数理解析研究所講究録
第2055巻 2017年 137-147

An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4

山内 卓也 (東北大学)

1 序論

本稿では，次数2の正則ジーゲル形式の佐武パラメータの等分布性に関する著者および Henry H. Kim (トロント大) と若槻聡氏 (金沢大) によって得られた最近の結果について述べる [4],[5].

この研究は [12],[9] の楕円保型形式の佐武パラメータの等分布性に端を発する。重さ2以上の楕円尖点新形式 f の素数 p でのヘッケ作用素の固有値を重さで正規化するとそれは区間 $[-2,2]$ に属することが知られている．ここで f を固定して p を動かすことで正規化された固有値は Sato-Tate 測度 $\mu_{ST}=\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$ に関して等分布することが佐藤幹夫氏よって予想され (Sato-Tate 予想と呼ばれる), 現在では定理となっている [1]. この予想の証明には非常に高度な技術を要する．一方, p を固定して f を動かすことで正規化された固有値の分布を論じることもできる．この問題は一部では vertical Sato-Tate 予想と呼ばれている．前者の Sato-Tate 予想は高次元版をこれまでの手法で証明するのは困難と思われるが vertical Sato-Tate 予想の方は近年の Arthur-Selberg 跡公式の進歩のお蔭で解析する手法が整い, 様々な設定で近年盛んに研究されている．特に Serre の結果 [12] の後に簡約代数群 G に対する Sauvageot[10] の結果に触発される形で Shin がかなり一般の設定で vertical Sato-Tate 予想を解決した [13]. Shin のアイデアは佐武パラメータの分布の問題をスペクトラル側の automorphic counting measure で書き換えその極限が (Hecke 環の元をテスト関数とすることで) Plancherel 測度に一致することを Arthur-Selberg 跡公式を巧みに用いて導く所にある[1].

その後その極限は誤差項付きで見直され, その結果は Low lying zeros や Hecke 体の次数の評価などに用いられている ([14],[15]).

ここで, 注意したいのは Sauvageot や Shin はすべての保型形式 (非正則なものも含む) を動かした上で佐武パラメータの分布を考察している．これに対して我々は群は GSp_4 に限

[1]このアイデアの源流は Serre や Sauvageot にあると言って良いと思われる.

るものの動かす保型形式は正則なものに限定することで佐武パラメータの分布を論じるということを目的とする．議論はShinのそれと本質的に同じあるが我々は正則保型形式を扱うためArthur-Selberg跡公式からその情報を抽出する際に幾何側で$GSp_4(\mathbb{Q})$の冪単元からくる寄与を計算しなくてはならない．この部分の明示的な評価がこの論文の重要な寄与のひとつである．このことによって単に問題を正則な場合に拡張したという結果のみならず[13],[14]では扱われなかった新しいweight aspectに関する結果やEndoscopic liftの寄与とunipotent contribution(Arthur invariant trace formulaを安定化するときの差)の寄与の比較などを得ることができる．スペクトル側では重さがregularでない場合にresidueスペクトル項とnon-regular weightをもつcohomological formの寄与を計算する必要があるがそこの部分は難しくはない．

これらの結果をさらに精密にするために[4]では正則ジーゲル形式であって小さな群からのLanglands関手による像になってない(endoscopic lift, CAP, Asai lift, Symmetric cube lift, Base change liftではないということ)ものに族を制限して等分布性をガロア表現のlocal-global compatibility (cf. [3],[16])とArthurの保型表現の分類(cf. [11])を仮定することで議論している．そのようなジーゲル形式に付随するガロア表現はほとんすべての素数ℓに対してそれに付随するℓ進表現の像のZariski閉包がSp_4を含むことが分かる．

まず，我々の研究の動機となった楕円保型形式のセールによる結果を簡単にまとめ，次に我々の扱った問題を紹介する．最後にこれまでに得られた結果を纏め今後の進展および展望などを述べる．

2 等分布性

この節の基本文献は[12]である．先ず等分布性の定義を述べるために幾つか準備を行う．

Xをコンパクト位相空間とする．X上のdistributionの成す空間を次で定める:

$$\mathrm{Dist}(X,\mathbb{R}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^0(X,\mathbb{R}),\mathbb{R}).$$

ここで$C^0(X,\mathbb{R})$はX上の連続関数全体の成す$\mathbb{R}$ベクトル空間である．distributionの例としてはX上の(positive Radon)測度μに対して積分をとるという操作

$$\mu(f) = \int_X f(x)d\mu(x),\ f\in C^0(X,\mathbb{R})$$

や点$x\in X$に対して，xでの値を対応させるという(Dirac測度による積分)

$$\delta_x(f) = f(x),\ f\in C^0(X,\mathbb{R})$$

などが挙げられる．

$\Lambda \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $\sup(\Lambda) = \infty$ となるような部分集合とする．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して X の有限部分集合 X_λ が与えられているとし，

$$\delta_\lambda := \frac{1}{|X_\lambda|} \sum_{x \in X_\lambda} \delta_x \in \mathrm{Dist}(X, \mathbb{R})$$

とおく．$\mu \in \mathrm{Dist}(X, \mathbb{R})$ に対して，$\mu(f) = \displaystyle\int_X f(x) d\mu(x)$, $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ と積分の形で表しておく．

Definition 2.1. $\mu \in \mathrm{Dist}(X, \mathbb{R})$ とする．このとき，$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X 上 μ に関して等分布するということを

$$\lim_{\lambda \to \infty} \delta_\lambda = \mu \text{ (弱収束)}$$

で定める．これは次の等式

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{|X_\lambda|} \sum_{x \in X_\lambda} f(x) = \mu(f), \ {}^\forall f \in C^0(X, \mathbb{R})$$

が成立することを意味する．以下ではこの状況を記号

$$X_\lambda \xrightarrow{\mu} X \ (\lambda \longrightarrow \infty)$$

で表す．

Example 2.1. 区間 $X = [0,1]$ 上にルベーグ測度 μ を考える．自然数 n ごとに X の n 個の点からなる集合 X_n とする．このとき，$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が X に μ に関して等分布するということは「任意の X 上の連続関数 $f(x)$ が X_n に関する区分による区分求積法で積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ が計算できるということ」，つまり，「$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は X の細分になっているということ」に他ならない．これは自明な例だが *counting measure* δ_λ が連続測度 μ に収束しているかどうかを連続関数 $f(x)$ で *"test"* していると理解する見方の好例になっている．

3 Serre の結果

この節では Serre が扱った $GL_2/\mathbb{Q}$ の場合の結果について述べる．基本文献は [12] である．自然数 k, N に対して $S_k(N) := S_k(\Gamma_0(N))$ によって重さ k, レベル $\Gamma_0(N)$ の保型形式の成す集合とする．$T_p = T_p(k, N)$, $p \nmid N$ を $S_k(N)$ 上に作用する Hecke 作用素とし，その作用素が

$\mathbb{Z}$ 上生成する $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_k(N))$ の部分代数を $\mathbb{T}_N^k$ と書くことにする. $S_k(N)$ は T_p, $p \nmid N$ の作用に関して同時固有関数となっているような基底 $f_1, \ldots, f_d$, $d = d(k,N) := \dim S_k(N)$ が取れる. 各 f_i をその無限遠点でのフーリエ係数が $f_i(q) = q + \sum_{n\geq 2} a_n(f_i)q^n$, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$ となるように正規化しておくと, $\mathbb{Q}_{f_i} := \mathbb{Q}(a_n(f_i) \mid n \geq 1)$ は $\mathbb{Q}$ 上の有限次代数拡大となることが知られている.

Deligne によって Ramanujan-Petersson bound $|a_p(f_i)| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}$, $p \nmid N$ が知られており, いま中心指標が自明であることから,

$$a'_p(f_i) := \frac{a_p(f_i)}{p^{\frac{k-1}{2}}} \in [-2,2]$$

となることが分かる (中心指標が自明でない場合は適当に正規化して $[-2,2]$ に入るよう調節する).

以下では $p \nmid N$ なる p をひとつ固定して考える. 上記の事実より k, N を index とする区間 $[-2,2]$ の有限集合

$$X_{k,N} := \{a'_p(f_i) \mid i = 1, \ldots, d = d(k,N)\}$$

の族を考えることができる. このとき「$\{X_{k,N}\}_{k,N}$ が $[-2,2]$ にどのような測度に関して等分布するかどうか?」という問いが考えられる. これに対して Serre の導いた答えは以下の通りである. $[-2,2]$ 上の測度

$$\mu_p^{\mathrm{Serre}} := \frac{p+1}{p+p^{-1}+2-x^2} \cdot \mu_{\mathrm{ST}},\ \mu_{\mathrm{ST}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$$

を考える.

Theorem 3.1. $X_{k,N} \overset{\mu_p^{\mathrm{Serre}}}{\longrightarrow} [-2,2]$ $(k+N \to \infty)$. つまり任意の $g \in C^0([-2,2],\mathbb{R})$ に対して次が成立:

$$\lim_{k+N\to\infty} \frac{1}{d(k,N)} \sum_{i=1}^{d(k,N)} g(a'_p(f_i)) = \int_{-2}^{2} g(x)d\mu_p^{\mathrm{Serre}}(x).$$

3.1 μ_p^{Serre} の意味

(正規化された)Hecke 同時固有関数 $f = f_i \in S_k(N)$ に付随する保型表現 π の p 成分を π_p とすると $p \nmid N$ より Deligne の結果より π_p は $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐主系列表現 $\pi_\theta = \pi(\chi_\theta, \chi_\theta^{-1})$, $\chi_\theta(p) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$ と同型になる. $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$ のユニタリ dual $\widehat{PGL_2(\mathbb{Q}_p)}$

の元で unramified tempered なもの全体の成す部分集合を $\widehat{PGL_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}}$ とすると, 位相空間としての同型

$$\widehat{PGL_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}} \simeq \mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z} = S^1,\ \pi_\theta \mapsto \theta$$

を得る (左辺には Fell 位相, 右辺には通常の Euclid 位相が誘導する位相を入れて考える). $\widehat{PGL_2(\mathbb{Q}_p)}$ には Harish-Chandra が定義した Plancherel 測度 μ^{Plan} が備わっており, それを $\widehat{PGL_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}}$ に制限し, 上述の同型で $S^1(\ni\theta)$ 上に引き戻したものを計算すると

$$\mu^{\mathrm{Plan}}|_{\widehat{PGL_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}}} = \left|\frac{1-e^{2i\theta}}{1-p^{-1}e^{2i\theta}}\right|^2 d\theta = \frac{\pi}{2}\mu_p^{\mathrm{Serre}},\ x = 2\cos\theta$$

となっている.

4 主結果

この節では [4] の主結果と証明の戦略について述べる. 記号はその論文のものを引用する. 整数 $k_1 \geq k_2 \geq 3$, $\underline{k} = (k_1, k_2)$ と自然数 N に対して, $S_{\underline{k}}(N)$ によって重さ $\underline{k} = (k_1, k_2)$ レベル $\Gamma(N) := \{X \in Sp_4(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv 1 \bmod N\}$, 中心指標自明な次数 2 の正則ジーゲル形式全体の成す集合とする. 素数 $p \nmid N$ と集合

$$M_p := \{t = \mathrm{diag}(p^{a_1}, p^{a_2}, p^{\kappa-a_1}, p^{\kappa-a_2}) \mid 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \kappa,\ a_1, a_2, \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

の元 t に対して $T_t = [\Gamma(N)t\Gamma(N)]$, $t \in M_p$ を対応する Hecke 作用素とする. $\mathbb{T} = \mathbb{T}(N, k_1, k_2)$ を $T_t, t \in M_p, p \nmid N$ が $\mathrm{End}(S_{k_1,k_2}(N))$ 内で生成する環を表す. $H_{\underline{k}}(N)$ によって $S_{\underline{k}}(N)$ の $\mathbb{T}$ に関する同時固有関数からなる基底とする (そういうものが取れることは保障されている). $d_{\underline{k}}(N) := \dim S_{\underline{k}}(N) = |H_{\underline{k}}(N)|$ とおく. さらに, $H_{\underline{k}}(N)$ の元で CAP 形式でないもの全体のなす部分集合を $H_{\underline{k}}(N)^{\mathrm{tm}}$ と表し, $d_{\underline{k}}^{\mathrm{tm}}(N) := |H_{\underline{k}}(N)^{\mathrm{tm}}|$ とおく. $(N, 11!) = 1$ を仮定すれば $\displaystyle\lim_{k_1+k_2+N\to\infty} \frac{d_{\underline{k}}(N)}{d_{\underline{k}}^{\mathrm{tm}}(N)} = 1$ が成り立つが, 仮定なしにこれは常に成立すると思われる.

以下では $p \nmid N$ を固定する. $F \in H_{\underline{k}}(N)^{\mathrm{tm}}$ に対応する $GSp_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 保型表現 π_F の local p-component π_p は $GSp_4(\mathbb{Q}_p)$ の標準ボレル部分群 $B(\mathbb{Q}_p)$ 上のユニタリ指標 χ を用いて

$$\pi_p \simeq \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{GSp_4(\mathbb{Q}_p)} \chi =: \pi_p(\chi)$$

の形にかける (Deligne の結果の類似で Laumon-Weissauer 等の結果より従う [7],[8],[18]. 最新の結果 [6] も参照). $t_1 = (p, 1, p^{-1}, 1)$, $t_2 = (1, p, 1, p^{-1})$ とおき,

$$\alpha_{F,p} := \chi(t_1),\ \beta_{F,p} := \chi(t_2)$$

を π_p の佐武パラメータとする．いま中心指標が自明と仮定してあるので，

$$a_{F,p} := \alpha_{F,p} + \alpha_{F,p}^{-1},\ b_{F,p} := \beta_{F,p} + \beta_{F,p}^{-1} \in [-2,2]$$

が成り立つ．組 $(a_{F,p}, b_{F,p})$ は $\alpha_{F,p}, \beta_{F,p}$ の選択によるので well-defined ではないが，$\Omega := [-2,2]^2/\mathfrak{S}_2$ の元としては well-defined である．ここで，$\underline{k}, N$ に対して Ω の有限集合

$$X_{\underline{k},N} := \{(a_{F,p}, b_{F,p}) \in \Omega \mid F \in H_{\underline{k}}(N)^{\mathrm{tm}}\}$$

を考える．Ω の測度 μ_p を次で定める:

$$\mu_p := f_p(x,y) g_p^+(x,y) g_p^-(x,y) \mu_{\mathrm{ST}}.$$

ただし，

$$f_p(x,y) = \frac{(p+1)^2}{\left(\left(\sqrt{p}+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2 - x^2\right)\left(\left(\sqrt{p}+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2 - y^2\right)},\ \mu_\infty^{\mathrm{ST}} = \frac{(x-y)^2}{\pi^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\sqrt{1-\frac{y^2}{4}},$$

$$g_p^{\pm}(x,y) = \frac{p+1}{\left(\sqrt{p}+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2 - 2\left(1+\frac{xy}{4} \pm \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right)}.$$

この時次が成立する．

Theorem 4.1. 素数 p を固定する．N, k_1, k_2 が $(N, p\cdot 11!) = 1$ を満たしながら $N+k_1+k_2 \to \infty$ となるとき，$\{X_{\underline{k},N}\}_{\underline{k},N}$ は μ_p に関して Ω に等分布する．つまり任意の $f = f(x,y) \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ に対して次が成立:

$$\lim_{\substack{N+k_1+k_2\to\infty \\ (N,p\cdot 11!)=1}} \frac{1}{d_{\underline{k}}^{\mathrm{tm}}(N)} \sum_{F\in H_{\underline{k}}(N)^{\mathrm{tm}}} f(a_{F,p}, b_{F,p}) = \int_\Omega f(x,y)\mu_p.$$

4.1 μ_p の意味

Serre の定義した測度の意味を説明したが同様に μ_p を $PGSp_4(\mathbb{Q}_p)$ の Plancherel 測度として理解できる (Proposition 3.3 [15] を参照)．実際，ユニタリ双対 $\widehat{PGSp_4(\mathbb{Q}_p)}$ の元であって unramified tempered 表現全体の成す集合を $\widehat{PGSp_4(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}}$ とすると，位相群としての同型

$$\widehat{PGSp_4(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}} \simeq \Omega,\ \pi_p(\chi) \mapsto (\chi(t_1)+\chi^{-1}(t_1), \chi(t_2)+\chi^{-1}(t_2))$$

を得る．μ_p は $\widehat{PGSp_4(\mathbb{Q}_p)}$ の Planchrel 測度 μ_p^{Plan} を $\widehat{PGSp_4(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}}$ に制限し同型で Ω に引き戻したものに他ならない．

4.2 証明の方針

証明は Shin のアイデアに依る．ただし，我々の場合は正則保型形式のみを考えるため Arthur-Selberg 跡公式を応用する際に Shin の設定では起こらなかった新たな困難が生じる．それは後で説明するが unipotent 元による寄与である．安定跡公式の観点からみるとこれは Arthur-Selberg 跡公式を安定化するときに生じる endoscopic subgroup からの寄与を計算することに他ならない．定理の主張をスペクトルサイドで再定式化しそれを幾何サイドに移行し Arthur-Selberg 跡公式を用いて計算を実行するという大まかな手順である．

先ず automorphic counting measure を次の様に定義していく．$G = GSp_4$ とし，Z_G で G の中心を表す．$\xi_{\underline{k}}$ で highest weight (k_1, k_2) の $G(\mathbb{R})$ の代数的表現とし，$G(\mathbb{R})$ の離散系列表現 $D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}$ で Harish-Chandra parameter $(\ell_1, \ell_2) = (k_1 - 1, k_2 - 2)$ をもちかつ中心指標が $A_{G,\infty} := Z_G(\mathbb{R})^0 \simeq \mathbb{R}_{>0}$ 上で $\xi_{\underline{k}}^\vee$ のそれと一致するものを考える．素数 p を固定し，$\mu^{p,\infty}$ を $G(\mathbb{A}^{p,\infty})$ 上の Haar 測度で $\mu^{p,\infty}(\widehat{\mathbb{Z}}^p) = 1$ となるものとする．このとき，任意の開コンパクト群 $U \subset G(\mathbb{A}^{p,\infty})$ に対して

$$\widehat{\mu}_{U,\xi_{\underline{k}},D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}} := \frac{1}{\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})A_{G,\infty}\backslash G(\mathbb{A}))\cdot \dim \xi_{\underline{k}}} \sum_{\pi_p^0 \in \widehat{G(\mathbb{Q}_p)}} \mu^{p,\infty}(U) m_{\mathrm{cusp}}(\pi_p^0; U, \xi_{\underline{k}}, D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}) \delta_{\pi_p^0,\xi_{\underline{k}}},$$

ただし，$\delta_{\pi_p^0,\xi_{\underline{k}}}$ は π_p^0 にサポートを持つ正規化された $G(\mathbb{Q}_p)$ 上の Dirac delta measure であり cuspidal multiplicity を

$$m_{\mathrm{cusp}}(\pi_p^0; U, \xi_{\underline{k}}, D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}) := \sum_{\substack{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})) \\ \pi_p \simeq \pi_p^0,\ \pi_\infty \simeq D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}}} m_{\mathrm{cusp}}(\pi) \mathrm{tr}(\pi^{S',\infty}(f_U)) \cdot \mathrm{tr}(\pi_\infty(f_{\xi_{\underline{k}}})).$$

で決める．ここで，$\Pi(G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$ の cuspidal automorphic representation の同型類全体の成す集合，$f_{\xi_{\underline{k}}}$ は $D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}$ の義 pseudo-coefficient である．p での Hecke ring $C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p))$(局所定数関数全体の成す環) を $f \mapsto \widehat{f} := [\pi \mapsto \mathrm{tr}\pi(f)]$ によって unitary dual $\widehat{G(\mathbb{Q}_p)}$ の distribution とみなす．

以下簡単のため $\ell_2 > 1$ を仮定する (これによりスペクトル側が簡単になる)．$\ell_2 = 1$ のときはスペクトル側に residue スペクトルと pseudo 係数が拾ってくる discrete series ではない form の寄与が出てくる．このとき先ず最初の step として次の等式を得る ([13] の Proposition 4.2 または [4] の Proposition 5.3)：$f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p))$ に対して，

$$\widehat{\mu}_{U,\xi_{\underline{k}},D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}}(\widehat{f}) = \frac{I_{\mathrm{spec}}(f \cdot \mathrm{char}_U \cdot f_\xi)}{\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})A_{G,\infty}\backslash G(\mathbb{A}))\cdot \dim \xi_{\underline{k}}} = \frac{I_{\mathrm{geom}}(f \cdot \mathrm{char}_U \cdot f_\xi)}{\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})A_{G,\infty}\backslash G(\mathbb{A}))\cdot \dim \xi_{\underline{k}}}.$$

ここで，$I_{\mathrm{spec}}, I_{\mathrm{geom}}$ はそれぞれ Hecke 作用素 $\widetilde{f} = f \cdot \mathrm{char}_U \cdot f_\xi$ のスペクトル側，幾何側でのトレースである．この等式は automorphic counting measure の定義 と Arthur の結果の直

接の帰結であり新しい input は何もないが大事な一歩である．幾何側では Arthur により次の展開が分かっている:

$$c_{\underline{k}} I_{\mathrm{geom}} = c_{\underline{k}} \sum_{M \in \mathcal{L}} (-1)^{3+\dim A_M/A_G} \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum_{\gamma \in (M(\mathbb{Q}))_{M,S}} a^M(S,\gamma) I_M^G(\gamma, f_{\xi_{\underline{k}}}) J_M^M(\gamma, h_P),$$

$c_{\underline{k}} := \dfrac{1}{\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})A_{G,\infty}\backslash G(\mathbb{A})) \cdot \dim \xi_{\underline{k}}}$. 各項に現れる記号の説明は [4] の 5,6 節を参照．右辺の和は有限和であり p を含む素点の有限集合 S は十分大きく選ぶ (S の選択は f に依る)．$\mathcal{L}$ は標準 Borel subgroup を含む G の parabolic subgroup $P = MN$ の Levi factor $M = M_P$ 全体の集合である (G も含める)．これは有限集合となる．$a^M(S,\gamma)$ は大域係数と呼ばれ γ の中心化の Levi part の Tamagawa measure に近いものである．また $I_M^G(\gamma, f_{\xi_{\underline{k}}})$ は invariant weighted orbital integral と呼ばれこの部分は指標公式 (を修正した極限公式) から具体的に計算可能であり $\underline{k}$ のみに寄る．Orbital integral $J_M^M(\gamma, h_P)$ は level U ($U = K(N) := (I_4 + NM_4(\widehat{\mathbb{Z}})) \cap GSp_4(\widehat{\mathbb{Z}})$ のときは N) と f による．このとき, I_{geom} を共役類の種類によって次のように分ける:

$$I_{\mathrm{geom}}(f) = I_1(f) + I_2(f) + I_3(f) + I_4(f) + I_5(f) + I_6(f) + I_7(f),$$

- $I_1(f)$: $M = G$ かつ $\gamma \in Z_G(\mathbb{Q})$,
- $I_2(f)$: $M = G$ かつ $\gamma \in Z_G(\mathbb{Q})\{u_{\min}\}_G$,
- $I_3(f)$: $M = G$ かつ $\gamma \in Z_G(\mathbb{Q})\{\delta_1\}_G$,
- $I_4(f)$: $M = G$ かつ γ は semisimple で $\gamma \notin Z_G(\mathbb{Q}) \sqcup Z_G(\mathbb{Q})\{\delta_1\}_G$ を満たす,
- $I_5(f)$: $M = G$ かつ γ は non-semisimple で $\gamma \notin Z_G(\mathbb{Q})\{u_{\min}\}_G$ を満たす,
- $I_6(f)$: $M \neq G$ かつ γ は semisimple,
- $I_7(f)$: $M \neq G$ かつ γ は non-semisimple.

ただし,

$$u_{\min}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & y \\ 0 & -1 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \end{pmatrix}, \ u_{\min} = u_{\min}(1), \quad \delta_1 = \delta_1(0,0).$$

各共役類に応じた計算は次のように行う．先ず γ が semisimple のときには [14] を適用する (彼らは無限素点で total peseudo 係数をといっているので semisimple element の寄与の

みを考えればよいという設定である). 問題は non-semisimple element の寄与を計算するのであるが大域係数 $a^M(S,\gamma)$ の寄与が最も非自明な部分は S の外不分岐な 2 次体の Hecke character の L 関数の $s=1$ での値で bound される. その他の部分は具体的な共役類の形に応じて直接計算を実行する.

f が $\mathrm{diag}(p^{a_1},p^{a_2},p^{\kappa-a_1},p^{\kappa-a_2}) \in M_p$ かつ $U=K(N)$ のとき, 各項の寄与は次のようになる:

$I_i(f)$	level aspect $(N\to\infty)$	weight aspect $(k_1+k_2\to\infty)$
$I_1(f)$	$-\mu_p(\widehat{f})$	$-\mu_p(\widehat{f})$
$I_2(f)$	1st main term A	1st main term B_1
$I_3(f)$	0	1st main term B_2
$I_4(f)$	0	2nd main term
$I_5(f)$	0	2nd main term
$I_6(f)$	2nd main term	2nd main term
$I_7(f)$	0	0

表 1:

Theorem 4.2. $\{(K(N),\xi_{\underline{k}})\}$ を $p\nmid N$, $k_1\geq k_2\geq 3$ $N+k_1+k_2\longrightarrow\infty$ をみたす族とする. このとき上記 f に対して

$$\lim_{k_1+k_2+N\to\infty}\widehat{\mu}_{K(N),\xi_{\underline{k}},D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}}(\widehat{f})=\mu_p(\widehat{f}).$$

より詳しく G のみによるある定数 a,b,a',b' があって

1. *(level-aspect)* k_1,k_2 *を固定するとき*, $N\gg p^{10\kappa}$ *に対して*,

$$\widehat{\mu}_{K(N),\xi_{\underline{k}},D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}}(\widehat{f})=\mu_p(\widehat{f})+A+O(p^{a\kappa+b}\varphi(N)N^{-3}),\quad A=O(p^{\kappa}\varphi(N)N^{-2}),$$

ここで φ *は Euler 関数:*

2. *(weight-aspect)* N *を固定し*, $k_1+k_2\to\infty$ *のとき*,

$$\widehat{\mu}_{K(N),\xi_{\underline{k}},D^{\mathrm{hol}}_{\ell_1,\ell_2}}(\widehat{f})=\mu_p(\widehat{f})+B_1+B_2+O(\frac{p^{a'\kappa+b'}}{(k_1-k_2+1)(k_1-1)(k_2-2)}),$$

$$B_1=O(\frac{p^{\kappa}}{(k_1-1)(k_2-2)}),\ B_2=O(\frac{p^{\kappa}}{(k_1-k_2+1)(k_1+k_2-3)}).$$

Remark 4.3. *A, B_1 の寄与はスペクトル側における generic endoscopic lift で L-packet が singleton なものの寄与に対応していると推察される (Section 11 [4]). 一方で B_2 のスペクトル側での寄与がどういうものかは推測すら立っていない. また Shin の定義した automorphic counting measure と我々のものとのずれは Section 11 [4] で議論されている.*

5 応用・進展

ここでは触れなかったが次の内容に応用・進展がある:

1. Low lying zeros ([4] の Section 9)
2. Hecke 体の次数の評価 ([5])
3. 他の離散群への一般化 (paramodular groups) ([5])

他にも 保型 L 関数の中心値での解析的ランクの平均 ([2] の一般化) を考察することも興味深い問題であると思われる.

参考文献

[1] Barnet-Lamb, Tom; Geraghty, David; Harris, Michael; Taylor, Richard A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 47 (2011), no. 1, 29-98

[2] A. Brumer, *The rank of $J_0(N)$*. Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). Astérisque No. 228 (1995), 3, 41-68.

[3] A. Jorza, Galois representations for holomorphic Siegel modular forms, Math. Ann. (2013) 355, 381-400.

[4] H. H. Kim, S. Wakatsuki, and T. Yamauchi, *An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4*, preprint 2015.

[5] H. H. Kim, S. Wakatsuki, and T. Yamauchi, *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4; Hecke fields and n-level density*, preprint 2017.

[6] A. Kret, S.W. Shin, Galois representations for general symplectic groups, arXiv:1609.04223, 2016.

Proc. Amer. Math. Sci, **131** (2002), 1641–1648.

[7] G. Laumon, *Sur la cohomologie a supports compacts des varietes de Shimura pour* $GSp(4)_{\mathbb{Q}}$, Comp. Math. **105** (1997), no. 3, 267–359.

[8] G. Laumon, *Fonctions zetas des varietes de Siegel de dimension trois*, Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4). Astérisque No. **302** (2005), 1–66.

[9] P. Sarnak, *Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators*, Analytic number theory and Diophantine problems (Stillwater, OK, 1984), 321-331, Progr. Math., 70, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.

[10] F. Sauvageot, *Principe de densité pour les groupes réductifsà Solène, pour son premier sourire*, Compos. Math. **108** (1997), 151–184.

[11] R. Schmidt, Packet structure and paramodular forms, preprint 2016.

[12] J-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke* T_p, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75-102.

77 1963 33-71.

[13] S.W. Shin, *Automorphic Plancherel density theorem*, Israel J. Math. 192 (2012), no. 1, 83-120.

[14] S.W. Shin and N. Templier, *Sato-Tate theorem for families and low-lying zeros of automorphic L-functions*, Inv. Math., **203** (2016), no. 1, 1-177.

[15] S.W. Shin and N. Templier, *On fields of rationality for automorphic representations*, Compos. Math. **150** (2014), no. 12, 2003-2053.

[16] C M. Sorensen, *Galois representations attached to Hilbert-Siegel modular forms*, Doc. Math. **15** (2010), 623-670.

[17] R. Weissauer, Existence of Whittaker models related to four dimensional symplectic Galois representations. Modular forms on Schiermonnikoog, 285-310, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[18] R. Weissauer, Endoscopy for $GSp(4)$ and the cohomology of Siegel modular threefolds. Lecture Notes in Mathematics 1968. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

山内卓也
東北大学大学院 理学研究科
e-mail: yamauchi@math.tohoku.ac.jp