゲーム

本節では不偏ゲームを概説する. ゲーム全体を外観した後, 不偏ゲームを有向グラフとして定義し, 具体例としてニムをみる. そして, 不偏ゲームの必勝戦略をエネルギーを使って与える.

### 2.1 二人対戦ゲーム

本稿では二人対戦不偏ゲームと呼ばれるものを扱う. ここでは, 二人対戦ゲームの全体像をみよう.

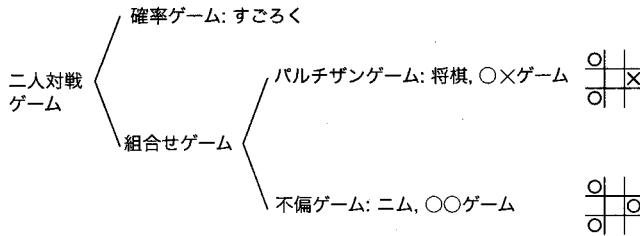


図1 二人対戦ゲームの分類

ゲームはまず, 確率ゲームと組合せゲームに分けることができる. 確率ゲームは, すごろくなどの運の要素がある (サイコロをふる) ゲームである. 一方の組合せゲームは, 将棋や囲碁などの運の要素がないゲームである.

組合せゲームはさらに, パルチザンゲームと不偏ゲームに分けられる. 2 つの違いは

先手と後手でできることが違うか同じかであり、違うものをパルチザンゲーム、同じものを不偏ゲームと呼ぶ。例えば、 $\circ\times$ ゲーム<sup>\*1</sup>では自分のマーク（ $\circ$ または $\times$ ）しか書けないため、パルチザンゲームである。一方、 $\circ\times$ ゲームのルールを変えた、 $\circ\circ$ ゲーム（ $\circ$ を交互に書いていき、先に $\circ$ を直線上に3個並べたら勝ち）というゲームは、先手と後手でできることが同じため、不偏ゲームである。

## 2.2 不偏ゲームは有向グラフ

不偏ゲームは、局面全体を頂点集合、局面から別の局面に移動できるときに矢を描くことで、有向グラフで表すことができる。そこで、以下ではグラフの頂点を **局面** と呼ぶ。

逆に、有向グラフはゲームと思える。例えば、図2の左のグラフの場合で考えよう。局面1からゲームをはじめる。先手は局面2または4に移動できる。2に移動した場合、後手は3に移動できるが、先手はこれ以上移動できない。このように移動できなくなった方を負けとしよう。ちなみにもし、最初に4に移動していれば、先手が勝っていた。次に図2の右のグラフで考えよう。この場合、勝負はいつまでたっても終わらず、引き分けである。

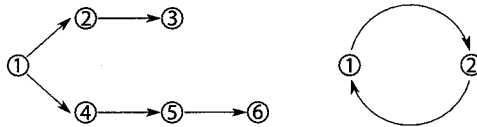


図2 2つのグラフ。本稿では左はゲームだが、右はゲームとは呼ばない。

引き分けの場合は除きたいため、本稿では次の有限性の条件を仮定する。 $\Gamma$ の局面  $X$  に対して、 $lg(X)$  で  $X$  からはじまる有向パスの長さの最大を表す。このとき、 $\Gamma$ が **ゲーム** とは、 $lg(X)$  が全ての局面に対して有限と定義する。 $\Gamma$ が有限グラフの場合、ゲームであることと、閉路がないことは同値である。以下では  $\Gamma$ の局面集合を  $P(\Gamma)$ 、辺集合を  $A(\Gamma)$  で表す。また、 $X$  から  $Y$  への辺があるとき、すなわち  $(X, Y) \in A(\Gamma)$  のとき、 $Y$  を  $X$  の **オプシオン** と呼ぶ。

<sup>\*1</sup> 三目並べとも呼ばれる、 $3 \times 3$ のマス目に交互に $\circ$ と $\times$ を書いていくゲームである。このゲームでは、先に自分のマークを直線上に3個並べたら勝ちである。

## 2.3 ニム

最も基本的な例といえる、ニムを紹介しよう。N で非負整数全体の集合を表し、 $m \in \mathbb{N}$  とする。ニムは局面集合が  $\mathbb{N}^m$  で、辺集合を次としたゲームである：

$$\{(X, Y) \in (\mathbb{N}^m)^2 : X^i \geq Y^i \ (i \in \{1, \dots, m\}), \text{dist}(X, Y) = 1\}.$$

ただし、 $X = (X^1, \dots, X^m), Y = (Y^1, \dots, Y^m)$  であり、 $\text{dist}(X, Y)$  は Hamming 距離を表す。すなわち

$$\text{dist}(X, Y) = |\{i \in \{1, \dots, m\} : X^i \neq Y^i\}|.$$

このゲームを ( $m$  山) ニム と呼び、 $\mathcal{N}^m$  で表す。

ニムは具体的には次のゲームと思える。 $m$  個のコインの山を用意し、それぞれ  $X^1, \dots, X^m$  枚のコインがあるとしよう。二人のプレイヤーは、交互に一つの山を選び、1枚以上のコインをとっていく。交互にコインをとっていき、先にとるコインがなくなった方の負けというゲームである。

## 2.4 必勝戦略とエネルギー (Sprague-Grundy 数)

それでは必勝戦略に話を進めよう。必勝戦略はエネルギーを使って与えることができる。そこで、エネルギーを定義する。N の真部分集合  $S$  に対して、 $\text{mex} S$  で  $S$  に入らない最小の非負整数を表す。例えば  $\text{mex} \emptyset = 0, \text{mex} \{0, 1, 3\} = 2$  である。ゲーム  $\Gamma$  の局面  $X$  に対して、 $X$  の **エネルギー (Sprague-Grundy 数)** を  $X$  のオプション全体のエネルギーの  $\text{mex}$  と再帰的に定義する：

$$\text{eg}(X) = \text{eg}_\Gamma(X) = \text{mex} \{\text{eg}(Y) : (X, Y) \in A(\Gamma)\}.$$

エネルギーは  $\text{lg}(X)$  が小さい順に順々に定まる仕組みになっている。例えば  $\text{lg}(X) = 0$  のとき、 $\text{eg}(X) = \text{mex} \emptyset = 0$  となる。また、 $\text{lg}(X) = 1$  のときは  $\text{eg}(X) = \text{mex} \{0\} = 1$  である。エネルギーの具体例が図3にある。

エネルギーを使って必勝戦略を与えよう。結論からいうと、必勝戦略は「エネルギーが0の局面に移動していく」である。後手にとっての必勝戦略がある局面を単に **必勝局面** と呼ぶ。このとき、必勝局面であることとエネルギーが0であることは同値であることを示す。局面  $X$  のエネルギーを0とする。もし  $\text{lg}(X) = 0$  ならば、先手は移動できないため、後手の勝ちである。そこで、 $\text{lg}(X) > 0$  とする。すると  $X$  はオプション  $Y$  を持つが、

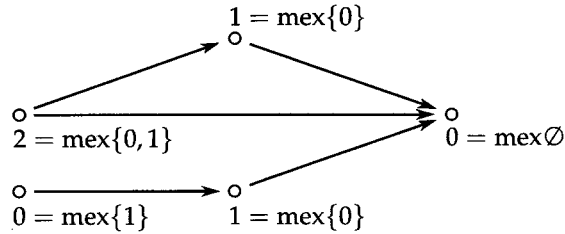


図3 エネルギーの例

エネルギーの定義から  $eg(Y) > 0$  である。すなわち、先手はエネルギーが 1 以上の局面  $Y$  にしか移動できない。よって、再びエネルギーの定義から、局面  $Y$  はエネルギー 0 のオプション  $Z$  を持つ。そのため、後手は必ず、エネルギー 0 の局面に移動できる。以上のやりとりは有限回で終わり、最後は後手が  $lg(X) = 0$  の局面に到達するため、後手が必ず勝つことができる。これが必勝戦略である。逆に、エネルギーが 0 でない場合は、今度は先手にとっての必勝戦略がある。よって、必勝局面であることとエネルギーが 0 であることは同値である。

以上のことは、Grundy [3] と Sprague [11] によって独立に示された。さらに、彼らは  $X$  がニム  $\mathcal{N}^1$  の局面 ( $eg(X)$ ) と、ある同値関係で同値であることも示した。詳細は例えば [1, 2] を参照して欲しい。

さて一般には、エネルギーは再帰的に計算するしかなく、実際に求めるのは困難である。ところが例は少ないが、特別な場合にはエネルギーの明示公式が知られている。その代表例は、ニムと Welter ゲームである。Welter ゲームは、次の集合へ誘導して得られる、ニムの部分グラフとして定義できる：

$$P_W = \{X \in \mathbb{N}^m : X^i \neq X^j (1 \leq i < j \leq m)\}.$$

すなわち、Welter ゲームの局面集合は  $P_W$  で辺集合は  $\{(X, Y) \in A(\mathcal{N}^m) : X, Y \in P_W\}$  である。このような、ニムの誘導部分グラフとして得られるゲームをニムの **誘導部分ゲーム** と呼ぶ。ニムと Welter ゲームのエネルギー公式を表 1 にまとめる。前者は Sprague [3] と Grundy [11] が独立に与え、後者は Welter [12] と佐藤 [7, 8, 9] が独立に与えた。

ゲーム理論の概説は以上である。以下、エネルギー公式を持つゲームを構成していく。

表1 エネルギー公式.  $\oplus_2$  は2進展開して繰り上がりのない足し算を表す. 例えば  $2 \oplus_2 6 = (010)_2 \oplus_2 (110)_2 = 4$ . また  $N_2(x) = x \oplus_2 (x-1)$ .

	$\text{eg}(X)$
ニム	$X^1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X^m$
Welter ゲーム	$X^1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X^m \oplus_2 \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} N_2(X^i - X^j)$

### 3 反転ニム

反転ニムはニムの誘導部分ゲームとして定義できる. 三山以下の場合と四山以上の場合で, 少し状況が異なるため, まず三山の場合を定義し, 次に一般の場合を定義する.

#### 3.1 三山の場合

ニムを置換して複数のゲームを作り, 得られたゲームの中で局面数が最小のものとして, 反転ニムを定義する.

記号を準備する. 正の整数  $M$  を固定する.  $[n]$  で  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  を表し, 集合  $[2^M]^3$  に誘導して得られる, ニムの部分ゲームを  $\Delta$  とする\*2. ゲーム  $\Delta$  の必勝局面全体を  $W$  で表す:

$$W = \{X \in [2^M]^3 : X^1 \oplus_2 X^2 \oplus_2 X^3 = 0\}.$$

次にニムを置換したゲームを定義する. 置換  $\sigma \in \text{Sym}([2^M])$  と  $X \in [2^M]^3$  に対して,

$$\sigma(X) = (\sigma(X^1), \sigma(X^2), \sigma(X^3)), \quad \sigma(W) = \{\sigma(X) : X \in W\}$$

とする. 例えば,  $M=1$  で  $\sigma = (01)$  のとき

$$\sigma(W) = \sigma(\{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}) = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

である. そして, 置換  $\sigma$  で  $\Delta$  を置換したゲーム  $\sigma(\Delta)$  を「必勝局面が  $\sigma(W)$  となる  $\Delta$  の最大の誘導部分ゲーム」と定義しよう. 具体的には,  $\sigma(\Delta)$  は次の集合に誘導して得られる,  $\Delta$  の部分ゲームである:

$$\sigma(W) \cup \{X \in [2^M]^3 : (Y, X) \in A(\Delta) \text{ を満たす } Y \in \sigma(W) \text{ が存在する}\}.$$

---

\*2 ニムそのものと思ってもらって差し支えない. この節では  $[2^M]^3$  の中で反転ニムを定義するが, 4節では  $\mathbb{N}^3$  の中で反転ニムを定義する.

例えば, 上の  $M=1, \sigma=(0\ 1)$  の場合は,  $\sigma(\Delta)$  の局面は  $[2]^3 \setminus \{(0,0,0)\}$  になることが確かめられる.  $\mathcal{G}$  でニムを置換して得られるゲーム  $\sigma(\Delta)$  全体を表そう:

$$\mathcal{G} = \{\sigma(\Delta) : \sigma \in \text{Sym}([2^M])\}.$$

ニムを置換することでどのようなゲームが得られたのだろうか. 少し唐突だが, 得られたゲームたちの局面数の度数分布をみてみよう. まず,  $M=1$  のときは  $\mathcal{G} = \{\Delta, (0\ 1)(\Delta)\}$  であり, それぞれの局面数は 8 と 7 のため, 度数分布は

$$\begin{array}{r} 7 \quad 8 \\ \hline 1 \quad 1 \end{array}$$

となる. また  $M=2, 3$  のときの度数分布はそれぞれ以下の左と右のようになる:

$$\begin{array}{cccc|cccccccc} 52 & 56 & 60 & 64 & 400 & 406 & 410 & 412 & \cdots & 500 & 502 & 506 & 512 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & \cdots & 5 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

一般にこの度数分布は対称分布になり, 特に局面数が最大のゲームと最小のゲームはただ一つになる. 最大の方は  $\Delta$  自身である. そして, 最小の方を (三山) 反転ニムと呼び,  $\tilde{\mathcal{N}}^{3,M}$  で表そう. 反転ニムは  $\sigma$  がビット反転  $x \mapsto x \oplus (2^M - 1)$  の場合の  $\sigma(\Delta)$  になっている. すなわち, 反転ニムの必勝局面は, ニムの必勝局面をビット反転したものになっている.

面白いことに, この反転ニムはエネルギー公式を次のように与えることができる:

$$\text{sg}(X) = X^1 \oplus_2 X^2 \oplus_2 X^3 \oplus_2 (2^M - 1) - \sum_{L=0}^{M-1} \delta(X_L^1) \delta(X_L^2) \delta(X_L^3) 2^{L+1}. \quad (3.1)$$

ただし,  $X_L^i$  は  $X^i$  を 2 進展開したときの  $L$  桁目であり ( $X^i = \sum X_L^i 2^L, X_L^i \in \{0, 1\}$ ),  $\delta(x)$  は  $x$  が 0 のとき 1, それ以外のとき 0 である.

### 補足: 反転ニムはどのようなゲームか

反転ニムは具体的にはどのようなゲームなのだろうか. 反転ニムはニムの誘導部分ゲーム, いいかえると一部の局面が禁止されたニムである. そこで  $X \in [2^M]^3 \setminus P(\tilde{\mathcal{N}}^{3,M})$  となる  $X$  を反転ニムの **禁止局面** と呼び, 禁止局面の特徴付けを与えよう.

特徴付けは  $X$  の  $L$  桁目を使って述べる事ができる. ここで  $X$  の  $L$  桁目とは,  $(X_L^1, X_L^2, X_L^3)$  のことである. たとえば,

$$X = (0, 1, 5) = ((000)_2, (001)_2, (101)_2)$$

のときは、 $X$  の 0, 1, 2 桁目はそれぞれ  $(0, 1, 1), (0, 0, 0), (0, 0, 1)$  である。

それでは、禁止局面の特徴付けを述べる。反転ニム  $\tilde{\mathcal{N}}^{3,M}$  の必勝局面全体<sup>\*3</sup>を  $\tilde{W}$  で表す。 $X \in \tilde{W}$  のときは定義から反転ニムの局面のため、 $X \in [2^M]^3 \setminus \tilde{W}$  となる局面がいつ禁止局面になるか述べる。 $N$  を次を満たす最大の非負整数としよう:  $N < M$  かつ  $X$  の  $N$  桁目は 1 を偶数個含む。このとき、 $X \in [2^M]^3 \setminus \tilde{W}$  が反転ニムの禁止局面となる必要十分条件は、「 $X$  の  $N$  桁目が  $(0, 0, 0)$  となること」である。例えば、 $M = 3$  で  $X = (0, 1, 5)$  の場合は、3 桁目未満で 1 を偶数個含む最大桁は 1 桁目であり、 $(0, 0, 0)$  となっているため、反転ニム  $\tilde{\mathcal{N}}^{3,3}$  の禁止局面である。 $M = 1, 2, 3, 4$  の場合の禁止局面全体を図 4 に図示する<sup>\*4</sup>。

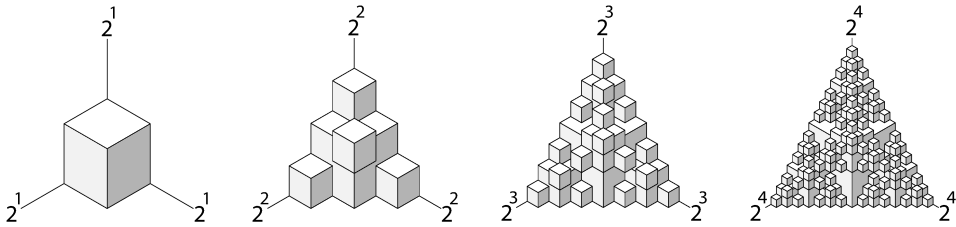


図 4  $M = 1, 2, 3, 4$  の場合の反転ニムの禁止局面の様子. 禁止局面  $(X^1, X^2, X^3)$  を  $(X^1 + \varepsilon^1, X^2 + \varepsilon^2, X^3 + \varepsilon^3)(\varepsilon^i \in \{0, 1\})$  を頂点とする立方体で表している。

さて、この特徴付けから、禁止局面であることと (3.1) の右辺が負になることは、同値であることがわかる。このことを使って、一般の  $m$  山反転ニムを定義する。

### 3.2 一般の場合

三山の場合は、置換で得られるゲームの中で最小のものとして反転ニムを定義できた。しかし、四山以上の場合には最小のものは唯一とは限らないため、この方法では定義できない。それでは、どのように定義するのが良いだろうか。ここでは (3.1) を一般化した

$$\text{sg}(X) = X^1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X^m \oplus_2 (2^M - 1) - \sum_{L=0}^{M-1} \delta(X_L^1) \cdots \delta(X_L^m) 2^{L+1} \quad (3.2)$$

<sup>\*3</sup> 0 から  $M-1$  の各桁に 1 を奇数個含むもの全体になっている。

<sup>\*4</sup> 図 4 から  $M$  を  $\infty$  に飛ばすとどうなるかが気になるだろう。結論だけ述べると、ゲームを定義した際の有限性に関する条件を少し緩めることで、 $M$  を  $\infty$  にしたゲームを実際に考えることができ、エネルギー公式も (3.2) の  $M$  を  $\infty$  したもので与えることができる。



がエネルギーとなるゲームを構成することを目標とする。一般化するにあたり、ポイントは二つある。

一つ目は、前節で述べたように、三山反転ニムの局面全体は、(3.1)の右辺が0以上となる  $X \in [2^M]^3$  全体に一致することである。そこで、 $m \in \mathbb{N}$  に対して、次の集合に誘導して得られる、ニム  $\mathcal{N}^m$  の部分ゲームを考えよう：

$$\{X \in [2^M]^m : \phi(X) \geq 0\}.$$

ただし、 $\phi(X)$  は (3.2) の右辺を表す。このゲームを ( $m$  山) 反転ニム と呼び、 $\tilde{\mathcal{N}}^{m,M}$  で表す。残念ながら、このゲームのエネルギーは (3.2) にはならない。

そこで二つ目のポイントである。次節で導入する飽和というものを使い、 $m$  山反転ニムの飽和を考えることで、エネルギーが (3.2) となるゲームを得ることができる。

## 4 $b$ -飽和

$b$ -飽和は Moore の  $\text{Nim}_b$  [6] と Flanigan の  $\text{Rim}_b$  <sup>\*5</sup> というゲームが元になっている。本節ではまず、 $b = 2$  の場合に飽和を定義した後、一般の場合に定義する。

### 4.1 $b = 2$ の場合.

飽和とは大まかに述べると、「辺を増やしていったとき、エネルギーが変わらなくなる状態」を指す。

そこでまず、辺を増やしていく方法から述べる。 $X, Y \in \mathbb{N}^m$  として、 $D^i = X^i - Y^i$  とおく。 $(X, Y)$  に対して次の条件を考える：

$$(*) \quad D^i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq m) \quad \text{かつ} \quad \text{ord}_2\left(\sum_{i=1}^m D^i\right) = \min\{\text{ord}_2(D^i) : 1 \leq i \leq m\}.$$

ただし、整数  $x$  に対して  $\text{ord}_2(x)$  は  $x$  の 2-adic order を表す：

$$\text{ord}(x) = \begin{cases} \max\{L \in \mathbb{N} : 2^L \mid x\} & \text{if } x \neq 0, \\ \infty & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

この条件を使い、2 以上の整数  $k$  に対して、ゲーム  $\mathcal{N}_{2,k}^m$  を次のように定義する。局面集合

<sup>\*5</sup>  $\text{Rim}_b$  は James A. Flanigan の未発表論文 “NIM, TRIM and RIM” で導入された。 $\text{Rim}_b$  と 4.2 節で定義する  $b$ -飽和ニムは、グラフとしては異なるが、同じエネルギー公式を持つ。

は、ニム  $\mathcal{N}^m$  と同じで  $\mathbb{N}^m$  とする. 一方, 辺集合は次とする:

$$\{(X, Y) \in \mathbb{N}^m : 0 < \text{dist}(X, Y) < k \text{ かつ } (*_2) \text{ をみたす}\}.$$

ここから, ゲーム  $\mathcal{N}_{2,2}^m, \mathcal{N}_{2,3}^m, \dots, \mathcal{N}_{2,k}^m, \dots$  を得る.  $k$  が大きくなるほど, Hamming 距離が大きくなるため, 辺が増えていくことに注意しよう. これが辺の増やし方である. なお, 定義から  $\mathcal{N}_{2,2}^m$  は  $\mathcal{N}^m$  そのものであり,  $m+1$  以上の  $k$  に対しては  $\mathcal{N}_{2,k}^m = \mathcal{N}_{2,m+1}^m$  である.

この方法で辺を増やしていくと何が起こるのだろうか. 実は, 辺を増やしていてもエネルギーが全く変わらない. すなわち, 任意の  $k \geq 2$  と任意の局面  $X \in P(\mathcal{N}^m)$  に対して, 次が成立する:

$$\text{eg}_{\mathcal{N}_{2,k}^m}(X) = \text{eg}_{\mathcal{N}^m}(X).$$

ところが, 同じことを反転ニムで考えると状況が違っている. 反転ニムの局面  $P(\tilde{\mathcal{N}}^{m,M})$  に誘導して得られる,  $\mathcal{N}_{2,k}^m$  の部分ゲームを  $\tilde{\mathcal{N}}_{2,k}^{m,M}$  で表そう. このとき, エネルギーを求めることができた三山の場合は, ニムと同様にエネルギーが全く変わらない. すなわち, 任意の  $k \geq 2$  と任意の局面  $X \in P(\tilde{\mathcal{N}}^{3,M})$  に対して次が成立する:

$$\text{eg}_{\tilde{\mathcal{N}}_{2,k}^{3,M}}(X) = \text{eg}_{\tilde{\mathcal{N}}^{3,M}}(X).$$

一方, 四山以上の場合は,  $k=2$  の場合だけ異なっており,  $k$  が 3 以上の場合は全て一致している. そして, このときのエネルギーは (3.2) になっている. すなわち,  $k \geq 3$  のとき任意の局面  $X \in P(\tilde{\mathcal{N}}^{m,M})$  に対して次が成立する:

$$\text{eg}_{\tilde{\mathcal{N}}_{2,k}^{m,M}}(X) = X^1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X^m \oplus_2 (2^M - 1) - \sum_{L=0}^{M-1} \delta(X_L^1) \cdots \delta(X_L^m) 2^{L+1}.$$

これは, 3.2 節で目標に掲げたゲームである.

それでは, 飽和の定義をする. ニム  $\mathcal{N}^m$  の誘導部分ゲーム  $\Gamma^m$  に対して,  $P(\Gamma^m)$  に誘導して得られる,  $\mathcal{N}_{2,k}^m$  の部分ゲームを  $\Gamma_{2,k}^m$  で表そう. このとき,  $\Gamma_{2,k}^m$  が  $\Gamma^m$  の **2-飽和** とは, 任意の  $h \geq k$  と任意の局面  $X \in P(\Gamma^m)$  に対して次が成立することと定義する:

$$\text{eg}_{\Gamma_{2,h}^m}(X) = \text{eg}_{\Gamma_{2,k}^m}(X).$$

この言葉を使うと, ニムと三山反転ニムは自分自身が 2-飽和になっていて, 四山以上の反転ニムは  $k$  が 3 以上のとき 2-飽和になっている.

## 4.2 一般の $b$ の場合

$b$  を 2 以上の整数とする. 4.1 節の 2 の部分を  $b$  に置き換えることで, 全く同様に  $b$ -飽和を定義できる.

例えば,  $b$ -飽和ニムや  $b$ -飽和 Welter ゲームのエネルギーは, それぞれのエネルギーの 2 の部分を  $b$  に置き換えることで得られる:

表2 エネルギー公式.

	$\text{eg}(X)$
$b$ -飽和ニム	$X^1 \oplus_b \cdots \oplus_b X^m$
$b$ -飽和 Welter ゲーム	$X^1 \oplus_b \cdots \oplus_b X^m \ominus_b \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} N_b(X^i - X^j)$

ただし,  $\oplus_b (\ominus_b)$  は  $b$  進展開して繰り上がり (繰り下がり) のない足し算 (引き算) を表す. また,  $N_b(x) = x \ominus_b (x-1) = \sum_{L=0}^{\text{ord}_b(x)} b^L$  である.

さらに  $b$ -反転ニムを次の集合に誘導して得られる,  $\mathcal{N}^m$  の部分ゲームとしよう:

$$\{X \in \mathbb{N}^m : \phi(X) \geq 0\}.$$

ただし,  $\phi(X)$  は (3.2) の右辺の 2 の部分を  $b$  で置き換えて得られる次の式を表す:

$$\phi(X) = X^1 \oplus_b \cdots \oplus_b X^m \oplus_b (b^M - 1) - \sum_{L=0}^{M-1} \delta(X_L^1) \cdots \delta(X_L^m) b^{L+1}.$$

ここで  $X_L^i$  は  $X^i$  を  $b$  進展開したときの  $L$  桁目を表す. すると  $b$ -飽和  $b$ -反転ニムのエネルギーは, 期待通り  $\phi(X)$  になる.

ここまですが講演で話した内容である. その後の研究で, 同様の方法を用いることで,  $b$ -飽和ニムと  $b$ -飽和  $b$ -反転ニムを含む, エネルギー公式を持つゲームのクラスを構成できた. このクラスについては, また別の機会に紹介したい.

## 参考文献

- [1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.

- [2] J. H. Conway. *On Numbers and Games*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.
- [3] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.
- [4] Y. Irie. p-saturations of Welter's Game and the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *arXiv:1604.07214*, 2016.
- [5] 川中宣明. フック構造をもつゲームとアルゴリズム. *数学*, 63(4):421–441, 2011.
- [6] E. H. Moore. A Generalization of the Game Called Nim. *Annals of Mathematics*, 11(3):93–94, 1910.
- [7] 佐藤幹夫 (上野健爾 記). あるゲームについて. 第 12 回代数分科会シンポジウム報告集, pp. 123–136, 1968.
- [8] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). Maya game について. *数学のあゆみ*, 15(1):73–84, 1970.
- [9] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). マヤ・ゲームの数学的理論. *数理解析研究所講究録*, 第 98 巻, pp. 105–135, 1970.
- [10] 佐藤幹夫 (梅田亨 記). 佐藤幹夫講義録 (1984 年度・1985 年度 1 学期). *数理解析レクチャー・ノート* 刊行会, 1989.
- [11] R. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41:438–444, 1935.
- [12] C. P. Welter. The Theory of a Class of Games on a Sequence of Squares, in Terms of the Advancing Operation in a Special Group. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 57:194–200, 1954.