

# クープマン作用素による非線形ダイナミクスの解析と 電力・エネルギーシステムへの応用<sup>1</sup>

大阪府立大学・工学研究科・電気情報システム工学分野 薄 良彦

Yoshihiko Susuki

Department of Electrical and Information Systems

Osaka Prefecture University

## 1 はじめに

近年、実世界の複雑現象を観測し、大規模時系列データとして利用可能になったことを背景として、データの利用による様々な社会的課題の解決への期待が高まっている。システム工学の観点では、観測時系列データから複雑現象の本質部分を数学的に抽出し理解した上で、その理解に基づき所望の動作を行うシステムを設計することが求められる。このシステムの設計には、予測、同定、意思決定、制御、解析、保守などの様々な機能をデータから実現することが必要となる。

データの利用によりエネルギー・環境・モビリティ・ヘルスケアなどの多様な社会的課題に系統的に取り組むためには、課題毎に個別対処的に方法を開発していくことに加えて、観測データから機能の実現に至るメカニズムを記述する数学的基盤の構築が必要となる。ここでは、簡素な数学モデルを対象とした伝統的な非線形力学系とは異なる問題設定があり、実データを規範とする意味で現象に根差し、実システムの設計に貢献する非線形力学系の新しい芽がある。

筆者らは、電力・エネルギーシステムの実問題への適用を通して、データから機能を実現する系統的方法論の研究を非線形力学系をベースに進めている。特に、非線形力学系に対して定義されるクープマン作用素 [2, 3] とこれに基づくクープマンモード分解 [4, 5] と呼ぶ時系列データ解析法に着目し研究に取り組んできた [6-12]。クープマン作用素とは、非線形力学系に対して定義される線形作用素であり、力学系の観測量の時間発展を表す。この作用素は元の非線形力学系の情報を保持した線形作用素であり、線形作用素のスペクトルの性質に基づいた非線形力学系の解析が可能となる [4, 13-21]。特に、クープマンモード分解 (Koopman Mode Decomposition: KMD) とは、クープマン作用素の離散スペクトルに基づく時系列データ解析法であり、非線形性に起因する複雑な振る舞いの時系列データを複数の単一周波数時系列に分解する方法である [4, 5]。観測時系列データから KMD を実行するアルゴリズムが報告されており (詳細は 3 節を参照)、クープマン作用素を介して観測データから現象の背後にある力学系の情報を抽出することが期待できる。KMD の実システムへの適用は、流体力学 [5, 22, 23] や電力・エネルギーシステム [6, 24] で当初報告され、現在では様々な分野で報告されている [25-27]。

本報告では、KMD の理解を目標として、クープマン作用素に基づく非線形ダイナミクスの解析について説明する。本解析については、優れた解説 [22, 28] があり、理論面に関

---

<sup>1</sup>本文は筆者の解説記事 [1] に加筆したものである。

する詳細な記述がある。本報告では, [22, 28] が出版されてから現在に至る研究動向を含めて, クープマン作用素の定義から KMD の導入, 算出アルゴリズムまでを説明するとともに, 筆者らの電力・エネルギーシステムへの応用事例 [29–32] を紹介する。なお, 関連する和文解説として筆者の報告 [33] があり, 最近の報告 [12] も合わせて, 記述に重複した部分があることをあらかじめ付記する。

## 2 クープマン作用素

本節では, 非線形力学系に対するクープマン作用素を導入し, そのスペクトルについて述べる。なお, 現象の観測により得られた時系列データを解析するという観点から, 本報告では離散時間力学系を対象とした導入を行う。

### 2.1 導入

次式で記述される離散時間力学系を考える。

$$\mathbf{x}[t+1] = \mathbf{T}(\mathbf{x}[t]), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X} \quad (1)$$

ここで,  $t = 0, 1, \dots$  は離散時刻を表すインデックス,  $\mathbf{x}$  は状態変数,  $\mathbb{X}$  は有限次元の状態空間,  $\mathbf{T}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  は非線形の写像である。今, 観測量と呼ぶ状態空間  $\mathbb{X}$  から複素数  $\mathbb{C}$  への関数  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$  を導入する。実数値を返す  $f$  は KMD が扱う観測時系列データの数理モデルに相当し, 観測量の概念は現象の観測データと現象の背後にある力学系を結びつける意味で重要となる。以下において観測量の空間を  $\mathcal{F}$  と表す。  $\mathcal{F}$  は関数を要素として有し, 一般に無限次元の空間になる (この点は本小節の最後に補足する)。今, 観測量  $f$  から新しい観測量を作る写像 (作用素)  $\mathbf{U}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  を

$$(\mathbf{U}f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{T}(\mathbf{x}))$$

と定義する。このとき, 式 (1) の写像  $\mathbf{T}$  の下での観測量の時間発展  $f(\mathbf{x}[t])$  は

$$f(\mathbf{x}[t]) = f(\mathbf{T}(\mathbf{x}[t-1])) = (\mathbf{U}f)(\mathbf{x}[t-1]) = (\mathbf{U}^2 f)(\mathbf{x}[t-2]) = \dots = (\mathbf{U}^t f)(\mathbf{x}[0])$$

と書ける。この  $\mathbf{U}$  は, クープマン作用素 [2, 3] と呼ばれ, 写像  $\mathbf{T}$  の下での観測量  $f$  の時間発展を表す作用素である。ここで, 元の力学系 (1) が有限次元で非線形であるのに対して,  $\mathbf{U}$  は (関数を関数に移すという性質から一般に) 無限次元となるものの線形である。実際, 2つの観測量  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$  及びスカラー  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  に対して

$$\mathbf{U}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\mathbf{x}) = \alpha_1 f_1(\mathbf{T}(\mathbf{x})) + \alpha_2 f_2(\mathbf{T}(\mathbf{x})) = \alpha_1 (\mathbf{U}f_1)(\mathbf{x}) + \alpha_2 (\mathbf{U}f_2)(\mathbf{x})$$

となることから,  $\mathbf{U}$  の線形性が示される。本報告の基本アイデアは, 式 (1) の非線形力学系で記述されるダイナミクスを線形作用素  $\mathbf{U}$  のスペクトルの性質を用いて解析する点にある。

ここで、観測量の空間  $\mathcal{F}$  にどのような関数空間を導入するかは、力学系 (1) の性質に依存し、 $\mathbf{U}$  のスペクトル構造に影響を与える。古典的エルゴード理論 [34] では、力学系 (1) の状態空間  $\mathcal{X}$  はコンパクトでかつ写像  $\mathbf{T}$  が測度保存の場合を考える。この場合には二乗可積分関数の空間  $L^2$  が  $\mathcal{F}$  として採用されてきた。一方、測度保存ではなく散逸を有する系を扱う場合等について、 $\mathcal{F}$  をどのように導入するかには議論の余地がある。なお、散逸系でアトラクタ上のダイナミクスに着目する場合には  $L^2$  が採用できる。また、[16] では、漸近安定な平衡点を有する連続時間力学系を解析するために、安定平衡点の吸引領域（引力圏）上で定義される解析関数の空間を  $\mathcal{F}$  として採用している。

## 2.2 離散スペクトル

次に、線形作用素であるクーブマン作用素  $\mathbf{U}$  の離散スペクトルについて述べる。 $\mathbf{U}$  は無限次元であることから、離散スペクトルに加えて連続スペクトルを有し得る。ただ、本報告の目標である KMD の理解にあたっては、有限次元行列とのアナロジーで理解可能な離散スペクトルで十分であるので、本報告では連続スペクトルに関する記述を省略する。なお、文献 [12, 35] には連続スペクトルに関する議論がある。

力学系 (1) に対するクーブマン作用素  $\mathbf{U}$  の固有値  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  ならびに固有関数  $\phi_j \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$  は次式を満たすものとして定義される。

$$\mathbf{U}\phi_j = \lambda_j\phi_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

本報告では、 $\lambda_j$  を  $j$  次クーブマン固有値、 $\phi_j$  を  $j$  次クーブマン固有関数と呼ぶ。

簡単な例として、次の有限次元線形力学系を考える。

$$\mathbf{x}[t+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[t], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

ここでは、行列  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は  $n$  個の相異なる固有値  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) を有するとする。この場合、 $\lambda_j$  に対応する  $\mathbf{A}$  の左固有ベクトルを  $\mathbf{u}_j^\top$  で表し ( $\top$  は転置を表す)、スカラー関数  $\phi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_j^\top \mathbf{x}$  を定義する。この時、 $(\mathbf{U}\phi_j)(\mathbf{x})$  を計算すると

$$(\mathbf{U}\phi_j)(\mathbf{x}) = \phi_j(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{u}_j^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_j \mathbf{u}_j^\top \mathbf{x} = \lambda_j \phi_j(\mathbf{x})$$

となる。よって、 $\phi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_j^\top \mathbf{x}$  は線形力学系 (2) に対するクーブマン作用素の固有関数となり、これに対応するクーブマン固有値は  $\lambda_j$  と一致する。

次節に進む前に、クーブマン固有関数を用いた非線形力学系の変換について紹介する。[16] を参考に、クーブマン固有関数  $\phi_j(\mathbf{x})$  を用いた力学系 (1) の座標変換を導入する。

$$z_j = \phi_j(\mathbf{x}), \quad z_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \dots$$

このとき、上式と式 (1) より

$$z_j[t+1] = \phi_j(\mathbf{x}[t+1]) = \phi_j(\mathbf{T}(\mathbf{x}[t])) = (\mathbf{U}\phi_j)(\mathbf{x}[t]) = \lambda_j \phi_j(\mathbf{x}[t]) = \lambda_j z_j[t]$$

と計算できるので、 $\mathbf{z} := [z_1, z_2, \dots]^\top$  と表すと次式を得る。

$$\mathbf{z}[t+1] = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}[t], \quad \mathbf{\Lambda} := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \quad (3)$$

これは非線形力学系 (1) をクープマン固有関数を介して (無限次元の) 線形力学系 (3) へ変換する可能性を示している. このアイデアを使えば, 非線形力学系に線形力学系の方法論を適用することが可能になるため, 制御理論分野で研究が進みつつある [36].

### 3 クープマンモード分解

本節では, クープマン作用素の離散スペクトルに基づく時系列データ解析法であるクープマンモード分解 (KMD) を説明する.

#### 3.1 導入

今, 多変数データを扱うことを念頭に,  $M$  次元ベクトル値の観測量  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_M]^\top : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}^M$  ( $f_i \in \mathcal{F}$ ) を考える. ここで, [5] に倣って, 各観測量  $f_i$  が  $\mathbf{U}$  の固有関数  $\phi_j$  により展開可能であるとする.

$$f_i = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j V_{ij}$$

ここで  $V_{ij} \in \mathbb{C}$  は  $f_i$  の展開係数である. このとき, 力学系 (1) の下での観測量の時間発展  $f_i(\mathbf{x}[t])$  は以下の通り計算できる.

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}[t]) &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\mathbf{x}[t]) V_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\mathbf{T}(\mathbf{x}[t-1])) V_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{U}\phi_j)(\mathbf{x}[t-1]) V_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \phi_j(\mathbf{x}[t-1]) V_{ij} = \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^t \phi_j(\mathbf{x}[0]) V_{ij} \end{aligned}$$

これをベクトル値の観測量  $\mathbf{f}$  でまとめると次式を得る.

$$\mathbf{y}[t+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[t]) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^t \phi_j(\mathbf{x}[0]) \mathbf{V}_j \quad (4)$$

ここで, 複素ベクトル  $\mathbf{V}_j := [V_{1,j}, \dots, V_{M,j}]^\top \in \mathbb{C}^M$  はクープマンモード [5] と呼ばれる. 式 (4) は, 非線形力学系 (1) の出力  $\mathbf{y}[t] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[t])$  が単一周波数を有する (無限個の) 振動モードへ分解されることを意味している. このとき, クープマン固有値  $\lambda_j$  は各振動モードの周波数ならびに減衰率を与え, クープマンモード  $\mathbf{V}_j$  は各振動モードが出力  $\mathbf{y}[t]$  の各成分へ与える影響 (寄与) を表す. これは, 線形力学系における出力のモード分解の非線形力学系への一般化と見なされ, クープマンモード分解 (KMD) と呼ばれる.

上記では対象とする観測量がクープマン作用素の固有関数により展開可能という仮定を置いた. この仮定がどのような力学系と観測量の空間に対して成立するかについては議論の余地がある. 2.1 節の最後に述べた測度保存力学系の場合,  $\mathbf{U} : L^2 \rightarrow L^2$  がユニタリー作用素となる [34]. この場合には  $\mathbf{U}$  のスペクトル分解が可能となり, 任意の観測量の時

間発展が、離散スペクトルによる分解を表す式 (4) と連続スペクトルの寄与分の和として表現できる。具体的には、任意の観測量  $f \in \mathcal{F}$  に対して

$$f(\mathbf{x}[t]) = \mathbf{U}^t f(\mathbf{x}[0]) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^t (\mathbf{P}_j f)(\mathbf{x}[0]) + \left( \int_0^{2\pi} \exp(it\theta) dE(\theta) \right) f(\mathbf{x}[0])$$

が成り立つ [4]。ここで、 $\mathbf{P}_j$  は  $\lambda_j$  に対応する射影作用素であり、観測量の空間  $\mathcal{F}$  上に内積  $(\cdot, \cdot)$  を考えると、射影操作  $(\mathbf{P}_j f)(\mathbf{x}) = (f, \phi_j) \phi_j(\mathbf{x})$  を表す。また、 $dE(\theta)$  は絶対連続なスペクトル測度である。さらに、[16] では、安定平衡点の吸引領域上で定義される解析関数の空間を  $\mathcal{F}$  として、連続時間力学系に対して式 (4) と類似の公式を任意の観測量に対して導出している。

### 3.2 算出アルゴリズム

本報告の初めに述べたデータ利用の観点では、クープマン固有値 (KE) やクープマンモード (KM) を元の力学系 (1) を知ることなく観測時系列データから求めることが望ましい。KE  $\lambda_j$  が既知の下で、観測時系列データより KM を計算する方法としては、フーリエ変換と類似した次の公式がある [4]。

$$\phi_j(\mathbf{x}[0]) \mathbf{V}_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}[t]) \exp(-i2\pi\nu_j t)$$

ここで、 $i$  は虚数単位を表し、 $\nu_j := \text{Im}[\ln \lambda_j] / (2\pi) \in [-1/2, 1/2)$  は KE から決定される。この公式は力学系 (1) が測度保存でエルゴード的 [34] である場合に有効である。実際、この公式はクープマン固有関数  $\phi_j$  が張る固有空間への観測量  $f_i$  の射影をエルゴード性を利用して時間に関する調和平均 [37] で表したものである。上の公式を具体的な時系列データに適用する場合には、 $\nu_j$  に相当する周波数を FFT を用いて推定すればよい。より一般的な力学系の観測時系列データに対しては、ラプラス変換と類似の公式が [19, 22] で報告されている。

次に、KM だけでなく KE も合わせて観測時系列データから直接算出する方法として、アーノルディ型アルゴリズム [5] を紹介する。このアルゴリズムは流体 [5]、電力システム [6-11]、ビルディング [24] のデータ解析に使用されている。

今、一定間隔の観測により得られた有限時間の観測時系列データ

$$\{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{N-1}\}, \quad \mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^M \quad (5)$$

を考える。ここで  $N$  は有限の時間サンプル数である。このとき、アーノルディ型アルゴリズムは以下の手順により  $N-1$  対の複素数  $\tilde{\lambda}_j \in \mathbb{C}$  及び複素ベクトル  $\tilde{\mathbf{V}}_j \in \mathbb{C}^M$  を算出する。

- (i) 時系列データから  $N-1$  個の定数  $c_j$  ( $j = 0, \dots, N-2$ ) を以下を満たすように求める。

$$\mathbf{R} = \mathbf{y}_{N-1} - \sum_{j=0}^{N-2} c_j \mathbf{y}_j, \quad \mathbf{R} \perp \text{span}\{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{N-2}\}$$

(ii)  $c_j$  を用いて次のコンパニオン行列  $C$  を定義する.

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{N-2} \end{bmatrix}$$

(iii) 行列  $C$  の  $N-1$  個の固有値  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{N-1}$  を求める.

(iv)  $\tilde{\lambda}_j$  を用いて次のファンデルモンド行列  $T$  を定義する.

$$T := \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\lambda}_1 & \tilde{\lambda}_1^2 & \cdots & \tilde{\lambda}_1^{N-2} \\ 1 & \tilde{\lambda}_2 & \tilde{\lambda}_2^2 & \cdots & \tilde{\lambda}_2^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tilde{\lambda}_{N-1} & \tilde{\lambda}_{N-1}^2 & \cdots & \tilde{\lambda}_{N-1}^{N-2} \end{bmatrix}$$

(v) 行列  $V := [\mathbf{y}_0 \dots \mathbf{y}_{N-2}]T^{-1}$  の  $j$  番目の列ベクトルを  $\tilde{V}_j$  と表す.

以上より,  $\tilde{\lambda}_j$  が相異なる場合, 時系列データ (5) に対する以下の分解が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\lambda}_j^t \tilde{V}_j, \quad t = 0, \dots, N-2 \\ \mathbf{y}_{N-1} &= \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\lambda}_j^{N-1} \tilde{V}_j + \mathbf{R} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

なお  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^M$  は分解の剰余分を表す. 上式と式 (4) より,  $\tilde{\lambda}_j$  及び  $\tilde{V}_j$  はそれぞれ KE  $\lambda_j$  及び KM と固有関数 (の初期値に対する値) の積  $\phi_j(\mathbf{x}[0])\mathbf{V}_j$  に対応することがわかる. 以下では, スカラー倍のみの違いであるので,  $\tilde{V}_j$  を  $j$  次 KM と呼ぶ.

ここで, 上記のアーノルディ型アルゴリズム以外に, KE 及び KM を算出するアルゴリズムが複数報告されている. 他のアルゴリズムとして, ダイナミックモード分解 (DMD) [38–41] やベクトルプロローニ解析 [42] がある. 筆者らはこれらのアルゴリズムによる KE 算出結果の比較を報告している [43]. その内容を定性的に述べると, DMD は空間サンプル数 ( $M$ ) が時間サンプル数 ( $N$ ) より大きい時系列データに対して精度良く KE を算出する. 一方, アーノルディ型アルゴリズム及びベクトルプロローニ解析は,  $M$  と  $N$  の大小に関わらず KE を比較的精度良く算出する. よって, 流体の直接数値シミュレーションのように空間サンプル数が大きく取れる場合は DMD が有効である. 一方, 電力システムや生体システムのように空間サンプル数が大きく取れない, あるいは時間サンプル数が大きい (時間分解能が高い) 場合は後者 2 つのアルゴリズムが有効である.

ここで, アーノルディ型アルゴリズムの数学的背景を [28] に基づき紹介する. 基本アイデアは, ある固定したベクトル値観測量  $\mathbf{f}$  を用いて, 対象とする時系列データ (5) を

$$\{(\mathbf{U}^0 \mathbf{f})(\mathbf{x}_0), \dots, (\mathbf{U}^{N-2} \mathbf{f})(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}_{N-1}\}$$

と見なすことにある ( $\mathbf{U}^t \mathbf{f} := [\mathbf{U}^t f_1, \dots, \mathbf{U}^t f_M]^T$ ). 今,  $\mathbf{U}^0 \mathbf{f}$  から  $\mathbf{U}^{N-2} \mathbf{f}$  の  $N-1$  個の関数により張られる有限次元の空間<sup>2</sup>への  $\mathbf{U}^t$  の射影を考え, 射影した作用素を  $\mathbf{P}_{N-1} \mathbf{U}^t$  と表す. このとき,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$  において  $\mathbf{P}_{N-1} \mathbf{U}^{N-1} \mathbf{f}$  と  $\mathbf{U}^{N-1} \mathbf{f}$  の差の二乗ノルムが最小になるように射影作用素  $\mathbf{P}_{N-1}$  を求めるのが, 上記アルゴリズムの (i) となる. 以上のもとで, (ii) で定義するコンパニオン行列  $\mathbf{C}$  は  $\mathbf{P}_{N-1} \mathbf{U}$  の ( $\mathbf{U}^0 \mathbf{f}$  から  $\mathbf{U}^{N-2} \mathbf{f}$  を基底とする) 行列表現になる. 文献 [21] では, 時間サンプル数  $N$  を大きくしていくと, 上記アルゴリズムで算出されるベクトル  $\tilde{\mathbf{V}}_j$  が  $\mathbf{P}_{N-1} \mathbf{U}$  により決まる KM に近づいていくことが示されている. なお, ベクトルブローニ解析 [42] も同様のアイデアで幾何学的解釈が与えられている [12, 43].

## 4 応用事例

本節では, データ利用に関わる技術課題に KMD を適用した事例を紹介する. なお, 各課題に関する参考文献は [29, 31] を確認されたい.

### 4.1 ビル内アトリウム<sup>3</sup>の熱移動 [29, 30]

ビルに対するエネルギー管理システムにおいて, ビル内部の熱ダイナミクスの解析は空調システムに求められる基本技術の1つである. 従来より, 数値シミュレーションや計測などを用いて熱ダイナミクスの解析が進められている.

筆者らは, ビル内アトリウム (吹き抜け) における熱移動ダイナミクスを実測データから解析するために KMD を用いることを提案した. この熱移動の実測データに基づく解析は, アトリウムが空調制御に与える影響をその場で定量的に評価することを可能にし, 空調制御の高度化とビルの省エネルギー性向上につながることを期待される. 基本アイデアは, ビル内部で実測された温度や空調熱量の時系列データに対して KMD を適用し, アトリウムにおける熱移動の時間スケール (周波数) の KM を調べることにある.

ここで, KMD から熱の空間的移動を定量的に調べるために, KM が空間を伝搬する波動として解釈できることを示す. まず, 角周波数  $\omega_j$  を用いて  $j$  次 KE を  $\tilde{\lambda}_j = |\tilde{\lambda}_j| \exp(i\omega_j T_s)$  と書く ( $T_s$  は観測のサンプリング間隔を表す). このとき,  $\tilde{V}_{ij}$  を絶対値  $|\tilde{V}_{ij}|$  及び偏角  $\theta_{ij}$  を用いて  $\tilde{V}_{ij} = |\tilde{V}_{ij}| \exp(i\theta_{ij})$  と表すことにより,  $j$  次 KE  $\tilde{\lambda}_j$  に関する振動応答  $\tilde{\lambda}_j^t \tilde{\mathbf{V}}_j$  は以下の通り書ける.

$$\tilde{\lambda}_j^t \tilde{\mathbf{V}}_j = |\tilde{\lambda}_j|^t \begin{bmatrix} |\tilde{V}_{1,j}| \exp\{i(\omega_j t T_s + \theta_{1,j})\} \\ \vdots \\ |\tilde{V}_{M,j}| \exp\{i(\omega_j t T_s + \theta_{M,j})\} \end{bmatrix} \quad (7)$$

今,  $\tilde{\mathbf{V}}_j$  の各成分に対応するデータの観測位置を  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M \in \mathbb{R}^d$  と表す ( $d$  は観測対象の実フィールドの次元を表し, 平面 ( $d=2$ ) または空間 ( $d=3$ ) を想定している). このとき, 行列  $[\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_M]^T$  が列フルランクならば, 各  $i=1, \dots, M$  に対して  $\mathbf{r}_i^T \mathbf{k}_j = -\theta_{i,j}$  と

<sup>2</sup>これらの関数は線形独立と仮定する.

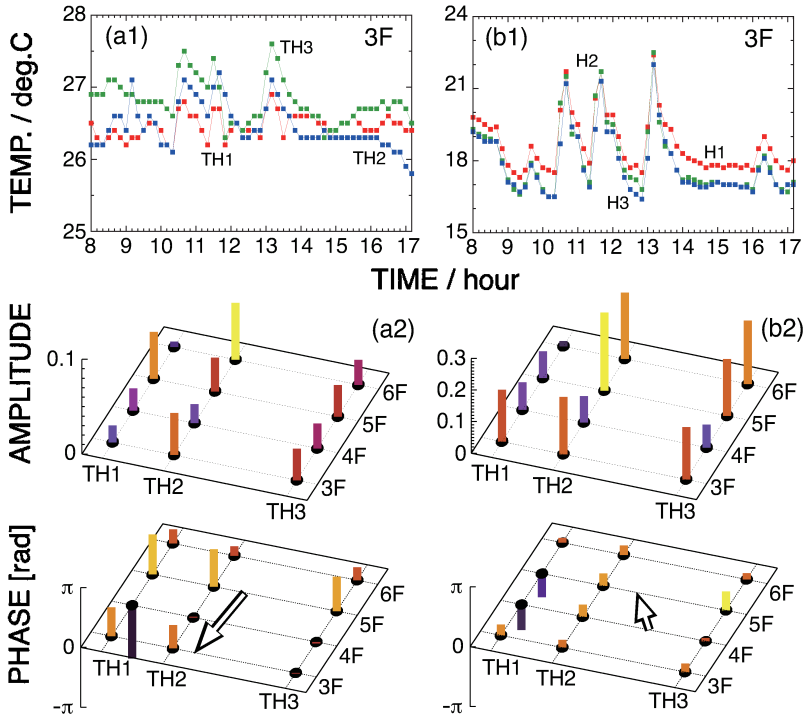


図 1: オフィス用ビルの実測温度データとクープマンモード分解 [29]

満たす  $k_j$  を一意に決めることができる。これより、式 (7) は次の通り書き直すことができる。

$$\tilde{\lambda}_j^t \tilde{\mathbf{V}}_j = |\tilde{\lambda}_j|^t \begin{bmatrix} |\tilde{V}_{1,j}| \exp\{i(\omega_j t T_s - \mathbf{r}_1^\top \mathbf{k}_j)\} \\ \vdots \\ |\tilde{V}_{M,j}| \exp\{i(\omega_j t T_s - \mathbf{r}_M^\top \mathbf{k}_j)\} \end{bmatrix}$$

これは、 $j$  次 KE に関する振動応答が角周波数  $\omega_j$  及び波数ベクトル  $\mathbf{k}_j$  の  $d$  次元波動であることを示している（ただし波の振幅は位置に依存し変化する）。なお、文献 [44] には空間周期性を有する分布系に対して類似の定式化が報告されている。

続いて、ビルの実測温度データに対して KMD を適用した例を紹介する。適用対象は、オムロンヘルスケア株式会社所有のビルであり、3 階から 6 階にアトリウムを有する [45]。このアトリウム付近の温度（各階に 3 個の温度計 TH*i* を設置）ならびに空調機器（アトリウム付近の各階に設置された 3 機 H*i*）の給気温度の実測データを  $\mathbf{y}[t] \in \mathbb{R}^{24}$  として KMD を適用した。図 1(a1,b1) に夏季に実測された 3 階温度ならびに空調給気温度の時系列データ例を示す。KMD の結果において、KE の絶対値  $|\tilde{\lambda}_j|$  ならびに KM のノルム  $\|\tilde{\mathbf{V}}_j\|$  の大きさと物理的考察より、周期 2.5 時間の KM がアトリウム内の熱移動で支配的であることがわかった。同図 (a2,b2) には周期 2.5 時間の KM の振幅  $|\tilde{V}_{i,j}|$  ならびに位相  $\theta_{i,j}$  の空間分布と上記の手順で求めた波数ベクトルを矢印で示す。図より、アトリウム付近の温度と空調の給気温度の波数ベクトルが反対の向きになっている。これは、(a1) の温度データから



推定される熱移動ダイナミクスをビル内に分散配置された空調機器が打ち消そうと動作していることを示唆している。

## 4.2 風力発電の平滑化効果 [31, 32]

風力発電の出力は気象条件に影響を受けて変動する。この変動を多数のウィンドタービンの集合体であるウィンドファームの出力で見た場合、ウィンドタービン単体の出力変動に比べて、集合体の出力変動は小さくなることが経験的に知られている。これは風力発電の平滑化効果（ならし効果）と呼ばれ、この定量的な評価技術は風力発電の立地計画や電力システムの運用・制御に広く必要とされている。

筆者らは、KMDを用いた風力発電の平滑化指標を提案した。以下では、1つのウィンドファームにおける出力平滑化を対象とするが、複数のウィンドファームの平滑化においても同様の定式化が可能である。今、あるウィンドファームが  $M$  台のウィンドタービンから構成されているとする。各タービンの出力（有効電力）時系列データを  $P_t^i$  ( $i = 1, \dots, M$ ,  $t = 0, \dots, N-1$ ) とし、これを  $M$  次元ベクトルとしてまとめ、 $\mathbf{P}_t = [P_t^1, \dots, P_t^M]^T$  と書く。ここで、 $\mathbf{P}_t$  の KMD が次式で与えられたとする。

$$\mathbf{P}_t = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\lambda}_j^t \tilde{\mathbf{V}}_j \quad \text{or} \quad P_t^i = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\lambda}_j^t \tilde{V}_{ij} \quad (8)$$

なお  $t = 0, \dots, N-2$  である。今、時刻  $t$  のウィンドファームの出力を  $P_t^{\text{WF}}$  と書くと、 $P_t^{\text{WF}}$  は  $P_t^i$  の  $i$  に関する総和とほぼ等しい。よって、式 (8) よりウィンドファーム出力に関する KMD を得る。

$$P_t^{\text{WF}} = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\lambda}_j^t \tilde{V}_j^{\text{WF}}, \quad \tilde{V}_j^{\text{WF}} := \sum_{i=1}^M \tilde{V}_{ij} \quad (9)$$

これは、KMDを用いることにより、ファーム出力をタービン単体出力と同じ KE（周波数）で分解可能であることを示している。よって、KE  $\tilde{\lambda}_j$  で決まる周波数に対して式 (8) の  $|\tilde{V}_{ij}|$  と式 (9) の  $|\tilde{V}_j^{\text{WF}}|$  を比較することにより、タービン単体出力の変動とファーム出力の変動の比として平滑化効果を定量化できる。これを定式化し以下の指標を提案した。

$$s_j := \frac{|\tilde{V}_j^{\text{WF}}|}{M \cdot \text{tmean}(|\tilde{V}_{1,j}|, \dots, |\tilde{V}_{M,j}|)}$$

ここで  $\text{tmean}$  は引数にある値の 25% トリム平均を返す。分子の  $M$  は単体出力と出力総和を同じスケールで比較するために含めている。

図 2 に、(a) 雲解像モデル CReSS [46] の風況シミュレーションから算出したタービン出力の時系列データ（タービン間距離 600 m）、(b) ウィンドファーム出力、(c) 提案平滑化指標の算出結果を示す。ここではタービン 15 台が一列に並んだファームを想定し、(b) にはタービン間距離を 400 m、600 m、800 m と変化させた場合のファーム出力を示している。(b) より、距離が大きくなるとファーム出力の変動幅が小さくなっている。(c) の算出結果を見ると、高周波域で平滑化効果がよく現れることがわかる。そして、600 m、800 m の指標は 400 m と比較して小さい値を取っており、タービン間距離を大きく取った場合に平

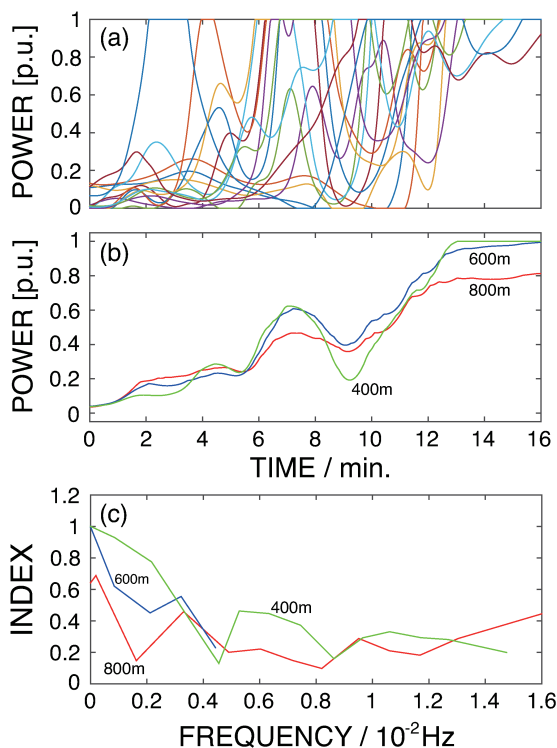


図 2: 風力発電の平滑化効果のシミュレーションとクーブマンモード分解に基づく平滑化指標 [31]

平滑化効果がよく現れることを示している。この結果は上記の波形に基づく観察と定性的に一致している。

## 5 おわりに

本報告では、クーブマン作用素による非線形ダイナミクスの解析について「クーブマンモード分解」の理解を目標にまとめた。ここでは、データを利用した非線形ダイナミクスの「解析」がクーブマン作用素に基づいて可能になることを述べた。本文中で触れたように、「解析」だけでなく「観測」や「同定」に対してもクーブマン作用素は新しい考え方とツールを提供しつつある [36, 47]。観測データから機能を実現するシステム工学の数学的基盤として、クーブマン作用素を含む非線形力学系の作用素論は基礎と応用の両面から今後益々発展することが期待される。

## 謝辞

クープマン作用素に関わる研究を始める機会を与えて頂いた Igor Mezić 先生, 引原 隆士先生に厚く御礼申し上げます。また, 共同研究者である太田 豊先生, 坪木 和久先生, 林田 光紀様, Fredrik Raak 君, 河野 洋平君, 佐孝 恭一君, 平松 尚人君, 濱崎 凌君に感謝致します。なお, 4節の研究は JST-CREST, 科研費・基盤研究(B)のサポートの下で行われたものです。

## 参考文献

- [1] 薄 良彦: クープマン作用素による非線形ダイナミクスの解析; システム/制御/情報, Vol. 61, No. 5 (2017) (掲載予定)
- [2] B. O. Koopman: Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space; *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 17, No. 5, pp. 315–318 (1931)
- [3] A. Lasota and M. C. Mackey: *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*. New York: Springer-Verlag (1994)
- [4] I. Mezić: Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions; *Nonlinear Dyn.*, Vol. 41, pp. 309–325 (2005)
- [5] C. W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter, and D. S. Henningson: Spectral analysis of nonlinear flows; *J. Fluid Mech.*, Vol. 641, pp. 115–127 (2009)
- [6] Y. Susuki and I. Mezić: Nonlinear Koopman modes and coherency identification of coupled swing dynamics; *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 26, No. 4, pp. 1894–1904 (2011) (also, correction, this journal, Vol. 26, No. 4, p. 2584 (2011))
- [7] ———: Nonlinear Koopman modes and a precursor to power system swing instabilities; *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 27, No. 3, pp. 1182–1191 (2012)
- [8] ———: Nonlinear Koopman modes and power system stability assessment without models; *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 29, No. 2, pp. 899–907 (2014)
- [9] Y. Ota, Y. Susuki, F. Raak, and I. Mezić: Koopman mode analysis of synchrophasor data in Japanese 60-Hz power system; 電気学会全国大会予稿集, Vol. 7, p. 156 (2015)
- [10] F. Raak, Y. Susuki, and T. Hikiyama: Multi-way partitioning of power networks via Koopman mode analysis; in *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 48, No. 30, pp. 421–426 (2015); 9th IFAC Symposium on Control of Power and Energy Systems CPES 2015
- [11] ———: Data-driven partitioning of power networks via Koopman mode analysis; *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 31, No. 4, pp. 2799–2808 (2016)

- [12] Y. Susuki, I. Mezić, F. Raak, and T. Hikiyara; Applied Koopman operator theory for power systems technology; *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, Vol. 7, No. 4, pp. 430–459 (2016)
- [13] I. Mezić and A. Banaszuk: Comparison of systems with complex behavior; *Physica D*, Vol. 197, No. 1-2, pp. 101–133 (2004)
- [14] M. Budišić and I. Mezić: Geometry of the ergodic quotient reveals coherent structures in flows; *Physica D*, Vol. 241, No. 15, pp. 1255–1269 (2012)
- [15] A. Mauroy and I. Mezić: On the use of Fourier averages to compute the global isochrons of (quasi)periodic dynamics; *CHAOS*, Vol. 22, No. 3, 033112 (2012)
- [16] A. Mauroy, I. Mezić, and J. Moehlis: Isostables, isochrons, and Koopman spectrum for the action-angle representation of stable fixed point dynamics; *Physica D*, Vol. 261, pp. 19–30 (2013)
- [17] Y. Lan and I. Mezić: Linearization in the large of nonlinear systems and Koopman operator spectrum; *Physica D*, Vol. 242, No. 1, pp. 42–53 (2013)
- [18] A. Mauroy and I. Mezić: A spectral operator-theoretic framework for global stability; in *Proc. 52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5234–5239, Florence, Italy, December (2013)
- [19] R. Mohr and I. Mezić: Construction of eigenfunctions for scalar-type operators via Laplace averages with connections to the Koopman operator; Preprint:arXiv:1403.6559v2, April (2014)
- [20] I. Mezić: On applications of the spectral theory of the Koopman operator in dynamical systems and control theory; in *Proc. 2015 IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control*, pp. 7034–7041, Osaka, Japan, December (2015)
- [21] H. Arbabi and I. Mezić: On the relationship between Koopman mode decomposition and dynamic mode decomposition; Preprint, UC Santa Barbara, Department of Mechanical Engineering (2015)
- [22] I. Mezić: Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator; *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 45, pp. 357–378 (2013)
- [23] T. N. M. Phan, J. C. Wells, Y. Susuki, L. V. Nguyen, J. S. Bonner, M. S. Islam, and W. D. Kirkey; Koopman modes in a near-bank region of a tidal river; *J. Japanese Soc. Civil Eng., Ser.B1 (Hydraulic Eng.)*, Vol. 71, No. 4, pp. I\_205–I\_210 (2015)
- [24] B. Eisenhower, T. Maile, M. Fischer, and I. Mezić: Decomposing building system data for model validation and analysis using the Koopman operator; *Proc. IBPSA Simbuild Conference*, pp. 434–441, New York City, USA, August (2010)

- [25] J. Grosek and J. N. Kutz: Dynamic mode decomposition for real-time background/foreground separation in video; Preprint:arXiv:1404.7592v1, April (2014)
- [26] M. O. Williams, C. W. Rowley, I. Mezić, and I. G. Kevrekidis: Data fusion via intrinsic dynamic variables: An application of data-driven Koopman spectral analysis; *Euro. Phys. Lett.*, Vol. 109, 40007 (2015)
- [27] A. Surana: Koopman operator based nonlinear dynamic textures; *Proc. 2015 American Control Conference*, pp. 1333–1338, Chicago, USA, July (2015)
- [28] M. Budišić, R. Mohr, and I. Mezić: Applied Koopmanism; *CHAOS*, Vol. 22, No. 4, 047510 (2012)
- [29] Y. Kono, Y. Susuki, M. Hayashida, and T. Hikihara: Modeling of effective heat diffusion in a building atrium via Koopman mode decomposition; *Proc. 2016 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications*, Yugawara, Japan, November (2016)
- [30] 河野 洋平, 薄 良彦, 林田 光紀, 引原 隆士: ビル内アトリウムの熱移動モデリングへのクープマンモード分解の適用—I—小スケール流速場による有効拡散 (2016) (査読中)
- [31] F. Raak, Y. Susuki, K. Tsuboki, M. Kato, and T. Hikihara: On smoothing effects of wind power via Koopman mode decomposition; *Proc. 2016 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications*, Yugawara, Japan, November (2016)
- [32] F. Raak, Y. Susuki, K. Tsuboki, M. Kato, and T. Hikihara: Quantifying smoothing effects of wind power via Koopman mode decomposition: A numerical test with wind speed predictions in Japan (2016) (投稿済)
- [33] 薄 良彦: 電力システムの動的解析技術—データから非線形ダイナミクスを理解する; シミュレーション, Vol. 32, No. 3, pp. 185-192 (2013)
- [34] V. I. Arnold and A. Avez: *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Benjamin (1968)
- [35] 佐孝 恭一, 薄 良彦, Fredrik Raak, 引原 隆士: クープマン作用素の連続スペクトルに基づく電圧崩壊現象の時系列データ解析; 電気関係学会関西連合大会予稿集 (2016)
- [36] A. Surana and A. Banaszuk: Linear observer synthesis for nonlinear systems using Koopman Operator framework; *Preprints, 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pp. 728–735, Monterey, USA, August (2016)
- [37] N. Wiener and A. Wintner: Harmonic analysis and ergodic theory; *Amer. J. Math.*, Vol. 63, No. 2, pp. 415–426 (1941)
- [38] P. J. Schmid: Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data; *J. Fluid Mech.*, Vol. 656, pp. 5–28 (2010)

- [39] K. K. Chen, J. H. Tu, and C. W. Rowley: Variants of dynamic mode decomposition: Boundary condition, Koopman, and Fourier analyses; *J. Nonlinear Sci.*, Vol. 22, pp. 887–915 (2012)
- [40] M. R. Jovanović, P. J. Schmid, and J. W. Nichols: Sparsity-promoting dynamic mode decomposition; *Phys. Fluids*, Vol. 26, 024103 (2014)
- [41] J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton, and J. N. Kutz: On dynamic mode decomposition: Theory and applications; *J. Comput. Dyn.*, Vol. 1, No. 2, pp. 391–421 (2014)
- [42] Y. Susuki and I. Mezić: A Prony approximation of Koopman mode decomposition; in *Proc. 2015 IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control*, pp. 7022–7727, Osaka, Japan (2015)
- [43] F. Raak, Y. Susuki, I. Mezić, and T. Hikiyama: On Koopman and dynamic mode decompositions for application to dynamic data with low spatial dimension; *Proc. 2016 IEEE 55th Annual Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, December (2016)
- [44] A. S. Sharma, I. Mezić, and B. J. McKeon: On the correspondence between Koopman mode decomposition, resolvent mode decomposition, and invariant solutions of the Navier-Stokes equations; Preprint: arXiv:1603.08378v5, June (2016)
- [45] 平岡 雅哉, 小池 正俊, 神谷 麻里子: オムロンヘルスケア研究開発及び本社新拠点; ヒートポンプとその応用, No. 84, pp. 18–23 (2012)
- [46] K. Tsuboki: High-resolution simulations of high-impact weather systems using the cloud-resolving model on the earth simulator; *High Resolution Numerical Modeling of the Atmosphere and Ocean*, pp. 141–156, Springer (2008)
- [47] A. Mauroy and J. Goncalves: Linear identification of nonlinear systems: A lifting technique based on the Koopman operator; *Proc. 2016 IEEE 55th Annual Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, December (2016)